ಒಗಟುಗಳ ಮೂಲಕ ಕೊನೆಯಿರದ ಗಣಿತ ಕಲಿಕೆ

ಆಂಗ್ಲ ಮೂಲ: ಶಿಖಾ ಠಕ್ಕರ್ ಮತ್ತು ರಾಸ್ಸಿ
ಕನ್ನಡಾನುವಾದ: ವಿಶ್ವನಾಥ್
(ಚೈತನ್ಯ ಅಸೋಸಿಯೇಟ್ಸ್, ಮೈಸೂರು)

ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದಿರುವುದೂ ಒಳ್ಳೆಯ ಪರಿಹಾರವೇ

ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಗಣಿತಕ್ಷೇತ್ರದ ಗೌಣ ಭಾಗದಂತೆ, ಅದರ ತಿರುಳಲ್ಲವೆಂಬಂತೆ ಭಾವಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ಕೆಲವೊಮ್ಮೆ ಪರಿಹಾರವಿರದ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಕಾಣಬಹುದಾಗಿರುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಭಾವನೆಯು ಸಂಬಂಧಿಸಿರಬಹುದು. ಗಣಿತದ ಎಲ್ಲಾ ಸಮಸ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಪರಿಹಾರ ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದು ಗಣಿತದೊಂದಿಗೆ ವ್ಯವಹರಿಸುವವರಲ್ಲಿ ಹಾಗೂ ಶಾಲಾ ಮಕ್ಕಳಲ್ಲಿ ಮನೆಮಾಡಿರುವ ಸಾರ್ವತ್ರಿಕ ನಿರೀಕ್ಷೆಯೇ ಆಗಿದೆ. ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಕೆಲವು ಸಾರಭೂತ ಗಣಿತೀಯ ಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಕಲಿಯಲು ಇಂತಹ ಒಗಟುಗಳು ಒಂದು ಮುಖ್ಯಮೂಲವೇ ಆಗಬಲ್ಲದು ಎಂದು ಪ್ರತಿಪಾದಿಸುತ್ತೇವೆ. ಪರಿಹಾರವಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಗೆ ಮತ್ತು ಕಲಿಕೆಗೆ ಎಷ್ಟು ಮುಖ್ಯವೋ, ಅಷ್ಟೇ ಪರಿಹಾರವಿರದ ಸಮಸ್ಯೆಗಳೂ ಮುಖ್ಯ ಎಂಬ ನಮ್ಮ ವಾದವನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನಾವು ಆದರ್ಶಪ್ರಾಯ ಉದಾಹರಣೆಯೊಂದನ್ನು ಮಂಡಿಸುತ್ತೇವೆ.

ಪರಿಚಯ

ಹಲವು ಬಾರಿ ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಗಣಿತ ತರಗತಿಗಳಲ್ಲಿ ಆಟದಂತೆಯೋ, ವಾಡಿಕೆಯ ಗಣಿತದಿಂದ ಬಿಡುವಿಗಾಗಿ ಇರುವ ಉಪಾಯದಂತೆಯೋ ಪರಿಗಣಿಸುತ್ತೇವೆ. ಉದ್ದೇಶವಾದರೂ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಯಾರು, ಎಷ್ಟು ಬೇಗ ಒಗಟನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುತ್ತಾರೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದು ಅಥವಾ ಅದನ್ನು ಅತಿಕ್ಷಿಪ್ರವಾಗಿ ಹಾಗೂ ಚೊಕ್ಕವಾಗಿ ಬಗೆಹರಿಸಲು ಇರುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವುದೋ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇವುಗಳ ಸ್ವರೂಪ ಗಣಿತೀಯವೆಂದು ತಿಳಿದಿದ್ದೂ, “ಅಪ್ಪಟ ಗಣಿತಕ್ಕೂ ಇವಕ್ಕೂ ಸಂಬಂಧ” ಇದೆಯೆಂಬಂತೆ ನಾವು ನೋಡುವುದೇ ಇಲ್ಲ.

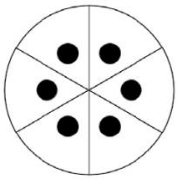
ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಅನೇಕ ಒಗಟುಗಳು ಗಣಿತದ ಎಲ್ಲಾ ಎಳೆಗಳನ್ನೂ, ಎಲ್ಲಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿರುತ್ತವೆ: ಸಾಧನೆ, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣ, ವಿನ್ಯಾಸ-ಗುರುತಿಸುವಿಕೆ, ಹೇಳಿಕೆಯೊಂದರ ಸತ್ಯವನ್ನು ಒಪ್ಪಿಕೊಂಡು ಅದರ ವ್ಯತಿರಿಕ್ತ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ಸಾರುವುದು, ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದಿರುವುದು, ಇವೇ ಮೊದಲಾದವು. ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಭಾಗವಹಿಸಿದವರ ಜೊತೆ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಚಾರಗಳ ತಿರುಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸಲು ಬಳಸಿಕೊಂಡ ಒಗಟೊಂದನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ನಾಲ್ಕನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಹಿಡಿದು ಬಿ.ಎಡ್. ಪದವೀಧರರವರೆಗೂ ಜನ ಭಾಗವಹಿಸಿದ್ದರು. ಈ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಿಗಾಗಿ ನಾವು ಅನೌಪಚಾರಿಕ ಸಮಸ್ಯಾ-ಪರಿಹಾರದ ವಿಧಾನಗಳನ್ನು ಆಗ್ರಹಿಸುವಂತಹ ಕೆಲವು ಒಗಟುಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಿಕೊಂಡೆವು.

ಇಲ್ಲಿ ನಾವು “ಅನೌಪಚಾರಿಕ” ಎನ್ನುವುದು ಈ ಒಗಟುಗಳ ಪರಿಹಾರ ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಯಾವುದೇ ಸರಳ ಸ್ವರೂಪದ ಗಣಿತಕ್ಕಾಗಲೀ, ಸುನಿಶ್ಚಿತ ಪಠ್ಯಕ್ಕಾಗಲೀ, ಕ್ರಮಾವಳಿಗಾಗಲೀ ಸೀಮಿತವಾಗಿರುವ ಅಗತ್ಯವಿಲ್ಲ ಎಂಬುದಷ್ಟೇ ಆಗಿದೆ. ಗಣಿತದ ಕೆಲವು ಮುಖ್ಯ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಲಿಯಲು ಅವಕಾಶ ಕಲ್ಪಿಸುವಂತೆ ಈ ಒಗಟುಗಳಿರಬೇಕು ಎಂಬುದು ಕೂಡ ನಮ್ಮ ಪರ್ಯಾಲೋಚನೆಯ ಪ್ರಧಾನ ಉದ್ದೇಶವಾಗಿತ್ತು.

ಒಗಟು::**ವೃತ್ತಗಳು ಮತ್ತು ಕಾಯಿಗಳು**.

ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿರುವ ಒಗಟನ್ನು ನಾವು [1, ಪು. 125] ರಿಂದ ತೆಗೆದುಕೊಂಡಿದ್ದೇವೆ.

> *ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು ಆರು ವಲಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿ ವಲಯದಲ್ಲೂ ಒಂದು ಕಾಯಿ / ಗುಂಡಿಯಿದೆ (ಚಿತ್ರ 1ನ್ನು ನೋಡಿ). ವಲಯದಿಂದ ವಲಯಕ್ಕೆ ಜಿಗಿಯುತ್ತಾ ಎಲ್ಲಾ ಆರು ಕಾಯಿಗಳನ್ನೂ ಒಂದೇ ವಲಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಬೇಕು. ಹಾಗೆ ಮಾಡುವಾಗ ಈ ಎರಡು ನಿಯಮಗಳಿಗೆ ನಾವು ಬದ್ಧರಾಗಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ: (1) ಪ್ರತಿ ಜಿಗಿತದಲ್ಲೂ ಕಾಯಿಯನ್ನು ಅದರ ಪಕ್ಕದ ವಲಯಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ನಡೆಸಬಹುದು (2) ಪ್ರತಿ ನಡೆಯಲ್ಲೂ ಎರಡು ಜಿಗಿತಗಳಿಗೆ ಅವಕಾಶವಿದೆ.*



ಚಿತ್ರ 1. ವೃತ್ತವನ್ನು ಆರು ವಲಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿ ವಲಯದಲ್ಲೂ ಒಂದೊಂದು ಕಾಯಿಯಿದೆ.

ಈ ಒಗಟಿನ ಪ್ರಧಾನ ಲಕ್ಷ್ಯವು "ಅನುರೂಪತೆ" ಮತ್ತು "ಬದಲಾಗದ ಲಕ್ಷಣ"ಗಳನ್ನು ಎತ್ತಿ ತೋರುವುದಾಗಿದೆ. ಈ ಒಗಟಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲದಿರುವುದೇ ಪರಿಹಾರವಾಗಿದೆ! ಈ ಹೇಳಿಕೆಯನ್ನು ಹೀಗೆ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಬಹುದು:

ವಲಯಗಳನ್ನು ಒಂದರಿಂದ ಆರರವರೆಗೆ ಹೆಸರಿಸಿ. ಪ್ರತಿ ವಲಯದ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಆ ವಲಯದಲ್ಲಿರುವ ಕಾಯಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿ. ಈ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತ s ಆಗಿರಲಿ. ಈ ಮೊತ್ತವನ್ನು "ಅಂಕ" ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಆಟವನ್ನು ಆರಂಭಿಸುವಾಗ ಪ್ರತಿ ವಲಯದಲ್ಲೂ ಒಂದೊಂದು ಕಾಯಿಯಿದ್ದು, ಅಂಕ, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ ಆಗಿದೆ.

ಒಂದು ನಡೆಯ ಬಳಿಕ ಒಂದು ಕಾಯಿ 2ರಿಂದ 3ಕ್ಕೆ ಹಾಗೂ ಮತ್ತೊಂದು ಕಾಯಿ 4ರಿಂದ 5ಕ್ಕೆ ಜಿಗಿದಿದೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ, ಹೊಸ ಅಂಕ, $1 + 0 + (2×3) + 0 + (2×5) + 6 = 23$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, ಅಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ 2 ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದರ ಬಗ್ಗೆ ಕೊಂಚ ಯೋಚಿಸಿದರೆ, ಕಾಯಿಗಳನ್ನು ನೀವು ಹೇಗೇ ನಡೆಸಿದರೂ ಅಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯುವಿರಿ. ಇನ್ನೂ ನಿರ್ದಿಷ್ಟವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಅಂಕಗಳ ವ್ಯತ್ಯಾಸ ಯಾವಾಗಲೂ 0, 2, 4 ಅಥವಾ 6 ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

s ನ ಆರಂಭಿಕ ಬೆಲೆ 21 ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಪ್ರತಿ ಹಂತದಲ್ಲೂ s ನ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಕಾಯಿಗಳೆಲ್ಲವೂ ಒಂದೇ ವಲಯಕ್ಕೆ ಸೇರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಾಗ s ನ ಬೆಲೆಯು 6ರ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಬೇಕಿದ್ದು, ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಈ ಒಗಟಿಗೆ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈ ಒಗಟಿಗೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದಿರುವುದು ನಮ್ಮ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕೆರಳಿಸಿತು. ಈ ರೀತಿ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರವಿರದ ಗಣಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಶಿಕ್ಷಕರು ಹಾಗೂ ಮಕ್ಕಳು ಹೇಗೆ ನೋಡುತ್ತಾರೆ ಎಂದು ಯೋಚಿಸುವಂತಾಯಿತು. ಹಲವು ಬಾರಿ ಇಂತಹ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ತಪ್ಪು ಎಂದೋ, ನೀಡಲಾದ ಮಾಹಿತಿ ಅಪರ್ಯಾಪ್ತವೆಂದೋ ತಿರಸ್ಕರಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಆದರೆ, "ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದಿರುವುದೂ ಪರಿಹಾರವೇ" ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯುವುದು ಗಣಿತದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮತ್ತು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಆಸಕ್ತಿಪ್ರದವೂ, ಮುಖ್ಯವೂ ಆಗಿದೆ.

ಜೊತೆಗೆ, ಸಮಸ್ಯೆಯೊಂದಕ್ಕೆ ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲ ಎಂದು ಘೋಷಿಸಲು ಅಂತಹ ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ "ಸಾಧನೆ"ಯೊಂದು ಇದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ.

ನಾವು ಪರಿಶೀಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಈ ಎರಡೂ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಮುಖ್ಯ ವಿಚಾರಗಳು: ಮೊದಲಿಗೆ "ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲದಿರುವುದ"ನ್ನು ಸಿಂಧವೆಂದು ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಅಂಗೀಕರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಎರಡನೆಯದಾಗಿ, ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರ ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಘೋಷಿಸಲು "ಸಾಧನೆ"ಯ ಅಗತ್ಯವಿದೆ.

ಈ ಎರಡೂ, ಸದ್ಯಕ್ಕೆ ಗಣಿತ ಬೋಧನೆಯನ್ನು ಕುರಿತಾದ ನಮ್ಮ ತಿಳುವಳಿಕೆಯ (ಅದರಲ್ಲೂ ವಿಶೇಷವಾಗಿ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲಾ ಹಂತದಲ್ಲಿ) ಭಾಗವಾಗಿಲ್ಲ. "ಸಾಧನೆ"ಗಳನ್ನು ಅಮೂರ್ತವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿರುವುದರಿಂದ ಶಾಲಾ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಅವುಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು ಬಹಳ ವಿಳಂಬವಾಗುತ್ತದೆ. ಅದಲ್ಲದೆ, ಪರಿಹಾರವಿರದ ಅಥವಾ ಅನೇಕ ಪರಿಹಾರಗಳಿರುವ ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಚರ್ಚಿಸುವುದು ವಿರಳ.

ಈ ಪರಿಗಣನೆಗಳನ್ನು ಮನಸ್ಸಿನಲ್ಲಿ ಇಟ್ಟುಕೊಂಡು ಒಗಟೊಂದನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕುವ ಕಾರ್ಯದಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದಾಗ ಅಂತಹ ಒಗಟು ಒಳಗೊಳ್ಳಬಹುದಾದ ವಿವಿಧ ಚರಾಂಶಗಳ ಬಗ್ಗೆ ನಾವು ತಲೆಕೆಡಿಸಿಕೊಂಡಿದ್ದಲ್ಲದೆ, ಅವುಗಳನ್ನು ಬದಲಿಸಿದರೆ ಸಮಸ್ಯೆ ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಕುರಿತು ಸಹ ಚಿಂತಿಸಿದೆವು. ಈ ಚರಾಂಶಗಳು ಕಾಯಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬಹುದು ಅಥವಾ ಅದರ ಸ್ಥಾನಗಳಾಗಿರಬಹುದು, ಇಲ್ಲವೇ ಜಿಗಿತಗಳಾಗಿರಬಹುದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಮೇಲಿನ ಒಗಟಿನಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿ ವಲಯದಲ್ಲೂ ಒಂದು ಕಾಯಿಯಿದೆ. ಬದಲಾಗಿ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕಾಯಿಗಳಿದ್ದರೆ ಏನಾಗಬಹುದು? ಪ್ರತಿ ನಡೆಯಲ್ಲಿನ ಜಿಗಿತಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿದರೆ ಏನಾಗಬಹುದು?

ನಾವು ಈ ಬದಲಾವಣೆಗಳನ್ನು ಮಾಡಿನೋಡಿದಾಗ ಮೇಲಿನ ಎರಡೂ ಅಷ್ಟೇನೂ ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವಾಗಿ ಕಾಣಲಿಲ್ಲ. ಏಕೆಂದು ವಿವರಿಸೋಣ. ಪ್ರತಿ ವಲಯದಲ್ಲೂ ಹೆಚ್ಚಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಇಡುವುದರಿಂದ ಒಗಟು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸವಾಲನ್ನೇನೂ ಒಡ್ಡದೆ, ಬುದ್ಧಿಯನ್ನು ಬಳಲಿಸುವ ಸಮಸ್ಯೆಯಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡುತ್ತದಷ್ಟೇ. ಜೊತೆಗೆ, ತುಂಬಾ ಚಿಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ಒಗಟಿನ ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಯು ಸೂಕ್ತವಾದದ್ದೂ ಅಲ್ಲ (ನಮ್ಮ ಗುರಿ ಚಿಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳ ಕಡೆಗಿತ್ತು; ಏಕೆಂದರೆ, "ಸಾಧನೆ" ಅಥವಾ "ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುವುದು" ಎಂಬ ವಿಚಾರಗಳು ಇನ್ನೂ ಅವರಿಗೆ ಪರಿಚಯವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ). ಈ ವಿಸ್ತರಣೆಗಳಿಂದ ಒಗಟು ಬಿಡಿಸಲು ಯತ್ನಿಸುವವರನ್ನು ಇನ್ನೂ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ನಮಗೆ ಸಂದೇಹವಿತ್ತು.

ಎರಡನೆಯ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಜಿಗಿತಗಳು ಸಮ ಅಥವಾ ಅಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾಗಿರಬಹುದು: ಅಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳು ಒಂದು ಜಿಗಿತಕ್ಕೆ ಸದೃಶವಾಗಿದ್ದು, ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳು ಎರಡು ಜಿಗಿತಗಳಿಗೆ ಸದೃಶವಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಇದರಿಂದ, ಇನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಒಗಟಾಗಿ ಉಳಿಯುವಂಥದ್ದು ಏನೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಅದರೆ, ವೃತ್ತದಲ್ಲಿನ *ವಲಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ*ಯನ್ನು ಬದಲಿಸುವುದು ನಮಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಆಸಕ್ತಿಪ್ರದವಾಗಿ ಕಂಡುಬಂದಿತು. n ಎಂಬುದು 2 ಮತ್ತು 10 ರ ನಡುವಿನ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಲಿ; ವೃತ್ತವನ್ನು n ವಲಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದರೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂದು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ನೋಡಿದೆವು. ಬಳಿಕ ವಿನ್ಯಾಸವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಲು ಯತ್ನಿಸಿದೆವು. ಈ ಒಗಟಿನ ವಿಸ್ತರಣೆಯ ವಿಷಯವಾಗಿ ನಾವು ಕಾರ್ಯನಿರತರಾಗಿದ್ದಾಗ ಕೆಲವು ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕ ಗಣಿತೀಯ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸಿದೆವು. ಇದು ಆಟವಾಡುವ, ಸಾಮಾನ್ಯೀಕೃತ ವಿನ್ಯಾಸವೊಂದನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ, ಪರಿಹಾರವಿರುವ n ಬೆಲೆಗಳು ಹಾಗೂ ಪರಿಹಾರವಿರದಿರುವ n ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವುವು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುವ, ಪ್ರತಿ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲೂ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುವ ಇವೇ ಮೊದಲಾದ

ವಿಷಯಗಳನ್ನು ಇದು ಒಳಗೊಂಡಿತ್ತು. ಗಣಿತೀಯವಾಗಿ ನಮ್ಮನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಎಲ್ಲಾ ಅಂಶಗಳ ಅನುಭವವನ್ನೂ ಇಲ್ಲಿಯೇ ನಾವು ಪಡೆದಿದ್ದು.

ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮಸ್ಯೆ ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪರಿಹಾರಗಳು

ಬೇರೆ -ಬೇರೆ ವಯಸ್ಸಿನ ಮಕ್ಕಳಿಗೆ ನಾವು ಈ ಪರಿವರ್ತಿತ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೀಡಿ, ಬಳಿಕ, ಅವರು ಬಗೆಹರಿಸಲು ಬಳಸಿದ ತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಪರಿಶೀಲಿಸಿದೆವು. ನಾವು ನೀಡಿದ ಸಮಸ್ಯೆ ಹೀಗಿತ್ತು:

ವೃತ್ತವೊಂದನ್ನು n ವಲಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಲಾಗಿದ್ದು, ಪ್ರತಿ ವಲಯದಲ್ಲೂ ಒಂದು ಕಾಯಿಯನ್ನು ಇಡಲಾಗಿದೆ. ಜಿಗಿತಗಳ ಮೂಲಕ ನೀವು ಅವುಗಳೆಲ್ಲವನ್ನೂ ಒಂದೇ ವಲಯಕ್ಕೆ ತರಬೇಕಿದೆ. ನೀವು ಅನುಸರಿಸಬೇಕಿರುವ ನಿಯಮಗಳೆಂದರೆ: 1) ಒಂದು ಜಿಗಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾಯಿಯನ್ನು ಪಕ್ಕದ ವಲಯಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ನಡೆಸಬಹುದು 2) ಪ್ರತಿ ನಡೆಯು ಎರಡು ಜಿಗಿತಗಳಿಂದ ಆಗಿದೆ. ಹಾಗಾದರೆ, ನಡೆಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ನ ಯಾವ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ನಾವು ಎಲ್ಲಾ ಕಾಯಿಗಳನ್ನೂ ಒಂದೇ ವಲಯಕ್ಕೆ ತರಲು ಸಾಧ್ಯ? ಹಾಗೆ ಹೇಳಲು ಕಾರಣವೇನು?

ವಿವಿಧ ತರಗತಿಗಳ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಒಂದು ದೊಡ್ಡ ಗುಂಪಿನೊಂದಿಗೆ ಒಡನಾಡಲು ನಮಗೆ ಅವಕಾಶ ದೊರೆತಿದ್ದು ವರವಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿತು. ಇಂತಹ ಅವಕಾಶವು ನಮಗೆ ಎರಡು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒದಗಿಬಂತು.

ಮುಂಬೈ ನಗರದ ಹೋಮಿ ಭಾಭಾ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಿಕ್ಷಣ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಆಚರಿಸಲಾದ ರಾಷ್ಟ್ರೀಯ ವಿಜ್ಞಾನ ದಿವಸದ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮವು ಅಂತಹ ಒಂದು ಸಂದರ್ಭವಾಗಿತ್ತು. ಮತ್ತೊಂದು “ಚಾಯ್ ಅಂಡ್ ವೈ” ಎಂಬ ಜನಪ್ರಿಯ ಉಪನ್ಯಾಸ ಮಾಲಿಕೆಯ ಸಂದರ್ಭವಾಗಿತ್ತು (ಈ ಸಾರ್ವಜನಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಟಾಟಾ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಶೋಧನಾ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಸದಸ್ಯರು ನಡೆಸಿಕೊಡುತ್ತಾರೆ. ಪ್ರತಿ ತಿಂಗಳ ಎರಡನೇ ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕನೇ ಭಾನುವಾರಗಳಂದು ಕ್ರಮವಾಗಿ ಜುಹು ಕಡಲತೀರದ ಪೃಥ್ವಿ ಥಿಯೇಟರ್ ಹಾಗೂ ಮಾಟುಂಗ ಬಡಾವಣೆಯ ರುಪಾರೆಲ್ ಕಾಲೇಜಿನಲ್ಲಿ ನಡೆಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮದ ಮೂಲಭೂತ ಗುರಿಯು ಗಣಿತ ಹಾಗೂ ವಿಜ್ಞಾನಗಳನ್ನು ಜನಪ್ರಿಯಗೊಳಿಸುವುದಾಗಿದೆ). ಈ ಕಾರ್ಯಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ಮಕ್ಕಳಿಂದ ಹಿಡಿದು ವಯಸ್ಕರವರೆಗೆ (ಗಣಿತಜ್ಞರು, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರೂ ಒಳಗೊಂಡಂತೆ) ಎಲ್ಲರೂ ಪಾಲ್ಗೊಂಡಿದ್ದರಿಂದ ಒಡನಾಡಲು ನಮಗೆ ದೊರೆತ ಹರಹು ನಿಡಿದಾಗಿತ್ತು ಎನ್ನಬಹುದು.

“ಚಾಯ್ ಅಂಡ್ ವೈ” ಕಾರ್ಯಕ್ರಮದ ಕೆಲವು ಚಿತ್ರಗಳು

ಬೇರೆ-ಬೇರೆ ಹಂತದ ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳಿಂದ ಹೊಮ್ಮುವ “ಸಾಧನೆ”ಯ ರೀತಿಗಳನ್ನು ನೋಡಲು ನಾವು ಉತ್ಸುಕರಾಗಿದ್ದೆವು. ನಾವಿಲ್ಲಿ ಪ್ರಾತಿನಿಧಿಕವೂ, ಆಸಕ್ತಿದಾಯಕವೂ ಆದ ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳನ್ನು ನಿಮ್ಮೊಂದಿಗೆ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ.

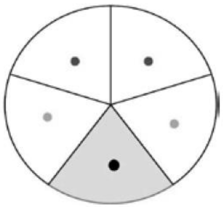
ಎಲ್ಲರಿಗೂ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮಯ ದೊರೆತಿದ್ದರಿಂದ, ನಾಲ್ಕನೇ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳು ಕೂಡ ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕೃತ ವಿನ್ಯಾಸವನ್ನು ಗುರುತಿಸುವಂತೆ ಆಯಿತು. ಅಸಮ ಹಾಗೂ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ n ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಪರಿಹಾರ ಇರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಅವರು ಕಂಡುಕೊಂಡರು. ಆದರೆ, ಅವರಲ್ಲಿ ಅನೇಕರು ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ (ಉದಾಹರಣೆಗೆ,n=10ಕ್ಕೆ) ಪರಿಹಾರವಿರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿಶ್ವಾಸಾತ್ಮಕವಾಗಿ ಹೇಳಲು ಸಮರ್ಥರಾಗಲಿಲ್ಲ. ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೂ ಪರಿಹಾರ ಇದೆ ಎಂದು ಹೇಗೆ ಹೇಳುತ್ತೀರಿ ಎಂದು ಕೇಳಿದಾಗ, ಚಿಕ್ಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಇದನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ಬಹುತೇಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನಿರತರಾದರು. ಅವರು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ವಿಧಾನವು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡುವುದಾಗಿತ್ತು: $n < 10$ ಆದಾಗ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ಹುಡುಕಿ ಕಂಡುಕೊಂಡು, ಬಳಿಕ, ಅದರ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣವನ್ನು ಊಹಿಸುವುದಾಗಿತ್ತು. $n = 2$ ಹಾಗೂ $n = 6$ ಆದಾಗ ಪರಿಹಾರ ಏಕೆ ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ಸುಗಮವಾಗಿ ವಿವರಿಸಲು ಯಾರಿಂದಲೂ ಸಾಧ್ಯವಾಗಲಿಲ್ಲ.

ಓರ್ವ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ "ಸಾಧನೆ"ಯೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದರಲ್ಲಿದ್ದ. ಉಳಿದ ಸಂದರ್ಭಗಳಿಗಿಂತಲೂ n = 6 ಹೇಗೆ ಭಿನ್ನ ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಆಧಾರವು ಅವನ ಈ ವೀಕ್ಷಣೆಯಲ್ಲಿತ್ತು: ಎಲ್ಲಾ ಕಾಯಿಗಳೂ ತಲುಪಬೇಕಿರುವ ಗುರಿಯಾಗಿ ವಲಯವೊಂದನ್ನು ಆಯ್ದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಅಂದರೆ, ಆ ವಲಯದಲ್ಲಿದ್ದ ಕಾಯಿಗೆ ಅಲ್ಲಿಗೆ ತಲುಪಲು ಯಾವುದೇ ಜಿಗಿತದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿಲ್ಲ. ಹಾಗೆಯೇ, ಅದರ ಅಕ್ಕ-ಪಕ್ಕದ ಎರಡು ವಲಯಗಳಲ್ಲಿನ ಕಾಯಿಗಳಿಗೆ ತಲಾ *1* ಜಿಗಿತದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿದೆ; ಅವುಗಳ ಪಕ್ಕದ ಎರಡು ವಲಯದ ಕಾಯಿಗಳಿಗೆ ತಲಾ 2 ಜಿಗಿತಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ, ಇತ್ಯಾದಿ. ಇದೇ ರೀತಿ ಲೆಕ್ಕಮಾಡುತ್ತಾ ಹೋದರೆ $n = 6$ ಅಥವಾ *2* ಆದಾಗ ಗುರಿ ವಲಯವನ್ನು ತಲುಪಲು ಬೇಕಿರುವ ಒಟ್ಟು ಜಿಗಿತಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಅಸಮವಾಗಿರುತ್ತವೆ; ಹಾಗೂ ಉಳಿದ n ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಇದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಅಂತಿಮ ವಲಯಕ್ಕೆ ತಲುಪಲು *1* ಜಿಗಿತದ ಆವಶ್ಯಕತೆಯಿರುವ ವಲಯದ ಕಾಯಿಯನ್ನು ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಾಗಿದರೆ, ಅದಕ್ಕೆ 5 ಜಿಗಿತಗಳ ಅಗತ್ಯವಿದೆ ಎಂಬುದು ಸ್ಪಷ್ಟ. ಆದರೆ, ಇದರಿಂದ ಜಿಗಿತಗಳ ಮೊತ್ತದ ಅನುರೂಪತೆಗೆ ಯಾವುದೇ ಭಂಗಬರುವುದಿಲ್ಲ. (ಅನುರೂಪತೆ ಎಂಬುದು ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯು ಅಸಮವೋ, ಸಮವೋ ಎಂಬುದನ್ನು ತಿಳಿಸುವುದಾಗಿದೆ. ಸಂಖ್ಯೆಯೊಂದಕ್ಕೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಮೂಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಅನುರೂಪತೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ, ಆದರೆ, ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದರೆ ಅನುರೂಪತೆ ತಿರುಗುಮುರುಗಾಗುತ್ತದೆ. ಸಮಸ್ಯೆಗಳನ್ನು ಬಗೆಹರಿಸುವಾಗ ಹಾಗೂ "ಸಾಧನೆ"ಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವಾಗ ಅನುರೂಪತೆಯು ಬದಲಾಗದೇ ಉಳಿಯುವ ಸಂಗತಿಯನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗುತ್ತದೆ.)

ಆ ಬಾಲಕನ "ಸಾಧನೆ"ಯು ಅಲ್ಲಿಂದಾಚೆಗೆ ಮುಂದುವರಿಯಲಾಗದಿದ್ದರೂ, ಅವನ ವೀಕ್ಷಣೆಯು ನ್ಯಾಯಯುತ "ಸಾಧನೆ"ಯೊಂದಕ್ಕೆ ತಲುಪಬಲ್ಲ ಉತ್ತಮ ಆರಂಭಿಕ ಹಂತವಾಗಿದೆ. ಇನ್ನೂ ಕಾಲಾವಕಾಶವಿದ್ದಿದ್ದರೆ ಆತ ಬಹುಶಃ ತನ್ನ "ಸಾಧನೆ"ಯನ್ನು ಪೂರ್ಣಗೊಳಿಸುತ್ತಿದ್ದನೇನೋ. ಅವನ "ಸಾಧನೆ"ಯನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡು ಅದನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸಲು ನಾವು ಅವನ ವಾದವನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಮುಂದುವರಿಸುತ್ತೇವೆ. n ಬೆಲೆ ಅಸಮವಾಗಿದ್ದಾಗ, ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಾಗಿ ಗುರಿ ತಲುಪಲು ಒಂದು ವಲಯದಲ್ಲಿನ ಕಾಯಿಗೆ ಅಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳು ಬೇಕಾದರೆ, ಅದರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಾಗಿ ಗುರಿ ತಲುಪಲು ಅದೇ ಕಾಯಿಗೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ನಾವು ಪ್ರತಿ ಕಾಯಿಯನ್ನೂ ಅದರ ಗುರಿಗೆ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳಲ್ಲಿ ತಲುಪಿಸಲು ಸೂಕ್ತ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಸಾಗುವಂತೆ ನೋಡಿಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ. n ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾದರೆ, ಗುರಿಯ ವಲಯಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧದ ವಲಯದ ಕಾಯಿಗೆ ಗುರಿ ತಲುಪಲು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳ ಆವಶ್ಯಕತೆ ಇದೆ. ಉಳಿದ ವಲಯಗಳು ಸಮಮಿತಿ

ಕಾಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತವಾದ್ದರಿಂದ, ಉಳಿದ ಪ್ರತಿ ವಲಯಕ್ಕೂ (ಗುರಿ ತಲುಪಲು) ಅದರಷ್ಟೇ ಜಿಗಿತಗಳು ಅಗತ್ಯವಿರುವ ಅನುರೂಪ ವಲಯವೊಂದು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ.

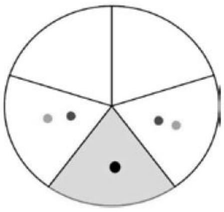
ನಮ್ಮ "ಸಾಧನೆ".



ಚಿತ್ರ 2. ವೃತ್ತವನ್ನು ***n*** = 5 ವಲಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿ, ಅತಿ ಕೆಳಗಿನ ವಲಯ "ಗುರಿ"ಯಾಗಿರುವುದು

ನಮ್ಮ "ಸಾಧನೆ"ಯು ಮೇಲೆ ಉಲ್ಲೇಖಿಸಿದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ "ಸಾಧನೆ"ಯ ರೂಪುರೇಖೆಗಳನ್ನು ಹೋಲುತ್ತದೆ. ವೃತ್ತದ ವಲಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ n ಆಗಿರಲಿ. ಇದು ಒಂದು ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆ ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಅಥವಾ ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗದ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ.

n ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ: ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಲಯವನ್ನು ಗುರಿಯನ್ನಾಗಿ ಆಯ್ಕೆಮಾಡೋಣ (ಚಿತ್ರ 2ನ್ನು ನೋಡಿ). ನಾವೀಗ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಕಾಯಿಗಳನ್ನು ಗುರಿಯ ವಲಯಕ್ಕೆ ನಡೆಸಬೇಕಿದೆ. ಈ ವಲಯಗಳು ಸಮಮಿತಿಯನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ ಕಾರಣದಿಂದ ಕಾಯಿಗಳನ್ನು ತಮ್ಮ ಗುರಿಗೆ ಎರಡು ಜಿಗಿತಗಳ ನಡೆಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಬಹುದಾಗಿದೆ: ಗುರಿಯ ಕಡೆಗೆ ಒಂದು ಕಾಯಿಯ ಒಂದು ಜಿಗಿತವನ್ನು ಅದರ ಅನುರೂಪ ಕಾಯಿಯ ಜಿಗಿತವು ಸಮಮಿತಿ ಕೆಡದಂತೆ ಅನುಸರಿಸುತ್ತದೆ. ಇಂತಹ ಮೊದಲ ನಡೆಯ ಬಳಿಕ ಕಂಡುಬರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸ್ಥಿತಿಯನ್ನು ಚಿತ್ರ 3ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, n ಒಂದು ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದರೆ,ಎಲ್ಲಾ ಕಾಯಿಗಳನ್ನೂ ಕೊನೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಾನ ವಲಯದಲ್ಲಿ ಕೂಡಿಸಲು ಸಾಧ್ಯ.



ಚಿತ್ರ 3. *n* = 5 ಆದಾಗ ಒಂದು ನಡೆಯ ಬಳಿಕ (ಅಂದರೆ, ಎರಡು ಜಿಗಿತಗಳ ಬಳಿಕ)
ಕಂಡುಬರುವ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಸ್ಥಿತಿ.

n ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವಾಗ: ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ವಲಯವನ್ನು ಗುರಿ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. n ಈಗ 4ರ ಅಪವರ್ತ್ಯವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ನಾವು ಗುರಿ ಎಂದುಕೊಂಡಿರುವ ವಲಯಕ್ಕೆ ನೇರವಾಗಿ ಎದುರಿರುವ ವಲಯದ ಕಾಯಿಯನ್ನು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಜಿಗಿತಗಳಲ್ಲಿ ಗುರಿಗೆ ಸೇರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿಯೂ ನಾವೀಗ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಸಮಮಿತಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸುವ ಸಮಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಕಾಯಿಗಳ ಸಂದರ್ಭಕ್ಕೆ ಇಳಿಸಿದ್ದೇವೆ. ಇವುಗಳನ್ನು ಮೇಲೆ ವೃತ್ತವನ್ನು ಅಸಮ ವಲಯಗಳಾಗಿ ವಿಭಜಿಸಿದ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿದ ವಿಧಾನವನ್ನೇ ಅನುಸರಿಸಿ ಗುರಿಗೆ ಸೇರಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, n ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗುವ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಸಹ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ "ಸಾಧನೆ"ಯ ಮಾದರಿಯಲ್ಲೇ ಒಗಟಿಗೆ ಪರಿಹಾರವೊಂದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಬಹುದಾಗಿದೆ.

n ನಾಲ್ಕರಿಂದ ಭಾಗವಾಗದ ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದಾಗ: ಉದಾಹರಣೆಗೆ, *n* = 6 ಆದಾಗ ಮೇಲಿನ ವಾದವನ್ನು ಬಳಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದರೆ, ಹಾಗೆಂದ ಮಾತ್ರಕ್ಕೆ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ. ನಮಗೆ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಪರಿಹಾರ ಸಿಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಲು ಪ್ರತಿ ವಲಯಕ್ಕೂ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಸೂಚಿಸಿರುವ ಕ್ರಮಾನುಸಾರ ನೀಡೋಣ: ಯಾವುದಾದರೊಂದು ವಲಯದಿಂದ ಮೊದಲುಮಾಡಿ ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮಾನುಗತವಾಗಿ 0 ಮತ್ತು 1 ನ್ನು ನೀಡುತ್ತಾ ಹೋಗಿ. ಇಲ್ಲಿ n ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾದ್ದರಿಂದ ಇದು ಸಾಧ್ಯ. ಅಲ್ಲದೆ, ಪ್ರತಿ 1 ಕ್ಕೆ 0 ಮಾತ್ರ ಅದರ ನೆರೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ, ಹಾಗೆಯೇ, ಪ್ರತಿ ಸೊನ್ನೆಗೆ 1 ಮಾತ್ರ ಅದರ ನೆರೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ ಆಗಿರುತ್ತದೆ.

ಈಗ ನಾವು ಪ್ರತಿ ವಲಯದ ಸಂಖ್ಯೆ ಹಾಗೂ ಅದರಲ್ಲಿರುವ ಕಾಯಿಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಗುಣಲಬ್ಧಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು (s) ಕಂಡುಹಿಡಿಯೋಣ. ಮೊದಲಿಗೆ, ಎಲ್ಲಾ ವಲಯಗಳಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದೊಂದೇ ಕಾಯಿಗಳಿರುವುದರಿಂದ, s ನ ಬೆಲೆ 1+0+1+0+1+0+... = *n*/2 ಒಂದು ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಪ್ರತಿ ನಡೆಯಲ್ಲಿ ನಾವು ಎರಡು ಬಾರಿ ಜಿಗಿಯುತ್ತೇವೆ. ಪ್ರತಿ ಜಿಗಿತದಲ್ಲೂ ಕಾಯಿಯು 0 ಯಿಂದ 1ಕ್ಕೆ ಇಲ್ಲ, 1ರಿಂದ 0 ಗೆ ಸಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಪ್ರತಿ ಜಿಗಿತವೂ s ಬೆಲೆಯನ್ನು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಬದಲಿಸುತ್ತದೆ ಅಥವಾ ಅಸಮದಿಂದ ಸಮಕ್ಕೆ ಬದಲಿಸುತ್ತದೆ. ಅಂದರೆ, s ನ *ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ತಿರುಗುಮುರುಗು* ಮಾಡುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ ಎರಡು ಜಿಗಿತಗಳು s ನ ಅನುರೂಪತೆಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತವೆ. ಇಲ್ಲಿ ವಲಯಗಳ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 4 ರಿಂದ ಭಾಗಿಸಲು ಆಗದೇ ಇರುವುದರಿಂದ, ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ ಸೊನ್ನೆಗಳು ಹಾಗು ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ "ಒಂದು"ಗಳಿರುತ್ತವೆ. ಹೀಗಾಗಿ, ಅಸಮಸಂಖ್ಯೆಯ s ನೊಂದಿಗೆ ಅರಂಭಿಸುವುದಲ್ಲದೆ, s ನ ಅನುರೂಪತೆ ಬದಲಾಗದೇ ಉಳಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮಸ್ಯೆಗೆ ಪರಿಹಾರವಿದೆ ಎಂದಾದರೆ ನಾವು ಗುರಿ ತಲುಪಿದಾಗ s ನ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ನಮ್ಮ ಪ್ರಾರಂಭಿಕ ಹೇಳಿಕೆಗೆ ವಿರುದ್ಧವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಪರಿಹಾರ ಇರುವುದಿಲ್ಲ.

ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಸೂಚ್ಯರ್ಥಗಳು

"ಪರಿಕಲ್ಪನಾಧಾರಿತ ಒಗಟು"ಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಮಕ್ಕಳ ನಡುವೆ ಔಪಚಾರಿಕ "ಸಾಧನೆ"ಯ ವಿಕಾಸವನ್ನು ಹುರಿದುಂಬಿಸುವಂತಹ ಸವಾಲುಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವುದು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಗುರಿಯಾಗಿತ್ತು.

ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರಿಹಾರವಿಲ್ಲದಿರುವುದಕ್ಕೆ ಸಮರ್ಥನೆಗಳನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದ ಸಂಗತಿಯು ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಗಟುಗಳು ಗಣಿತದ ಸ್ವಭಾವಕ್ಕೆ ಹೊಂದಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಮಸ್ಯಾಪೂರಣ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿಭಾಯಿಸಲು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಪ್ರಚೋದಿಸಬಲ್ಲದು ಎಂಬುದಕ್ಕೆ ಒಂದಿಷ್ಟು ಸಾಕ್ಷ್ಯಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸಿತು.

ಮಹತ್ತ್ವದ ಗಣಿತ ಸಂಬಂಧಿತ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಲು ಒಗಟುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಹಾಗೂ ಅವುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ "ಸಾಧನೆ"ಯ ಅಗತ್ಯವನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಆಸಕ್ತಿಪ್ರದವೂ, ಒಳನೋಟ ನೀಡುವಂತದ್ದೂ ಆಗಿದೆ. ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಮಕ್ಕಳೂ "ಸಾಧನೆ"ಯ ಕಲ್ಪನೆಯಲ್ಲಿ ಮಗ್ನರಾಗುವಂತೆ ಹಾಗೂ ಗಣಿತದಲ್ಲಿ "ಸಾಧನೆ"ಗಿರುವ ಮಹತ್ತ್ವದೊಡನೆ ತಮ್ಮನ್ನು ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವಂತೆ ಮಾಡುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿದ್ದೇವೆ. ಕಲಿಕಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಮ್ಮದೇ "ಸಾಧನೆ"ಗಳನ್ನು ರಚಿಸಿಕೊಳ್ಳಲು ನೀಡಲಾಗುವ ಅವಕಾಶವು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಕ್ರಿಯಾಶೀಲರಾಗುವ ಸಂಸ್ಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಅವರ ನ್ಯಾಯಯುತ ಪಾಲ್ಗೊಳ್ಳುವಿಕೆಯನ್ನು

ಹುಟ್ಟಿಹಾಕುವುದಲ್ಲದೆ, ಅಂತಹ ವಾತಾವರಣವು ಗಣಿತದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಕಟ್ಟುನಿಟ್ಟಾಗಿರುವುದರ ಮಹತ್ತ್ವವನ್ನು ಅವರು ಮೆಚ್ಚುವಂತೆ ಮಾಡಬಲ್ಲದು.

ಉಲ್ಲೇಖಗಳು

1. Dmitri Fomin, Sergey Genkin, Ilia Itenberg, *Mathematical Circles (Russian experience)*, Universities Press 2000.

ಶಿಖಾ ಠಕ್ಕರ್ ಅವರು ಟಾಟಾ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಶೋಧನಾ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಹೋಮಿ ಭಾಭಾ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಿಕ್ಷಣ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ತಮ್ಮ ಡಾಕ್ಟರೇಟ್ ಪದವಿಗಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಗಣಿತ ಚಿಂತನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಷಯಗಳ ವಿಚಾರವಾಗಿ ಅವರು ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಹಾಗೂ ಮಾಧ್ಯಮಿಕ ಶಾಲಾ ಶಿಕ್ಷಕರೊಂದಿಗೆ ಒಡನಾಡುತ್ತಾರೆ. ದೆಹಲಿಯ *ದಿ ಹೆರಿಟೇಜ್* ಶಾಲೆಯಲ್ಲಿ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕಿಯಾಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸುತ್ತಿರುವ ಇವರು ಪ್ರಸ್ತುತ ಮುಂಬೈನ ಸಮಾಜವಿಜ್ಞಾನದ ಟಾಟಾ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಶಿಕ್ಷಣಕ್ಷೇತ್ರದ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಶಿಶುವಿಕಾಸ ಮತ್ತು ಸಂವೇದನೆ ಎಂಬ ವಿಷಯವನ್ನು ಬೋಧಿಸುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅನುಪಾತ, ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಬೀಜಗಣಿತ ಹಾಗೂ ದಶಮಾಂಶ ಭಿನ್ನರಾಶಿಗಳ ವಿಷಯವಾಗಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಚಿಂತನಪ್ರಕ್ರಿಯೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ವಿಷಯದಲ್ಲಿ ಸಂಶೋಧನಾಭಿರುಚಿ ಹೊಂದಿರುವ ಇವರನ್ನು shikha@hbcse.tifr. res.in ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸದಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.

ರಾಸ್ಸಿ ಅವರು ಟಾಟಾ ಮೂಲಭೂತ ಸಂಶೋಧನಾ ಸಂಸ್ಥೆಯ ಹೋಮಿ ಭಾಭಾ ವಿಜ್ಞಾನ ಶಿಕ್ಷಣ ಕೇಂದ್ರದಲ್ಲಿ ಸಂಶೋಧನಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯಾಗಿದ್ದು, ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣದಲ್ಲಿ ಡಾಕ್ಟೊರೇಟ್ ಪದವಿಗಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಮೊದಲು ಪ್ರಾಧ್ಯಾಪಕರಾಗಿ, ಬಳಿಕ ನಾರಾಯಣ ಹೃದಯಾಲಯ ಆಸ್ಪತ್ರೆಯಲ್ಲಿ ಉಪಕರಣಗಳ ದುರಸ್ತಿಗಾರನಾಗಿ, ತದನಂತರ ವಿಜ್ಞಾನ ಎಕ್ಸ್ ಪ್ರೆಸ್ ರೈಲಿನಲ್ಲಿ ವಿಜ್ಞಾನ ಸಂವಹನಕಾರರಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿರುವ ಇವರು ಪುಣೆ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದಿಂದ ಮಾಡಲಿಂಗ್ ಮತ್ತು ಸಿಮ್ಯುಲೇಷನ್ ವಿಭಾಗದಲ್ಲಿ ತಾಂತ್ರಿಕ ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪದವಿ ಪಡೆದಿದ್ದು, ಕಾಂಪ್ಯುಟೇಷನಲ್ ಜಿನೊಮಿಕ್ಸ್ ಕ್ಷೇತ್ರದಲ್ಲಿ ವಿಶೇಷ ತರಬೇತಿ ಪಡೆದು ಕಾರ್ಯನಿರತರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಪದವಿಪೂರ್ವ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಣ ಹಾಗೂ ಗಣಿತಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಒಗಟುಗಳು ಮತ್ತು ಆಟಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವುದು ಇವರ ಸಂಶೋಧನಾಭಿರುಚಿಯಾಗಿದೆ. ಇವರನ್ನು rossi@hbcse.tifr.res.in ಮಿಂಚಂಚೆ ವಿಳಾಸದಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದಾಗಿದೆ.