Translation of *Definitions changing through time : Swati Sircar* From Azimpremji University At Right Angles_November, 2020

माध्यमिक कक्षा से

समय के साथ बदलती परिभाषाएँ

समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज के बारे में बारीकी से विचार करते हुए

स्वाती सरकार

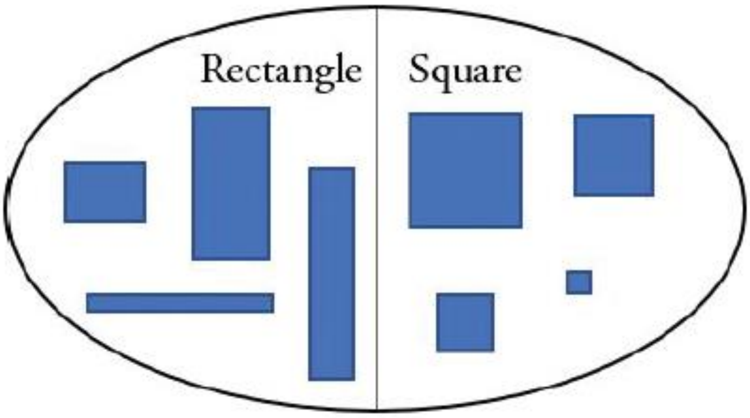
मुख्य शब्द : *चतुर्भुज, वर्गीकरण, सीमाएँ*

समय के साथ पाठ्यपुस्तकों में परिभाषाएँ बदलती रहती हैं। किसी समय में, वर्गों को आयत नहीं माना जाता था, लेकिन आज उन्हें आयत माना जाता है। यह बदलाव क्यों? जब हम वर्गीकरण के बारे में सोचते हैं, तो मुख्य रूप से हम एक समुच्चय के उप-समुच्चय इस प्रकार बनाते हैं कि प्रत्येक उप-समुच्चय में कुछ विशिष्ट गुणधर्म होते हैं। वास्तव में ऐसा करने के दो तरीक़े होते हैं :

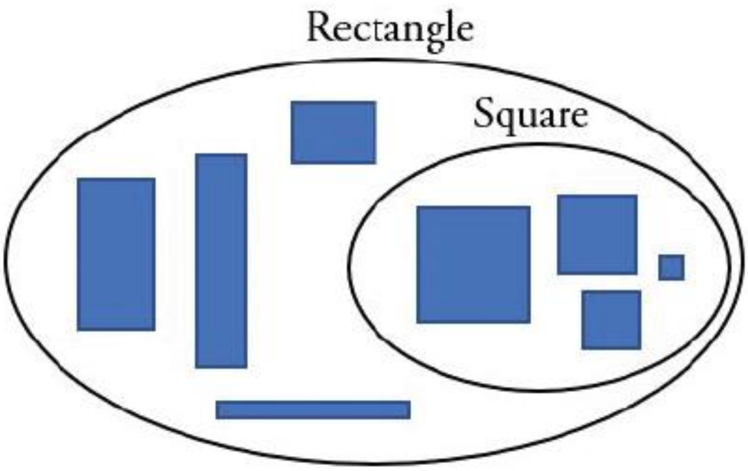
1. **विभाजन (Partition)** : इस तरीक़े में मूल समुच्चय को असंयुक्त उप-समुच्चयों (disjoint subsets), यानी कि ऐसे समुच्चयों में विभाजित किया जाता है जो आपस में अतिव्यापित (overlap) नहीं होते।

2. **पदानुक्रमित (Hierarchical)** : इस तरीक़े में नेस्टेड (Nested) उप-समुच्चय बनाए जाते हैं ताकि अधिक सामान्य गुणधर्मों वाला एक उप-समुच्चय अधिक विशिष्ट गुणधर्मों वाले किसी उप-समुच्चय का अधिसमुच्चय (superset) हो।

आयत की पुरानी परिभाषा (यानी कि समकोण और असमान आसन्न भुजाओं वाला एक समान्तर चतुर्भुज) विभाजन वर्गीकरण का अनुसरण करती थी। इसने आयत को वर्गों (जो कि समकोण और चार समान भुजाओं वाले समान्तर चतुर्भुज होते हैं) से अलग एक उप-समुच्चय बना दिया (चित्र-1, देखें)। वर्गीकरण का यह तरीक़ा किसी आकृति को चित्रित करना आसान बनाता है क्योंकि इसमें विभिन्न उप-स्थितियों पर विचार करना शामिल नहीं होता है।



चित्र-1 : विभाजन आयत (Rectangle), वर्ग (Square)



चित्र-2 : पदानुक्रम आयत (Rectangle), वर्ग (Square)

हालाँकि, वर्तमान पाठ्यपुस्तकों में आयत की परिभाषा पदानुक्रमित वर्गीकरण में बदल गई है, जो वर्गों के समुच्चय को आयतों के समुच्चय का उप-समुच्चय बनाती है (चित्र-2, देखें)। इस परिवर्तन का एक बड़ा कारण आयत के गुणधर्मों पर विचार करना है। विभाजन वर्गीकरण के तरीक़े द्वारा दी गई परिभाषा (असमान आसन्न भुजाओं सहित) एक आयत में ऐसा कोई भी गुणधर्म नहीं बताती है, जो एक वर्ग में नहीं है। या दूसरे शब्दों में, एक वर्ग में वे सभी गुणधर्म होते हैं जो एक आयत में होते हैं। इसलिए, एक वर्ग को एक (विशेष) आयत के रूप में समझना अर्थपूर्ण लगता है। इस वजह से इस तरह की आकृतियों को चित्रित करने में थोड़ी जटिलता होती है क्योंकि अब उप-स्थितियों पर विचार करना पड़ सकता है। उदाहरण के लिए एक आयत किसी वर्ग की तरह दिख सकता है या फिर असमान आसन्न भुजाओं वाले किसी आयत की तरह भी दिख सकता है।

इसी तर्क से वर्ग, समचतुर्भुज भी हैं और वास्तव में आयतों और समचतुर्भुज के समुच्चयों का सर्वनिष्ठ (intersection) निश्चित रूप से वर्गों का समुच्चय होता है। अब, आयतों और

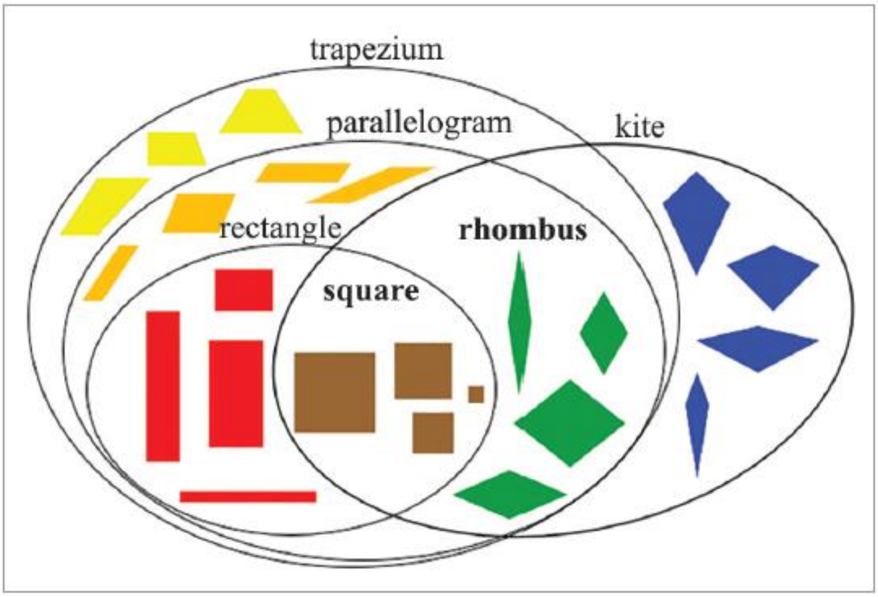
समचतुर्भुजों के समुच्चय दोनों समान्तर चतुर्भुजों (जो स्वयं समलम्ब चतुर्भुजों के समुच्चय का उप-समुच्चय है) के समुच्चय के उप-समुच्चय होते हैं। समचतुर्भुज एक पतंग भी है। चित्र-3, इन समुच्चयों को दर्शाता है। ध्यान दें कि -

(i) समचतुर्भुज, समान्तर चतुर्भुज और पतंग का सर्वनिष्ठ है अर्थात कोई चतुर्भुज एक समचतुर्भुज है यदि और केवल यदि वह एक समान्तर चतुर्भुज और पतंग भी है।

(ii) वर्ग, आयत और समचतुर्भुज का सर्वनिष्ठ है, यानी कोई चतुर्भुज एक वर्ग है यदि और केवल यदि वह एक आयत और एक समचतुर्भुज भी है।

(iii) ऐसा कोई चतुर्भुज नहीं हो सकता जो समलम्ब चतुर्भुज और पतंग है, लेकिन समान्तर चतुर्भुज नहीं है।

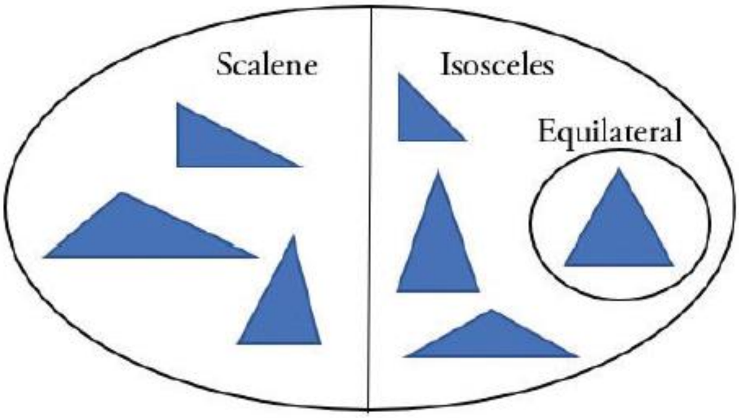
हम उपरोक्त प्रत्येक कथन को सिद्ध करने का काम पाठक पर छोड़ते हैं।



चित्र-3 : समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium), समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram), समचतुर्भुज (Rhombus), आयत (Rectangle), वर्ग (Square), पतंग (Kite)

लेकिन अधिकांश पाठ्यपुस्तकें समान रूप से परिभाषाओं के इस बदलाव को नहीं अपना रही हैं। इस तर्क के तहत समबाहु त्रिभुजों को विशेष समद्विबाहु त्रिभुज माना जाना चाहिए, लेकिन अधिकांश पाठ्यपुस्तकों में ऐसा देखने को नहीं मिलता। समद्विबाहु त्रिभुजों में ऐसा कोई गुणधर्म नहीं है जो एक समबाहु त्रिभुज में नहीं है (चित्र-4, देखें)।

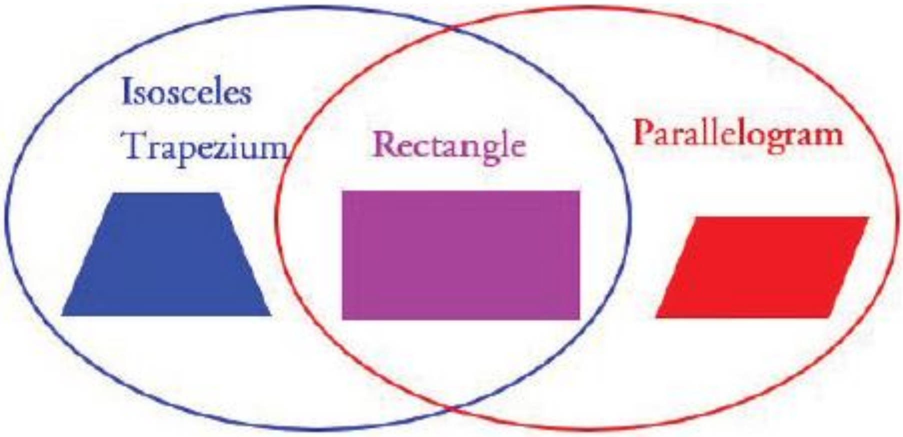
हालाँकि वेब पर उपलब्ध कुछ स्रोत सामग्रियों में यह परिवर्तन दिखता है, उदाहरण https://www.cut-the-knot.org/triangle/Triangles.shtml में दोनों स्थितियाँ शामिल हैं।



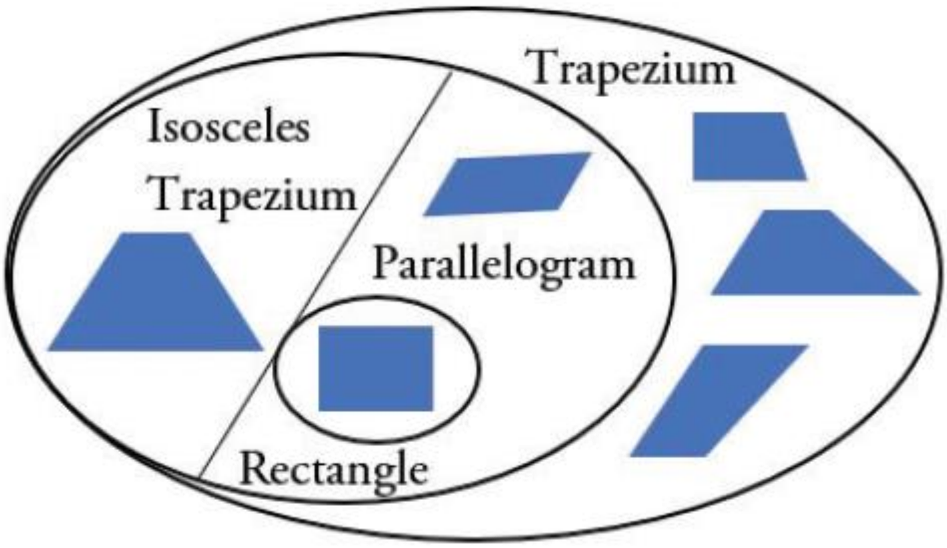
चित्र-4 : विषमबाहु त्रिभुज (Scalene triangle), समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles triangle), समबाहु त्रिभुज (Equilateral triangle)

आयतों और समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुजों के बारे में एक और दिलचस्प स्थिति देखने को मिलती है। आयत, समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज के सभी गुणधर्मों को सन्तुष्ट करते हैं। इस प्रकार आयत, समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज और समान्तर चतुर्भुज का सर्वनिष्ठ होता है (चित्र-5, देखें)। हालाँकि, समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज की लोकप्रिय परिभाषा आयतों को इस समुच्चय में शामिल होने की अनुमति देने में अवरोध पैदा करती है। समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज में समान्तर भुजाओं की एक जोड़ी और समान भुजाओं की एक जोड़ी होती है। यह सीधे 'समद्विबाहु' नाम से आता है जिसका अर्थ समान भुजाएँ होता है। अब, यदि समान्तर भुजाएँ समान हैं, तो यह एक समान्तर चतुर्भुज बन जाता है। इसलिए, मानक परिभाषा में यह स्पष्ट रूप से बताया जाता है कि असमान्तर (non-parallel) भुजाएँ समान होनी चाहिए।

लेकिन बची हुई भुजाओं की असमान्तरता (non-parallel-ness of the remaining sides) आयतों को इस समुच्चय से बाहर कर देती है (चित्र-6)। तो, इसका वर्णन करने का एक सम्भावित तरीक़ा यह हो सकता है कि, एक चतुर्भुज जिसमें समान्तर भुजाओं की एक जोड़ी के साथ दूसरी जोड़ी समान लम्बाई की भुजाओं की हो, एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होता है। यह परिभाषा एक आयत को भी समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होने की अनुमति देती है। लेकिन यह एक और समस्या का कारण भी बनती है। यह वैकल्पिक परिभाषा एक समान्तर चतुर्भुज को समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होने की अनुमति देती है, जो कि सम्भव नहीं है। समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुजों में रैखिक सममिति (linear symmetry) होती है जो एक समान्तर चतुर्भुज में हो यह ज़रूरी नहीं है। इसलिए, अगर हम केवल भुजाओं पर विचार करें तो समस्या होती है :



चित्र-5 : समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज (Isosceles trapezium),आयत (Rectangle), समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram)



चित्र-6 : समलम्ब चतुर्भुज (Trapezium), समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज (Isosceles trapezium), समान्तर चतुर्भुज (Parallelogram), आयत (Rectangle)

	वांछनीय	अवांछनीय
अन्य भुजाएँ असमान्तर हैं	समान्तर चतुर्भुज बाहर हो जाते हैं	आयत बाहर हो जाते हैं
अन्य भुजाएँ समान्तर हो सकती हैं	आयत शामिल हो जाते हैं	सामान्य समान्तर चतुर्भुज शामिल हो जाते हैं
समान्तर भुजाएँ असमान हैं	समान्तर चतुर्भुज बाहर हो जाते हैं	आयत बाहर हो जाते हैं
समान्तर भुजाएँ समान हो सकती हैं	आयत शामिल हो जाते हैं	सामान्य समान्तर चतुर्भुज शामिल हो जाते हैं

इसलिए, परिभाषाओं को भुजाओं से परे जाना चाहिए और इनमें कोणों के बारे में कुछ कथन शामिल करना चाहिए। इसके कई तरीक़े हैं क्योंकि यहाँ कई एक समान स्थितियाँ हैं :

1. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसमें समान आसन्न कोणों के दो जोड़े हों
2. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसके सम्मुख कोण सम्पूरक हों ⟺ एक चक्रीय समलम्ब चतुर्भुज
3. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसमें रैखिक सममिति हो
4. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसके विकर्ण समान हों

इनमें से प्रत्येक परिभाषा में आयत शामिल हैं, लेकिन सामान्य समान्तर चतुर्भुज शामिल नहीं हैं। पहली परिभाषा में, दो जोड़ों का उल्लेख करना महत्त्वपूर्ण है, क्योंकि एक समलम्ब चतुर्भुज में दो समकोण होना सम्भव है, जो शायद आसन्न हों। तो, समान आसन्न कोणों की सिर्फ़ एक जोड़ी होने से यह सुनिश्चित नहीं किया जा सकता कि कोई चतुर्भुज एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज है। परिभाषा 1 के लिए वैकल्पिक परिभाषा इस प्रकार हो सकती है :

5. एक समलम्ब चतुर्भुज जिसकी समान्तर भुजाओं में से किसी भी एक भुजा के आसन्न कोण समान हों

यह परिभाषा समकोणों की जोड़ी होने की सम्भावना को भी बाहर करती है और यह परिभाषा 2, 3 और 4 की तुलना में रचना और ज़रूरी शर्तों के सन्दर्भ में अधिक सुविधाजनक हो सकती है। इसके साथ ही यह परिभाषा एक चतुर्भुज का उसकी भुजा और कोणों के सन्दर्भ में वर्णन करती है जिसमें से व्युत्पन्न गुणधर्म को एक परिभाषा बनाने के बजाय, गुणधर्मों (जैसे कि 2, 3 और 4) को व्युत्पन्न किया जा सकता है। परिभाषा 2 के दूसरे भाग को समझने के लिए किसी को चक्रीय चतुर्भुज को समझने की आवश्यकता हो सकती है और परिभाषा 3 को समझने के लिए किसी को रैखिक सममिति वाली एक आकृति के गुणधर्मों से परिचित होना चाहिए।

जबकि, परिभाषा 5 के लिए भुजाओं और कोणों से परे किसी चीज़ की आवश्यकता नहीं है। यदि समान कोणों और उनकी उभयनिष्ठ भुजा का माप दिया गया है, तो कोई भी इन जानकारियों की मदद से एक विशिष्ट समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज बना सकता है। इसमें कोण-भुजा-कोण (ASA) प्रकार की रचना और एक समान्तर रेखा खींचना शामिल है। इस प्रकार कोई भी इस परिभाषा के आधार पर एक समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज की रचना कर सकता है और फिर इसके गुणधर्मों की खोजबीन कर सकता है। हालाँकि, परिभाषा 2 या 3 का उपयोग करके समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज की रचना करना अधिक कठिन हो सकता है, लेकिन असम्भव नहीं है। वास्तव में, वेब पर परिभाषा 5 के समान एक परिभाषा दी गई है :

"एक **समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज** (**isosceles trapezoid**) [जिसे 1997 में, ब्रिटिश; ब्रॉन्शेटिन और सेमेन्डेयव द्वारा **isosceles trapezium** कहा गया है; पृष्ठ 174 पर] एक समलम्ब चतुर्भुज है जिसमें आधार के कोण समान होते हैं और इसलिए बाईं और दाईं भुजा की लम्बाई भी समान होती है।" [http://mathworld.wolfram.com/IsoscelesTrapezoid.html]

हम इस लेख को निम्नलिखित कथन के साथ समाप्त करते हैं और पाठकों से इसे सिद्ध करने या इसके लिए एक प्रत्युदाहरण (counterexample) देने का आग्रह करते हैं : *रैखिक सममिति वाला कोई भी चतुर्भुज एक पतंग या समद्विबाहु समलम्ब चतुर्भुज होता है।*

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन एण्ड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्रोफ़ेसर हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला चित्रकारी है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से बीस्टैट व एमस्टैट और वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सिएटल से गणित में एमएस की पढ़ाई की है। वे पिछले पाँच से अधिक वर्षों से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं और सभी तरह की व्यावहारिक व क्रियाशील गतिविधियों, विशेषकर ओरिगेमी में गहरी रुचि रखती हैं।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही