ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಎಡೆಮಾಡುವ ಒಂದು ಒಗಟು

ಆಂಗ್ಲ ಮೂಲ: ಎ. ರಾಮಚಂದ್ರನ್
ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್
(ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು)

ಚಿಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳಿಗೂ ನೀಡಬಹುದಾದಂತಹ ಗಣಿತದ ಪ್ರಸಿದ್ಧ ಒಗಟೊಂದು ಈ ರೀತಿ ಇದೆ:

ಮನೆಗಳ ಒಂದು ಸಾಲಿಗೆ 1ರಿಂದ ಹಿಡಿದು ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಒಂದು ದಿನ ಈ ಮನೆಗಳ ನಿವಾಸಿಯೊಬ್ಬ ತನ್ನ ಎಡ ಪಕ್ಕದ ಮನೆ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಬಲ ಪಕ್ಕದ ಮನೆ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸುತ್ತಾನೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಅವನಿರುವ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಮನೆಗಳಿವೆ? ಅವನು ವಾಸವಿರುವ ಮನೆ-ಸಂಖ್ಯೆ ಏನು?

ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ 10ಕ್ಕಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಎಂದು ಹೇಳಿ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸರಳವಾಗಿಸಬಹುದು. ಆಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡುವ ಮೂಲಕ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದೇನೂ ಕಷ್ಟವಲ್ಲ. ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ನೋಡಿ.

ಮುಂದಿನ ಹಂತದ ಸವಾಲಾದರೋ, ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಇನ್ನೂ 50ಕ್ಕಿಂತಲೂ ಕಡಿಮೆ ಇದೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿಕೊಂಡು ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರ ಹುಡುಕುವುದಾಗಿದೆ. ಈಗ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡುವ ವಿಧಾನ ಅಷ್ಟೇನೂ ಉತ್ತಮವಾದ ಆಯ್ಕೆ ಎನಿಸದು. ಮುಂದುವರಿಯಲು, ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಇರುವ ಸೂತ್ರವನ್ನು ನಾವೀಗ ಬಳಸಬಹುದಾಗಿದೆ:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ಇಲ್ಲಿ n ಎಂಬುದು ಸಾಲು ಮನೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ, ಮೇಲಿನ ನಿವಾಸಿಯ ಮನೆ ಸಂಖ್ಯೆ m ಅಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಅವನ ಹೇಳಿಕೆಯು 1 ರಿಂದ m - 1 ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು m + 1 ಇಂದ n ವರೆಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬುದಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ,

$$\frac{m(m-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}, \qquad (1)$$

ಇದರಿಂದ,

$$m^2 = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (2)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಬಲಬದಿಯು ಒಂದು ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಿದರೆ, ಎಡಬದಿಯು ಒಂದು ವರ್ಗ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ ನಾವು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುವ ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು ಹುಡುಕಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಅಂತಹ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.ಅಂತಹ ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆ (1ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ) 36 ಆಗಿದೆ. ಇದು 6ನೇ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ 8ನ ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಇದು m = 6 ಹಾಗೂ n = 8 ಎಂಬ ಪರಿಹಾರ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಮನೆ-ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೊತ್ತಗಳು 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 ಹಾಗೂ 7 + 8 = 15 ಆಗಿವೆ. ಇದರ ಮುಂದಿನ m ಮತ್ತು n ಗಳ ಬೆಲೆಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ 35 ಮತ್ತು 49 ಆಗಿವೆ.

ಸಮೀಕರಣ (2) ಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಾಗುವ (m, n) ಜೋಡಿಗಳು ಅಪರಿಮಿತವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಫುಟವಾಗಿ ಗೋಚರಿಸದಿದ್ದರೂ, ನಿಜ ಹೇಳಿಕೆಯಾಗಿದೆ. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಕೋಷ್ಟಕವು ಇಂತಹ ಕೆಲವು ಜೋಡಿಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿಮಾಡುತ್ತದೆ:

m	1	6	35	204	1189	6930	...
n	1	8	49	288	1681	9800	...

(3)

m ಮತ್ತು n ಗಳ ಬೆಲೆ ಹೆಚ್ಚಾಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ, ಭಿನ್ನರಾಶಿ n/m ಯ ಬೆಲೆಯು √2 ನ್ನು ಕ್ರಮೇಣ ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:

$$\frac{49}{35} = 1.4, \quad \frac{288}{204} \approx 1.41, \quad \frac{1681}{1189} \approx 1.414, \quad \ldots.$$

ನಾವಿಲ್ಲಿ ಈ ಅನುಪಾತವು √2 ಬೆಲೆಯನ್ನು ನಿಧಾನವಾಗಿ ಸಮೀಪಿಸುವುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದೇನೂ ಕಷ್ಟವಲ್ಲ: ನಾವು $m^2 = n(n + 1)/2$ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು $n^2 + n = 2m^2$ ಎಂದು ಬದಲಿಸಿ ಬರೆದರೆ,

$$\frac{n^2}{2m^2} = 1 - \frac{n}{2m^2},$$
$$\therefore \frac{n^2}{2m^2} = 1 - \frac{n}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

n ಬೆಲೆ ದೊಡ್ಡದಾಗುತ್ತಿದ್ದಂತೆ 1/(n + 1) ಬೆಲೆಯು ಸೊನ್ನೆಗೆ ಹತ್ತಿರವಾಗುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, n^2/m^2 ಬೆಲೆ 2ನ್ನು ಸಮೀಪಿಸುತ್ತದೆ. ಕೋಷ್ಟಕ (3)ರಲ್ಲಿ m-ಅಡ್ಡಸಾಲು ಮತ್ತು n-ಅಡ್ಡಸಾಲುಗಳೆರಡರಲ್ಲೂ ನಮಗೆ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳು ಸ್ಫುಟವಾಗಿ ಗೋಚರಿಸುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, n-ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು

$$1^2,\ 8 = 3^2 - 1,\ 7^2,$$
$$288 = 17^2 - 1,\ 1681 = 41^2,\ \ldots. \quad (4)$$

ಎಂದು ಬರೆದಾಗ ನಮಗೆ “ಅಧಾರ” ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಣಿಯೊಂದು ಗೋಚರಿಸುತ್ತದೆ:

$$1, \quad 3, \quad 7, \quad 17, \quad 41, \quad \ldots, \qquad (5)$$

ಈ "ಆಧಾರ" ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸರಣಿಯೇ ಅಂತರ್ನಿಹಿತ ವಿನ್ಯಾಸವೊಂದನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವುದನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದಾಗಿದೆ! ಪ್ರತಿ ಸಂಖ್ಯೆಯು ತನ್ನ ಹಿಂದಿನ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಆಗಿರುವುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದು (ಫಿಬೊನಾಚಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ನಿಯಮದಂತೆ): a, b, c ಗಳು (5)ರಲ್ಲಿ ಬರುವ ಮೂರು ಅನುಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$c = 2b + a. \qquad (6)$$

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 41 = (2 x 17) + 7. ಈ ವಿನ್ಯಾಸವು ಸರಿಯಿದ್ದರೆ, ನಾವು ಈ ಸರಣಿಯ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಊಹಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. 41 ರ ಬಳಿಕ (2 x 41) + 17 = 99 ಬರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, 1681ರ ಬಳಿಕ ಬರುವ n ನ ಮುಂದಿನ ಬೆಲೆ 99^2 - 1 = 98 x 100 = 9800 ಆಗಿರಬೇಕು—ದಿಟಕ್ಕೂ, ಅದೇ ಆಗಿದೆ.

ಈ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸೋಣ. ಸಮೀಕರಣ (5) ರಲ್ಲಿ, 99ರ ಬಳಿಕ ಬರಬೇಕಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆ (2 x 99) + 70 = 239 ಆಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಕೋಷ್ಟಕ (3)ರಲ್ಲಿ 1681ರ ಬಳಿಕ 239^2 = 57121 ಬರುತ್ತದೆ.

ನಾವೀಗ ಕೋಷ್ಟಕ (3)ರ m- ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ (ಮೇಲಿನ ಸಾಲು) 6930ರ ಬಳಿಕ ಯಾವ ಸಂಖ್ಯೆ ಬರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಮುಂಗಾಣಲು ಸಾಧ್ಯವೆ? ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಒಂದು ಸರಳ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತವೆ: a, b, c ಈ ಸಾಲಿನ ಮೂರು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಲಿ. ಆಗ,

$$c = 6b - a. \qquad (7)$$

ಉದಾಹರಣೆ: 35 = (6 x 6) – 1. ಆದ್ದರಿಂದ, 6930 ಆದ ಬಳಿಕ ನಮಗೆ (6 x 6930) – 1189 = 40391 ದೊರೆಯಬೇಕು.

ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನಿರೀಕ್ಷಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 40390 = 40392 + 40393 + \ldots + 57121.$$

ನಿಸ್ಸಂದೇಹವಾಗಿಯೂ, ಇದು ಸರಿಯಾಗಿದೆ: ಎರಡು ಬದಿಗಳೂ 815696245 ಗೆ ಸಮನಾಗಿವೆ (ದಯವಿಟ್ಟು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಿ! ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು n(n + 1)/2 ಕ್ಕೆ ಸಮ ಎಂಬ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳಿ).

ಕೋಷ್ಟಕ (3)ರ ಇನ್ನೂ ಕೆಲವು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ಓದುಗರನ್ನು ಆಹ್ವಾನಿಸುತ್ತೇನೆ. ಅಂತೆಯೇ ಕೆಲವು ಸಾಧನೆಗಳನ್ನೂ (ದಿಟಕ್ಕೂ, ಅವುಗಳ *ಅಗತ್ಯವಿದೆ*) ಒದಗಿಸಬಹುದು ಎಂದು ನಿರೀಕ್ಷಿಸುತ್ತೇನೆ.

ಎ. ರಾಮಚಂದ್ರನ್ ಅವರಿಗೆ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ವಿಜ್ಞಾನದ ಬೋಧನೆ ಬಹುಕಾಲದ ಆಸಕ್ತಿಯ ವಿಷಯವಾಗಿದೆ. ಸ್ನಾತಕಪೂರ್ವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿ ಅವರು ಭೌತಿಕ ವಿಜ್ಞಾನ ಹಾಗೂ ಗಣಿತವನ್ನು ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ, ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪದವಿ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಜೈವಿಕ ವಿಜ್ಞಾನಕ್ಷೇತ್ರದತ್ತ ಸರಿದರು. ಋಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಸುಮಾರು ಎರಡು ದಶಕಗಳಷ್ಟು ಕಾಲ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ವಿಜ್ಞಾನ, ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಭೂಗೋಳಶಾಸ್ತ್ರಗಳನ್ನು ಪಾಠಮಾಡಿರುವ ರಾಮಚಂದ್ರನ್ ಅವರು ಸದ್ಯ ಚೆನ್ನೈ ನಗರದಲ್ಲಿ ನೆಲೆಸಿದ್ದಾರೆ. ಅವರ ಇತರ ಅಸಕ್ತಿಗಳೆಂದರೆ ಇಂಗ್ಲಿಷ್ ಮತ್ತು ಭಾರತೀಯ ಸಂಗೀತ. ಅವರನ್ನು archandran.53@gmail.com ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸದಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.