ಸಾಧಿಸಿ ತೋರುವುದು ಹೇಗೆ?

ಆಂಗ್ಲ ಮೂಲ: ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ

ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್,

ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು

ಕಳೆದ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾರಂಭವಾದ "ಸಾಧನೆ" ಅಂಕಣದ ಮುಂದುವರಿದ ಭಾಗವಿದು. ಈ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿಯೂ ಅಂಕಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಸಮಸ್ಯೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನವನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಇನ್ನೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳಬೇಕೆಂದರೆ, ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಉತ್ಪಾದಿಸುವ ವಿನ್ಯಾಸಗಳ ಅಧ್ಯಯನ.

ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ

1 + 2 = 3 ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದಿಂದ ನಮ್ಮಲ್ಲಿ ಕೆಲವೇ ಕೆಲವರು ಪ್ರಭಾವಿತರಾಗಬಲ್ಲರು. ನಾವದನ್ನು 4 + 5 + 6 = 7 + 8 ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣದ ಪಕ್ಕದಲ್ಲಿಟ್ಟು ಗಮನಿಸೋಣ. ನೋಡಿದವರ ಹುಬ್ಬೇರುತ್ತದೆ, 9 + 10 + 11 + 12 = 13+14 +15 ಎಂದು ಬರೆದ ಕೂಡಲೇ ಏರಿದ ಹುಬ್ಬು ಮತ್ತಷ್ಟು ಏರುತ್ತದೆ. ಈಗ ನಮ್ಮೊಳಗೆ ಅವಿತಿರುವ ಗಣಿತಜ್ಞನು ನಿಶ್ಚಿತವಾಗಿಯೂ ಇಂತಹ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ಸಂಬಂಧವೊಂದರ ಸ್ಪಷ್ಟ ಹೇಳಿಕೆಯೊಂದನ್ನು, ಜೊತೆಗೆ, ಅದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನೂ ಕೂಡ ಆಗ್ರಹಿಸುತ್ತಾನೆ. ಈ ಸವಾಲಿಗೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಿಸೋಣ.

ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನೊಮ್ಮೆ ಗಮನಿಸೋಣ. 1, 4, 9,... ಇದರಿಂದ n ನೇ ಸಮೀಕರಣದ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ n^2 ಎಂದು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣಗಳ ಎಡ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಬಲ ಬದಿಯಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ *ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು* (ಎಡ ಬದಿಯಲ್ಲಿ 2, 3, 4, ... ಹಾಗೂ ಬಲ ಬದಿಯಲ್ಲಿ 1, 2, 3, ...) ಗಮನಿಸಿದಾಗ ನಾವು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತಿರುವಂತೆ ತೋರುತ್ತದೆ:

> *ಪ್ರತಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, n^2 ಇಂದ ಮೊದಲಾಗುವ n + 1 ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಮುಂದಿನ n ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮ.*

n = 4 ಆದಾಗ, ನಮ್ಮ ಹೇಳಿಕೆಯು 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24 ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡೂ ಮೊತ್ತಗಳು 90 ಆಗುವುದರಿಂದ ಈ ಹೇಳಿಕೆ ಸತ್ಯ. ಆದರೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವು n ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಸತ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಾದರೂ ಹೇಗೆ?

ಈ ಹೇಳಿಕೆಗಳನ್ನು ಇನ್ನೂ ಕೂಲಂಕಷವಾಗಿ ಗಮನಿಸೋಣ. 9 + 10 + 11 + 12 ನ್ನು 13+14 +15 ಕ್ಕೆ ಸಮನ್ವಯಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬಲ ಬದಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ $9 = 3^2$ ಎಂದೂ, ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ $12 = 3^2 + 3$ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ. 16 + 17 + 18 + 19 + 20 ನ್ನು 21 + 22 + 23 + 24 ಕ್ಕೆ ಸಮನ್ವಯಿಸುವ ಹೇಳಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಬಲ ಬದಿಯ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ $16 = 4^2$ ಎಂದೂ, ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ $20 = 4^2 + 4$ ಎಂಬುದನ್ನೂ ಗಮನಿಸಿ. ಇದರಿಂದ ವಿನ್ಯಾಸವೊಂದು ಸ್ಫುಟವಾಯಿತು: n ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಸಮೀಕರಣದ ಎಡ ಬದಿಯಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆ n^2 ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ $n^2 + n$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಎಡ ಬದಿಯು n + 1 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಪದಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ನೀಡುವ ಪ್ರಖ್ಯಾತ

ನಿಯಮವನ್ನು ("ಮೊದಲ ಹಾಗೂ ಕೊನೆಯ ಪದಗಳ ಸರಾಸರಿ ಮತ್ತು ಪದಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಗುಣಲಬ್ಧ") ಬಳಸಿದಾಗ ಎಡ ಬದಿಯ n + 1 ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತ:

$$\frac{n^2 + (n^2 + n)}{2} \times (n + 1) = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2}.$$

ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಬಲ ಬದಿಯ ಮೊತ್ತದ ವಿಷಯವೇನು? ಇಲ್ಲಿನ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಎಡ ಬದಿಯ ಕೊನೆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮುಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಹೀಗಾಗಿ, ಅದು $n^2 + n + 1$ ಆಗಿದೆ. ಅಂತೆಯೇ, ಇದರ ಕೊನೆ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಮುಂದಿನ ಸಮೀಕರಣದ ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ. ಅಂದರೆ $(n + 1)^2$ ನ ಹಿಂದಿನ ಸಂಖ್ಯೆ, ಅಂದರೆ $(n + 1)^2 – 1 = n^2 + 2n$. ಇಲ್ಲಿನ ಒಟ್ಟು ಪದಗಳು n ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಈ ಸಮಾಂತರ ಶ್ರೇಢಿಯ ಮೊತ್ತ:

$$\frac{(n^2 + n + 1) + (n^2 + 2n)}{2} \times n = \frac{n(2n^2 + 3n + 1)}{2}$$
$$= \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{2}.$$

ಆಗುತ್ತದೆ. ಇದು ಮೊದಲ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಎರಡೂ ಮೊತ್ತಗಳು ಸಮ. ಇತಿ ಸಿದ್ಧಮ್!

ಅನೌಪಚಾರಿಕ ವಿಧಾನ

ಇದನ್ನು ಇನ್ನೂ ಅನೌಪಚಾರಿಕವಾಗಿ ಮಂಡಿಸುವ ರೀತಿಯೊಂದನ್ನು ನೋಡೋಣ. ಮೊದಲು, {9, 10, 11, 12} ಮತ್ತು {13, 14, 15} ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಮೊದಲ ಗಣದ ಕೊನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ 12 ನ್ನು ಮೂರು ಸಮಭಾಗಗಳಾಗಿಸಿದರೆ 4 ಸಿಗುತ್ತದೆ. (12/3 = 4). ಈಗ ಈ ಸಮಭಾಗಗಳನ್ನು ಈ ಗಣದ ಉಳಿದ ಪ್ರತಿಸಂಖ್ಯೆಗೂ (ಅಂದರೆ, 9, 10 ಮತ್ತು 11ಕ್ಕೆ) ಒಂದು ಭಾಗದಂತೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಕೂಡಿದರೆ, 9 + 4 = 13, 10 + 4 = 14, 11 + 4 =15 ದೊರೆಯುತ್ತವೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ 9 + 10 + 11 + 12 ಮತ್ತು 13 + 14 + 15 ಸಮವಾಗುತ್ತವೆ. ಇದೇ ರೀತಿ, {16, 17, 18, 19, 20} ಮತ್ತು {21, 22, 23, 24} ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ, ಮೊದಲ ಗಣದ ಕೊನೆ ಸಂಖ್ಯೆ 20ನ್ನು ನಾಲ್ಕು ಸಮಭಾಗವಾಗಿಸಿದಾಗ ದೊರೆಯುವ 5 ನ್ನು ಮೊದಲ ಗಣದ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿದರೆ, {16, 17, 18, 19, 20} ಗಣವು {21, 22, 23, 24} ಗಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿ 16 + 17 + 18 + 19 + 20 ಮತ್ತು 21 + 22 + 23 + 24 ಸಮವಾಗುತ್ತವೆ.

ಈಗ ಇದನ್ನು ಯಾವುದೇ n ಬೆಲೆಗೆ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಲು ಕೆಳಗಿನ ಎರಡು ಗಣಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ:

$$A = \{n^2,\ n^2 + 1,\ n^2 + 2,\ \ldots,\ n^2 + n\},$$
$$B = \{n^2 + n + 1,\ n^2 + n + 2,\ \ldots,\ n^2 + 2n\}.$$

A ಗಣದ ಅತಿ ದೊಡ್ಡ ಸಂಖ್ಯೆ $(n^2 + n)$ ಅನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡು ಅದನ್ನು n ಭಾಗಗಳಾಗಿಸಿದಾಗ n + 1 ದೊರೆಯುತ್ತದೆ. ಈ (n + 1) ಅನ್ನು A ಗಣದ ಉಳಿದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಕೂಡಿದರೆ A' ದೊರೆಯುತ್ತದೆ:

$$A' = \{n^2 + n + 1,\ n^2 + n + 2,\ \ldots,\ n^2 + 2n\},$$

ಇದು B ಗಣಕ್ಕೆ ಸಮವಾಗಿದೆ. ಇದರಿಂದ A ಗಣದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು B ಗಣದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಕ್ಕೆ ಸಮವೆಂದು ತಿಳಿಯುತ್ತದೆ.

ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ನಿತ್ಯೋಕ್ತಿಗಳು

ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಂಖ್ಯಾ ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು, ನಿತ್ಯೋಕ್ತಿಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲು ಸಮೃದ್ಧ ವಾತಾವರಣವೊಂದನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಡುತ್ತವೆ. ಈ ಸಾರವತ್ತಾದ ಕ್ಷೇತ್ರಕ್ಕೆ ಹದಿಹರೆಯದ ತರುಣ-ತರುಣಿಯರನ್ನು ಕರೆತಂದರೆ, ಕೊಂಚ ಕಾಲದಲ್ಲಿ ನೀವು ಹಿಂದೆಂದೂ ಕಂಡಿರದ, ಕೈಭರ್ತಿ ಅನ್ವೇಷಣೆಗಳನ್ನು ಕಾಣುವಿರಿ. ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆ (ಸಂಕ್ಷೇಪವಾಗಿ, ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ)ಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಯೆಂದರೆ, 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 = 6, 1 + 2 + 3 + 4 = 10… ಇವು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯಾಶ್ರೇಣಿಯ ಭಾಗಶಃ ಮೊತ್ತಗಳು 1, 1 + 2 = 3, 1 + 2 + 3 + 4 = 10…; ಅಂತಹ n ನೇ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ನಾವು T_n (n = 1, 2, 3,…) ಎಂದು ಸೂಚಿಸೋಣ.

$$T_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + (n-1) + n,$$

ಅಥವಾ ಸಂಕಲನ ಸಂಕೇತ ಬಳಸಿ ಸೂಚಿಸುವುದಾದರೆ:

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} k.$$

$$\begin{aligned} &T_1 = 1, \quad T_2 = 3, \quad T_3 = 6, \quad T_4 = 10, \\ &T_5 = 15, \quad T_6 = 21, \quad T_7 = 28, \\ &T_8 = 36, \quad T_9 = 45, \quad T_{10} = 55. \end{aligned}$$

ಎಲ್ಲರಿಗೂ ತಿಳಿದಿರುವಂತೆ,

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2},$$

ಇದೊಂದನ್ನೇ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಲು ಹಲವು ವಿಧಾನಗಳಿವೆ. ಇಲ್ಲಿ ನಾವು ಮಕ್ಕಳು ತಮ್ಮಷ್ಟಕ್ಕೇ ತಾವೇ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಕೆಲವು ಚಂದದ ಗುಣಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡೋಣ:

1. ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, $T_1 + T_2 = 4 = 2^2$; $T_6 + T_7 = 49 = 7^2$.
2. x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, 8x + 1 ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ವಿಲೋಮೋಕ್ತಿಯಾಗಿ, 8x + 1 ಒಂದು ಬೆಸ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂಬುದೂ ಸತ್ಯ. ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ: x ಒಂದು ಬೆಸ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, (x – 1)/8 ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.
   ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 3 ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ. 8 x 3 + 1 = 25 = 5^2 ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ. ಇದೇ ರೀತಿ 81 ಒಂದು ಬೆಸ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ (81 – 1)/8 = 10 ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ.
3. x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, 9x + 1 ಕೂಡ ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 3, 10 ಮತ್ತು 36ನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸಿ. ಇವುಗಳನ್ನು 9ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ 1ನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ 28, 91 ಮತ್ತು 325 ದೊರಕುತ್ತವೆ. ಇವೆಲ್ಲವೂ ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದಷ್ಟೆ ಬಾಕಿ ಇರುವುದು. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, ಇವು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳೇ: $28 = T_7$ $91 = T_{13}$ $325 = T_{25}$.

ಮುಂದಿನ ಸವಾಲೆಂದರೆ ಮಕ್ಕಳು ಮೇಲಿನ ಹೇಳಿಕೆಗಳಿಗೆ ಸಾಧನೆಗಳನ್ನು ಪೂರೈಸುವಂತೆ ಮಾಡುವುದಾಗಿದೆ. ನಾವೀಗ ಈ ವಿಷಯವನ್ನು ಕೈಗೆತ್ತಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

"ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ"

ಅನೇಕ ವಿಭಿನ್ನ ವಿಧಾನಗಳ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ. ಬಹುಶಃ, ಅತ್ಯಂತ ನೇರ ವಿಧಾನವು "ಶುದ್ಧ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ" ವಿಧಾನವನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ. ನಮಗೆ, $T_n = ½\, n(n + 1)$ ಎಂದು ತಿಳಿದಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ,

$$T_{n-1}+T_n = \frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}n(n+1) = \frac{1}{2}n(n-1+n+1)$$
$$= \frac{1}{2}n \times 2n = n^2.$$

ಆದ್ದರಿಂದ $(n - 1)$ ನೇ ಮತ್ತು n ನೇ ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು n ನೇ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದೆ.

ಇತರ ವಿಧಾನಗಳು: ಬೇರೆ ವಿಧಾನಗಳ ಹುಡುಕಾಟ ಮೋಜು ನೀಡುತ್ತದೆ. T_n ಎಂದರೆ ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂಬ ವ್ಯಾಖ್ಯಾನದ ಜೊತೆಗೆ, ಮೊದಲ n ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವು n^2 ಆಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸುಪರಿಚಿತವೂ, ಪದೇ-ಪದೇ ಬಳಕೆಯಾಗುವ ಆದ ತಥ್ಯಾಂಶವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ವಿಧಾನ ಇದಾಗಿದೆ. ಈ ಎರಡು ತಥ್ಯಾಂಶಗಳೊಂದಿಗೆ, ಪ್ರತಿ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯೂ ಎರಡು ಕ್ರಮಾನುಗತ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವೆಂಬ (ಉದಾ.: $5 = 2 + 3$) ಮತ್ತೊಂದು ಸರಳ ತಥ್ಯವು ಒಂದು ಅಂದವಾದ ಸಾಧನೆಗೆ ಎಡೆಮಾಡುತ್ತದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಆವರಣ ಚಿಹ್ನೆಗಳನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಕೊಂಚ ವಿಭಿನ್ನ ಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಕೂಡುವುದಾಗಿದೆ. ನಾವಿದನ್ನು $n = 3$ ಗೆ ವಿಶದಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ:

$$\begin{aligned} 3^2 &= 1 + 3 + 5 = (0 + 1) + (1 + 2) + (2 + 3) \\ &= (0 + 1 + 2) + (1 + 2 + 3) \\ &= T_2 + T_3. \end{aligned}$$

ಇದೇ ರೀತಿ, $n = 5$ ಆದರೆ,

$$\begin{aligned} 5^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 \\ &= (0 + 1) + (1 + 2) + (2 + 3) + (3 + 4) + (4 + 5) \\ &= (0 + 1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) \\ &= T_4 + T_5. \end{aligned}$$

ವಿವರಗಳನ್ನೇನೂ ನಿರೂಪಿಸದಿದ್ದರೂ ಇಂತಹ ಸಂಕಲಕಗಳ ಪುನರ್ಜೋಡಣೆ ಸದಾ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟವಿದೆ. ಆದರೆ ಈ ವಿಚಾರವನ್ನು ಸಾಂಕೇತಿಕವಾಗಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸುವುದನ್ನು ನೋಡಲು ಬಯಸುವವರಿಗೆ ಇದರ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಇಂತಿದೆ:

$$
\begin{aligned}
n^2 = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) &= \sum_{k=1}^{n}\left((k-1)+k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k-1) + \sum_{k=1}^{n}k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}k + \sum_{k=1}^{n}k \\
&= T_{n-1} + T_n.
\end{aligned}
$$

ಚಿತ್ರಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ: ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಚಿತ್ರ ಬಳಸಿ ಅಭಿವ್ಯಕ್ತಿಸುವ ವಿಧಾನವೂ ಇದೆ. ನಾವು T_{n-1} ಮತ್ತು T_n ಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 1ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಎರಡು ಮೆಟ್ಟಿಲಿನಾಕಾರದ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳ ವಿಸ್ತೀರ್ಣಗಳನ್ನಾಗಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುತ್ತೇವೆ (n = 6 ಆದಾಗಿನ ಬಹುಭುಜಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 1 ರಲ್ಲಿ ನೀಡಲಾಗಿದೆ). ಈಗ ಇವೆರಡೂ ಅದೆಷ್ಟು ಒಪ್ಪವಾಗಿ ಒಂದುಗೂಡಿ ಒಂದು 6 x 6 ಚೌಕವೊಂದನ್ನು ರಚಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. n = 6 ಎಂಬ ವಿಶೇಷ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಮಾತ್ರ ಈ ರಚನೆಯನ್ನು ತೋರಿಸಿದ್ದರೂ, ಇದೇ ಯೋಜನೆ n ನ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಕೆಲಸಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಲು ಕಷ್ಟವಾಗಲಾರದು.

"ತ್ರಿಭುಜ ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದನ್ನು 8ರಿಂದ ಗುಣಿಸಿ, ಅದಕ್ಕೆ 1 ನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ"

ಇದರ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಸಾಧನೆ ಇಂತಿದೆ: $T_n = \frac{1}{2} n(n + 1)$ ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇಂತಾಗಿ, x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ. ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $x = \frac{1}{2} n(n + 1)$ ಎಂದಾಗಬೇಕು.

<u>ಚಿತ್ರ 1: "ಏಕೆ" $T_5 + T_6 = 6^2$ ಆಗಬೇಕು ಎಂಬುದರ ವಿಶದೀಕರಣ</u>

ಇದನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡರೆ,

$$
\begin{aligned}
8x + 1 = 8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 1 &= 4n(n+1) + 1 \\
&= 4n^2 + 4n + 1 \\
&= (2n+1)^2.
\end{aligned}
$$

ಎಂದಾಗುತ್ತದೆ.

ವಿಲೋಮ ಹೇಳಿಕೆಯ ಸಾಧನೆ: 8x + 1 ಒಂದು ಬೆಸ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ ಯಾವುದೋ ಒಂದು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, $8x + 1 = (2n + 1)^2$ ಆಗಿರಬೇಕು. ಆದ್ದರಿಂದ

$$
x = \frac{(2n+1)^2 - 1}{8} = \frac{4n^2 + 4n}{8} = \frac{n(n+1)}{2} = T_n.
$$

ಈ ಗುಣವು ದತ್ತ ಸಂಖ್ಯೆ x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯೋ, ಅಲ್ಲವೋ ಎಂದು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಸರಳ ವಿಧಾನವೊಂದನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ. (ಉದಾಹರಣೆ: $8 \times 3003 + 1 = 24025 = 155^2$ ಆದ್ದರಿಂದ, 3003 ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ)

ಚಿತ್ರಾತ್ಮಕ ವಿಧಾನ: ಮೇಲಿನಂತೆಯೇ, "x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, 8x + 1 ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ" ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಂದರವಾಗಿ ನಿರೂಪಿಸುವ ವಿಧಾನವೊಂದಿದೆ. x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ

ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, x = n(n + 1)/2 ಎಂದು ನಮಗೆ ತಿಳಿದಿದೆ. ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, ಯಾವುದಾದರೂ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆ n ಗೆ, 2x = n(n + 1) ಆಗುತ್ತದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ನಾವು 2x ನೊಂದಿಗೆ n x (n + 1) ಅಳತೆಯ ಆಯತವೊಂದನ್ನು ಜೋಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಈ ಆಯತದ ಉದ್ದವು ಅದರ ಅಗಲಕ್ಕಿಂತ ಒಂದು ಮಾನದಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ (ಈ ಅಂಶವು ನಾವಿಷ್ಟರಲ್ಲೇ ನೋಡಲಿರುವ ಫಲಿತಾಂಶಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದೆ). ಇಂತಹ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ (n = 3 ಆದಾಗ) ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಟ್ಟಿಗೆ ಜೋಡಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ಚಿತ್ರ 2: "ಏಕೆ" $8T_3 + 1$ ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಬೇಕು ಎಂಬುದರ ವಿಶದೀಕರಣ

ಈ ನಾಲ್ಕು ಆಯತಗಳು ಮಧ್ಯದ 1 x 1 ಉದ್ದಗಲದ ಚೌಕವೊಂದನ್ನು (4 – 3 = 1, ಆದ್ದರಿಂದ) ಅಚ್ಚುಕಟ್ಟಾಗಿ ಸುತ್ತುವರಿಯುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು $8T_3 + 1$ ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ನೋಡಬಹುದಾಗಿದೆ. ವಾಸ್ತವವಾಗಿ, $8T_3 + 1 = (4 + 3)^2$. n ಬೆಲೆ ಅನಿರ್ಬಂಧಿತವಾಗಿದ್ದಾಗ, $8T_3 + 1 = ((n + 1) + n)^2$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಮೂರನೇ ಗುಣ

x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, 9x + 1 ಕೂಡ ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆ ಎಂದು ತೋರಿಸುವುದಷ್ಟೇ ಉಳಿದಿರುವುದು. ಇದರ ಸಾಧನೆಯನ್ನು ಸುಳಿವಿನ ಸಮೇತ ನಿಮಗೇ ಬಿಡುತ್ತಿದ್ದೇನೆ, (*ಸುಳಿವು:* n ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, 8n + 1 ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ, ವಿಲೋಮವಾಗಿ, 8n + 1 ಒಂದು ವರ್ಗಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ, n ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.) ಕೆಳಗಿನ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನಿಮಗೆ ಸವಾಲಿನ ರೂಪದಲ್ಲಿ ನೀಡಿ ಮುಗಿಸುತ್ತೇನೆ:

> *a = 9 ಮತ್ತು b = 1 ಎಂಬ ಜೋಡಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ x ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ ax + b ಕೂಡ ಒಂದು ತ್ರಿ-ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಗುಣವಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ಈ ಗುಣವುಳ್ಳ ಎಲ್ಲಾ (a, b) ಯುಗ್ಮಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ.*

ಶೈಲೇಶ್ ಶಿರಾಲಿ ಅವರು ಪುಣೆಯ ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಶಾಲೆಯ (KFI) ನಿರ್ದೇಶಕರೂ,ಆಂಧ್ರಪ್ರದೇಶದ ಋಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಶಾಲೆಯ "ಸಮುದಾಯ ಗಣಿತ ಕೇಂದ್ರ"ದ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರೂ ಆಗಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಭಾರತದಲ್ಲಿ "ಮ್ಯಾಥ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್ ಆಂದೋಲನ"ದೊಂದಿಗೆ ಗಾಢವಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಾರೆ. ಇವರು ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ ಅನೇಕ ಗಣಿತ ಪುಸ್ತಕಗಳನ್ನು ಬರೆದಿದ್ದು, *ರೆಜ಼ನನ್ಸ್* ಮತ್ತು *ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆಂಗಲ್ಸ್* ನಿಯತಕಾಲಿಕಗಳ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿಯೂ ಸೇವೆಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಇವರನ್ನು ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾದ ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸ:shailesh.shirali@gmail.com