ಆವರ್ತಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ:
ಕೆಲವು ವಿವರಣೆಗಳು

ಆಂಗ್ಲಮೂಲ: ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ
ಮತ್ತು ಪದ್ಮಪ್ರಿಯಾ ಶಿರಾಲಿ
ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್
(ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು)

ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆಂಗಲ್ಸ್ ಪತ್ರಿಕೆಯ 2013ರ ನವೆಂಬರ್ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾದ "ಆವರ್ತಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳು" ಲೇಖನದ ಕೊನೆಯಲ್ಲಿ ಹಲವು ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಉತ್ತರಿಸಲ್ಪಡದೇ ಉಳಿದವು. ಅನ್ವೇಷಣೆಯ ಮಾರ್ಗದಲ್ಲಿ ಪ್ರಯೋಗಾತ್ಮಕ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳಂತೆ ಅವು ಹೊರಹೊಮ್ಮಿದ್ದವು. ನಾವಿಲ್ಲಿ ಈ ವೀಕ್ಷಣೆಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಿ, ಅವುಗಳೆಷ್ಟು ನ್ಯಾಯಸಮ್ಮತ ಎಂದು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಾ, ಭಾಗಾಕಾರದ ಕೆಲವು ಸರಳ ತತ್ತ್ವಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಅವುಗಳನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತೇವೆ.

(A) ಎಲ್ಲಾ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳೂ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳಿಗೆ ಅಥವಾ ಆವರ್ತಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶಗಳಿಗೆ ಎಡೆಮಾಡುತ್ತವೆ ಎಂಬ ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯವೆ?

ಹೌದು! ಭಿನ್ನರಾಶಿ m/n ಆಗಿರಲಿ, ಇಲ್ಲಿ m ಮತ್ತು n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿದ್ದು, ಅವುಗಳಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಸಮಾನ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಲ್ಲವೆಂದು ಅಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಈಗ m/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಈ ದಶಮಾಂಶವು ಅಂತ್ಯಗೊಂಡರೆ ಒಳ್ಳೆಯದು, ಮಾಡಲು ಇನ್ನೇನೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳದಿರುವ ಸಂದರ್ಭವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರದ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ "ಇಳಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು" ಭಾಜ್ಯ m ನ ಅಂಕಿಗಳು ಮುಗಿದು ಹೋದಾಗ ಏನು ಮಾಡುವುದು? m ನ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಬಲಭಾಗಕ್ಕೆ ಸೊನ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿ, ಅವುಗಳನ್ನು "ಇಳಿಸಿಕೊಳ್ಳು"ವ ಮೂಲಕ ಭಾಗಾಕಾರವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಬೇಕು. ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ ಸೊನ್ನೆಯಲ್ಲದ ಒಂದು ಶೇಷ ದೊರೆತು, ಅದು 1, 2, 3,..., n – 1 ಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಹೆಚ್ಚೆಂದರೆ "n" ಭಾಗಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳ ಬಳಿಕ, ಹಿಂದೆ ದೊರೆತ ಶೇಷವನ್ನೇ ಅವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಪಡೆಯುತ್ತೇವೆ.

ಈ ಹಂತದಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ ಭಾಗಾಕಾರದಿಂದ ನಾವು ಪಡೆಯುವ ಅಂಕಿಗಳ ಸರಣಿಯು ಈ ಹಿಂದೆ ದೊರೆತ ಸರಣಿಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಈ ಹಂತದಿಂದ ಮುಂದಕ್ಕೆ ದಶಮಾಂಶವು ಆವರ್ತವಾಗುತ್ತದೆ.

ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಬಲ್ಲದು. ಭಿನ್ನರಾಶಿ 10/13 ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸೋಣ. 10 ÷ 13 ರ ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಕೋಷ್ಟಕ 1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿನ ಕೊನೆಯ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಮೊದಲ ಸಾಲಿನ ಶೇಷವೇ ಕಂಡುಬರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅಂದರೆ, ಈ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನ ಮುಂದಿನ ಸಾಲಿನಲ್ಲಿ ಬರುವ ಅಂಕಿ ಎರಡನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಅದೇ ರೀತಿ ಅದರ ಬಳಿಕ ಬರುವುದು ಮೂರನೇ ಅಡ್ಡಸಾಲಿನದ್ದಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದು ಹೀಗೆಯೇ ಮುಂದುವರಿಯುತ್ತದೆ. ಭಾಗಲಬ್ಧಗಳ ಸರಣಿ 0, 7, 6, 9, 2, 3, 0,...ಯನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಹೀಗಾಗಿ,

$$10/13 = 0.076923\,076923\ \ldots = 0.\overline{076923}.$$

ಭಾಗಲಬ್ಧ	ಶೇಷ	ಬದಲಿಸಿದ

		ಭಾಜ್ಯ
0	10	100
7	9	90
6	12	120
9	3	30
2	4	40
3	1	10
0	10	100

ಕೋಷ್ಟಕ 1: 10 ÷ 13 ರ ದೀರ್ಘ ಭಾಗಾಕಾರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯ ಹಂತಗಳು

(B) *ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ರ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು $n = 2^a \times 5^b$ (a, b ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವೆ?* (n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದ್ದು, ಆ ಸರಣಿ ಇಂತಿದೆ: 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100,… ಈ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೂ ಮೇಲೆ ಹೇಳಿರುವ ರೂಪದಲ್ಲೇ ಇವೆ).

ಉತ್ತರ, ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ, ಹೌದು ಎಂದಾಗಿದೆ! ಏಕೆಂದರೆ, 1/n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ, $1/n = 0.a_1a_2a_3\ldots a_k$ ಎಂದಾಗಿದ್ದು, $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ ದಶಮಾಂಶದ ಅಂಕಿಗಳಾಗಿರಲಿ. A ಎಂಬುದು k ಅಂಕಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{a_1a_2a_3\ldots a_k}$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ,

$$\frac{1}{n} = \frac{A}{10^k}, \qquad \therefore A = \frac{10^k}{n}. \qquad (1)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.ಈಗ ನಾವು ಸಮೀಕರಣ (1) ರಿಂದ n ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು 10^k ಯ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. 10 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2 ಮತ್ತು 5 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, n ಗೆ 2 ಮತ್ತು 5 ನ್ನು ಹೊರತುಪಡಿಸಿ ಬೇರೆ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಹೀಗಾಗಿ, $n = 2^a \times 5^b$ (a, b ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ಒಂದು ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಉದಾಹರಣೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಇದನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು: n = 32 ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ, 1/32 = 0.03125 ಎಂದಾಗಿ, A = 3125 ಆಗುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ k = 5, ಆಗುತ್ತದೆ. ಸಮೀಕರಣ (1) ಈಗ,

$$\frac{1}{32} = \frac{3125}{100000}, \quad \therefore 3125 = \frac{100000}{32}.$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹೇಳಿಕೆಯ ವಿಲೋಮವೂ ಸತ್ಯ: $n= 2^a \times 5^b$ (a, b ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕಗಳು) ಆಗಿದ್ದರೆ, 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಏಕೆಂದರೆ, $a \geq b$ ಆದರೆ, ಆಗ:

$$\frac{1}{2^a \times 5^b} = \frac{5^{a-b}}{2^a \times 5^a} = \frac{5^{a-b}}{10^a}.$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿಕ a ಅಂಕಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆ $n = 2^4 \times 5^1 = 80$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ:

$$\frac{1}{80} = \frac{1}{2^4 \times 5^1} = \frac{5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{125}{10000} = 0.0125.$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $b \geq a$ ಆದಾಗ:

$$\frac{1}{2^a \times 5^b} = \frac{2^{b-a}}{2^b \times 5^b} = \frac{2^{b-a}}{10^b}.$$

ಈಗ, ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಬಳಿಕ b ಅಂಕಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವ ದಶಮಾಂಶ ನೀಡುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ,

$n = 2^3 \times 5^3 = 250$ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಾಗ:

$$\frac{1}{250} = \frac{1}{2^1 \times 5^3} = \frac{2^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{4}{1000} = 0.004.$$

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ.

(C) *1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕ ಒಂದಂಕಿಯಾಗುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು, $n = 3 \times 2^a \times 5^b$ ಹಾಗೂ $n = 3^2 \times 2^a \times 5^b$ ಎಂಬ ಸೂತ್ರಗಳಿಂದ ತಿಳಿಯಬಹುದಾಗಿದೆ ಎಂಬುದು ಸತ್ಯವೆ?* (1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಒಂದಂಕಿಯಾಗುವ n ನ ನಾವು ಕಂಡುಕೊಂಡ ಬೆಲೆಗಳ ಪಟ್ಟಿ ಇಂತಿದೆ: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 45, 48, 60, 72, 75, 90, 96,... ಇವೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರಾನ್ವಯ ಪಡೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ). ನಾವೀಗ ಮೇಲಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಹೌದು ಎಂದು ತೋರಿಸುತ್ತೇವೆ. ದಶಮಾಂಶ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಒಂದಂಕಿ ಎಂದರೇನು ಅರ್ಥ? ಈ ಆವರ್ತಕಾಂಕವನ್ನು ಒಂದಂಕಿ d ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ, 1/n ಭಿನ್ನರಾಶಿಯ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ರೂಪ

$$0.a_1a_2a_3 \ldots a_k dddd \ldots$$

ಆಗಿರಬೇಕು (ಇಲ್ಲಿ a_1, a_2, a_3, ..., a_k ಎಂಬುವು ಆವರ್ತನಕ್ಕೂ ಮೊದಲಿನ ಅಂಕಿಗಳು). A ಎಂಬುದು k ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ $a_1a_2a_3 \ldots a_k$ ಆಗಿರಲಿ. ಆಗ

$$\frac{1}{n} = 0.a_1a_2a_3 \ldots a_k dddd \ldots,$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆತು, ಇದನ್ನು 10^k ಮತ್ತು 10 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ (ಈ ಗುಣಾಕಾರಗಳು ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವನ್ನು ಮೊದಲು k ಅಂಕಿಗಳಷ್ಟು ಹಾಗೂ ಬಳಿಕ 1 ಅಂಕಿಯಷ್ಟು ಬಲಕ್ಕೆ ಸರಿಸುತ್ತವೆ).

$$\frac{10^k}{n} = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_k}.dddd \dots = A.dddd \dots, \qquad (2)$$

$$\frac{10^{k+1}}{n} = \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_k d}.dddd \dots = (10A + d).dddd \dots. \qquad (3)$$

ಇಲ್ಲಿ 10A + d ಸಂಖ್ಯೆಯು $\overline{a_1a_2a_3 \dots a_kd}$ ಆಗಿದ್ದು, ಇದು $a_1a_2a_3 \dots a_k0$ + d ಗೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ, 10 x $\overline{a_1a_2a_3 \dots a_k0}$ + d = 10A + d. ನಾವೀಗ ಸಮೀಕರಣ 2 ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ 3 ರಿಂದ ಕಳೆದರೆ, ದಶಮಾಂಶ ಬಿಂದುವಿನ ಬಲಭಾಗವು (0.dddd...) ಕಳೆದಾಗ ನಷ್ಟವಾಗಿ,

$$\frac{10^{k+1} - 10^k}{n} = 10A + d - A = 9A + d. \qquad (4)$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಾವು $10^{(k+1)} - 10^k = 10^k \times 9$ ಎಂಬ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಇಂದ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ ಎಂದು ನೋಡುತ್ತೇವೆ. 10^k x 9 ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನಗಳು 2, 5, 3 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಂಖ್ಯೆ n ಅನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕವೊಂದರ ಅಪವರ್ತನ ಹಾಗೂ 9 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ (ಇದು 3 ಅಥವಾ 9 ಮಾತ್ರ ಆಗಲು ಸಾಧ್ಯ. ಏಕೆಂದರೆ, ಅಪವರ್ತನವು 1 ಆದರೆ, ದಶಮಾಂಶವು ಅಂತ್ಯಗೊಳ್ಳುವುದು) ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $n = 3 \times 2^a \times 5^b$ ಅಥವಾ $n = 3^2 \times 2^a \times 5^b$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ತೀರ್ಮಾನವು ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಗೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿದೆ.

ಉದಾಹರಣೆ: ನಿಜವಾದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳೊಂದಿಗೆ ವ್ಯವಹರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಮೇಲಿನ ವಾದವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. n = 18 ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ, 1/n = 0.05555... ಆಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, d = 5 (ಇದು ಆವರ್ತಾಂಕ). ಜೊತೆಗೆ, k = 1 (ಆವರ್ತಾಂಕದ ಸರಣಿಯ ಮೊದಲು ಒಂದು ಅಂಕಿ ಬರುತ್ತದೆ). ಆದ್ದರಿಂದ, ನಾವು ಮೊದಲು ಸಮೀಕರಣದ ಎರಡೂ ಬದಿಗಳನ್ನೂ $10^1 = 10$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಬಳಿಕ $10^2 = 100$ ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ:

$$\frac{10}{18} = 0.55555 \dots,$$
$$\frac{100}{18} = 5.55555 \dots.$$

ದೊರೆತು, ಇವುಗಳನ್ನು ಕಳೆದರೆ,

$$\frac{100}{18} - \frac{10}{18} = 5, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{90}{18} = 5.$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, 90 = 10 x 9 ರ ಅಪವರ್ತನ 18 ಆಗುತ್ತದೆ. ಇಲ್ಲಿ, 18 = 2 x 9 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದು ನಾವು ಮೇಲೆ ಹೇಳಿದ "n ಅನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕವೊಂದರ ಅಪವರ್ತನ ಹಾಗೂ 9 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ" ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಶದೀಕರಿಸುತ್ತದೆ. (ಇಲ್ಲಿ 10 ರ ಅಪವರ್ತನ 2 ಹಾಗೂ 9 ರ ಅಪವರ್ತನ 9 ಆಗಿದೆ).

(D) n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಎರಡಂಕಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ?

ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ನಾವು ಹಿಂದೆ ವಾದಸಿದಂತೆಯೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಈ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ರೂಪ

$$0.a_1a_2a_3 \dots a_k d_1 d_2 d_1 d_2 \dots$$

ಎಂಬುದನ್ನು ಕಾಣುತ್ತೇವೆ. ಇಲ್ಲಿ a_1, a_2, a_3,...., a_k, d_1,d_2 ಅಂಕಿಗಳಾಗಿದ್ದು, ಆವರ್ತಾಂಕವು ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ $D = \overline{d_1d_2}$ ಆಗಿರಲಿ. k-ಅಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆ $\overline{a_1a_2a_3...a_k}$ ಯನ್ನು A ಎಂದು ಕರೆದರೆ,

$$\frac{1}{n} = 0.a_1a_2a_3 \dots a_k d_1 d_2 d_1 d_2 \dots,$$

ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಮೊದಲು 10^k, ಬಳಿಕ 10^2 ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿದರೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಸಮೀಕರಣಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ:

$$\frac{10^k}{n} = A.d_1d_2d_1d_2 \dots, \qquad (6)$$

$$\frac{10^{k+2}}{n} = (100A + D).d_1d_2d_1d_2 \dots. \qquad (7)$$

ಈಗ ಸಮೀಕರಣ 6ನ್ನು ಸಮೀಕರಣ 7ರಿಂದ ಕಳೆದರೆ,

$$\frac{10^{k+2} - 10^k}{n} = 100A + D - A = 99A + D. \quad (8)$$

ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು $10^{(k+2)} - 10^k = 10^k \times 99$ ಸಂಖ್ಯೆಯು n ಇಂದ ಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಭಾಗವಾಗುವುದು ಎಂದು ತರ್ಕಿಸಬಹುದು. ಹೀಗಾಗಿ, n ಅನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕವೊಂದರ ಅಪವರ್ತನ ಹಾಗೂ 99 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾಗಿದೆ. ಎರಡನೆಯ ಅಪವರ್ತನವು (ಅಂದರೆ, 99ರ) 9ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ; ಏಕೆಂದರೆ, ಆಗ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಒಂದೇ ಅಂಕಿಯಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, 99 ರ ಈ ಅಪವರ್ತನವು 11, 33, 99 ರಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10ರ ಘಾತಾಂಕದ ಅಪವರ್ತನಗಳೊಂದಿಗೆ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಾದ n ಅನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಹೀಗಾಗಿ, n ಬೆಲೆ 11, 22, 33, 44, 55, 66, 88, 99, 110, 132,... ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು. ಈ ತೀರ್ಮಾನವು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕೆ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(E) *n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಮೂರಂಕಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ?*

ಈ ವೇಳೆಗಾಗಲೇ ನಮ್ಮ ತಂತ್ರವು ಪರಿಚಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಾವು ಮೊದಲ ಹಂತಗಳನ್ನು ಕೈಬಿಡುತ್ತೇವೆ. ನಮ್ಮ ತೀರ್ಮಾನವೀಗ: ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಮೂರಂಕಿಯಾಗುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳು $10^k \times 999$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದು (k ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಅದು $10^k \times 99$ ಮತ್ತು $10^k \times 9$ ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಕೂಡದು. 999 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣವು $999 = 3^3 \times 37$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, n ನಲ್ಲಿ ಇರುವ 999 ರ ಅಪವರ್ತನವು ಈ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು: 27, 37, 111, 333, 999. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ: 27, 37, 54, 74, 108, 148, 135, 175,... ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ, ನಾವು ತಲುಪಿದ ತೀರ್ಮಾನವು ನಾವು ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಕೊಂಡದ್ದಕ್ಕೆ ಕರಾರುವಾಕ್ಕಾಗಿ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗುತ್ತದೆ.

(F) *n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ನಾಲ್ಕಂಕಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ?*

ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸುವಾಗ ನಾವು $1 \le n \le 100$ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕಂಕಿ ಆವರ್ತಕಾಂಕವಿರುವ n ನ ಬೆಲೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ವೀಕ್ಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ಕಂಡುಕೊಂಡಿರುವ ತಥ್ಯಾಂಶವನ್ನು ವಿವರಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಹಂತಗಳನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸುತ್ತಾ, 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆಗೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ನಾಲ್ಕಂಕಿಯಾಗಿರುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳು $10^k \times 9999$ ರ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿದ್ದು (k ಒಂದು ಋಣಾತ್ಮಕವಲ್ಲದ ಪೂರ್ಣಾಂಕ) ಅದು $10^k \times 999$ ಮತ್ತು $10^k \times 99$ ಮತ್ತು $10^k \times 9$ ಮೂರೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಅಪವರ್ತನವಾಗಿರಕೂಡದು. 9999 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣವು $9999 = 3^2 \times 11 \times 101$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, n ನಲ್ಲಿ ಇರುವ 9999 ರ ಅಪವರ್ತನವು ಈ ಸರಣಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದಾಗಿರಬೇಕು: 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ನಾವು ಮೇಲೆ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡಿದ n ನ ಯಾವುದೇ ಅಪವರ್ತನವೂ ಎರಡಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (n ನ ಅತಿಸಣ್ಣ ಬೆಲೆ 101 ಆಗಿದ್ದು, ಒಂದು ಮೂರಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ). ಇದು, $1 \le n \le 100$ ವ್ಯಾಪ್ತಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ನಾಲ್ಕಂಕಿ ಆವರ್ತಕಾಂಕವಿರುವ n ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ವೀಕ್ಷಣೆಯನ್ನು ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ. (*ಟೀಕೆ:* ನಾವೇನಾದರೂ ಇನ್ನೊಂದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯವರೆಗೆ, ಅಂದರೆ 101 ರವರೆಗೆ, ನಮ್ಮ ತನಿಖೆಯನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿದ್ದರೆ ನಮಗೆ ನಾಲ್ಕಂಕಿ ಆವರ್ತನಾಂಕದ ಉದಾಹರಣೆ ದೊರೆಯುತ್ತಿತ್ತು!)

(G) *n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಐದಂಕಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ?*

ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ನಾವು 99999 ರ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ನಮಗೆ 9999, 999, 99, ಅಥವಾ 9 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರದ 99999 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. 99999 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣವು $9999 = 3^2 \times 41 \times 271$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ n ನ ಬೆಲೆಗಳು ಆವಶ್ಯಕವಾಗಿ ಈ ಕೆಳಗೆ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಂದ ಭಾಗವಾಗುತ್ತದೆ: 41, $3 \times 41 = 123$, $3^2 \times 41 = 369$, 271, $3 \times 271 = 813$,$3^2 \times 271 = 2439$, 41×271, $3 \times 41 \times 271$, $3^2 \times 41 \times 271$. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಐದಂಕಿ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳು ನಮಗೆ ದೊರೆಯುತ್ತವೆ.

(H) *n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಭಿನ್ನರಾಶಿ 1/n ನ ದಶಮಾಂಶ ವಿಸ್ತರಣೆ ಆವರ್ತಕಾಂಕವು ಆರಂಕಿಯಾಗಿರುತ್ತದೆ?*

ಇದನ್ನು ಉತ್ತರಿಸಲು ನಾವು 999999 ರ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣವನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ನಮಗೆ 99999, 9999, 999, 99 ಅಥವಾ 9 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳಾಗಿರದ 99999 ರ ಅಪವರ್ತನಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. 99999 ರ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣವು $99999 = 3^2 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ ಆಗುವುದರಿಂದ, ಇಲ್ಲಿ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಸಂಖ್ಯೆ 7 ಮತ್ತು 13 ರ ಪ್ರವೇಶವಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ ಅಪವರ್ತನಗಳ ಸರಣಿ: 7, 13, 21, 39, 63, 77, 91, 117… ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು 10 ರ ಘಾತಾಂಕಗಳ ಅಪವರ್ತನಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿದಾಗ ನಮಗೆ ಬೇಕಿರುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳು ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಲು ನಿಮಗೇ ಬಿಡುತ್ತೇವೆ: 1/n ನ ಆವರ್ತನಾಂಕವು ಏಳು, ಎಂಟು, ಒಂಬತ್ತು ಹಾಗೂ ಹತ್ತು ಅಂಕಿಗಳಾಗುವ n ನ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಮೇಲಿನ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಅನುಸರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇದನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳಲು ನಿಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಅವಿಭಾಜ್ಯ ಅಪವರ್ತನೀಕರಣಗಳ

ಅಗತ್ಯವಿದ್ದು, ಅವು ಇಂತಿವೆ: $9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$, $99999999 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$, $999999999 = 3^4 \times 37 \times 333667$, $9999999999 = 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9091$. ನೀವು ಕೈಹಾಕಲಿರುವ ಸಾಹಸಕ್ಕೆ ಶುಭಮಸ್ತು!

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ ಮತ್ತು **ಪದ್ಮಪ್ರಿಯಾ ಶಿರಾಲಿ** ಅವರು ಋಷಿ ವ್ಯಾಲಿ (ಕೆ.ಎಫ್.ಐ.) ಯಲ್ಲಿನ ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರದ ಉಸ್ತುವಾರಿ ಹೊತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಇವರು ಪುಣೆ ನಗರದ ಹತ್ತಿರದಲ್ಲಿರುವ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ (ಕೆ.ಎಫ್.ಐ.) ಕಾರ್ಯನಿರತರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾದ ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸ: shailesh.shirali@gmail.com ಹಾಗೂ padmapriya.shirali@gmail.com