संख्याएँ कितनी वास्तविक एवं कितनी काल्पनिक?

मनोज कुमार शराफ

अपने शिक्षकीय जीवन में मैंने पाया कि गणित में प्रयोग किए जाने वाले कई शब्द ऐसे हैं जिनके अन्तर को या तो हम समझ नहीं पाते हैं या फिर केवल कुछ उदाहरण देकर बच्चों और स्वयं को सन्तुष्ट करने का प्रयास करते हैं। इसी सन्दर्भ में, वास्तविक संख्याओं और काल्पनिक संख्याओं के अन्तर को लेकर भी भ्रम की स्थिति बनी रहती है। गणित के साथी यह तो कहते हैं कि प्राकृत संख्या (natural number) से लेकर परिमेय (rational) एवं अपरिमेय (irrational) तक, सभी संख्याएँ वास्तविक हैं तथा उनके अतिरिक्त सभी संख्याएँ काल्पनिक हैं, परन्तु ऐसा कहने के पीछे क्या तर्क हैं, यह स्पष्ट करने में वे अक्सर असफल रहते हैं। खास तौर से पूर्णांक (integer) [जैसे (-3)] व अपरिमेय संख्या (जैसे π, e) को वास्तविक संख्या क्यों कहते हैं, उन्हें काल्पनिक संख्या क्यों नहीं कहते? एक गणित शिक्षक होने के नाते, मुझे लगता है कि हम सभी को इसके पीछे के तर्क को समझना आवश्यक है।

समझने के लिए चार स्थितियाँ

हम संख्या के साथ-साथ उनके वास्तविक एवं काल्पनिक होने के पीछे के कारण को ठीक-ठीक समझ सकें, इसके लिए आइए हम कुछ स्थितियों पर विचार करते हैं:

स्थिति-1: अगर आप कक्षा-5 के किसी विद्यार्थी से प्रश्न करें कि पाँच में से सात घटाएँ तो हमें क्या मिलेगा, तो

चूँकि वह अभी पूर्णांकों से परिचित नहीं है, ऐसे में उसका उत्तर या तो 0 हो सकता है या 2 हो सकता है, या फिर वह कह सकता है कि इसका उत्तर तो सम्भव ही नहीं है।

स्थिति-2: अगर आप कक्षा-5 के किसी विद्यार्थी से पाँच को तीन से भाग देने को कहें, तो विद्यार्थी का उत्तर या तो 1.6 होगा या 5/3 या फिर भागफल 1 और शेष 2 होगा। चूँकि वह आवर्ती दशमलव (recurring decimal) से परिचित नहीं है, अतः उसका उत्तर 5/3 = 1.666... शायद न मिले।

स्थिति-3: अगर आप कक्षा-7 के किसी विद्यार्थी से प्रश्न करें कि एक वर्ग जिसकी भुजा 4 से.मी. है, उसके विकर्ण की लम्बाई क्या होगी, तो चूँकि उसका वर्गमूल तथा अपरिमेय संख्याओं से परिचय नहीं हुआ है, अतः वह शायद ही बता सके कि विकर्ण की लम्बाई 5 से.मी. से अधिक किन्तु 6 से.मी. से कम होगी या हो सकता है वह कुछ भी तय न कर पाए।

इनके अलावा एक और स्थिति पर विचार करें:

स्थिति-4: 10 को दो भागों में इस प्रकार बाँटें कि उनका गुणनफल 40 हो।

आप पाएँगे कि आम तौर पर 10 के दो हिस्से 1+9, 2+8, 3+7, 4+6 एवं 5+5 होते हैं, पर इनमें से किसी का भी गुणनफल 40 नहीं होता। सभी गुणनफल के मान 40 से काफी दूर हैं।

समाधान की ओर

आइए, प्रत्येक स्थिति के लिए समाधान की बात करते हैं:

1. स्थिति-1 के लिए आप पूर्णांक के बारे में चर्चा करने के बाद, उसके जोड़-घटाव सम्बन्धित नियम को बताकर बच्चों को समझा सकते हैं कि 5 - 7 = -2 होगा। इसके लिए आप उधार-जमा, सीढ़ी से ऊपर जाने व नीचे आने, पूर्व दिशा में 5 कदम जाने के बाद वहाँ से उलटी दिशा यानी पश्चिम की ओर 7 कदम जाने आदि की बात कर सकते हैं। तथा इसे अच्छी तरह से समझाने के लिए आप संख्या-रेखा में 5 - 7 = -2 को इस तरह से निरूपित करके भी दिखा सकते हैं जैसा कि चित्र-1 में दिखाया गया है।

इस समाधान से हम देख पा रहे हैं कि किसी छोटी संख्या से बड़ी संख्या को निकालना या कम करना वास्तव में सम्भव है, यानी कुछ ऐसी वास्तविक स्थितियाँ भी हो सकती हैं जिनमें किसी छोटी संख्या से बड़ी संख्या को निकालने या कम करने की ज़रूरत हो।

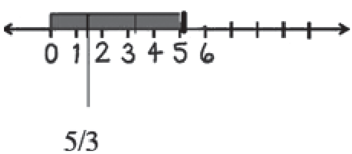
2. आइए, स्थिति-2 पर पुनः विचार करते हैं। मान लीजिए कि हमारे पास पाँच वस्तुएँ हैं, जिन्हें हम तीन बच्चों में बराबर-बराबर बाँटना चाहते हैं। इसके लिए हम प्रत्येक वस्तु के तीन

चित्र-1: *पाँच में से सात को घटाना दर्शाती संख्या-रेखा।*

बराबर हिस्से कर सकते हैं, जैसा कि चित्र-2 में दिखाया गया है। फिर प्रत्येक बच्चे को एक-तिहाई हिस्सा (काला भाग) दिया जा सकता है।

अधिक स्पष्ट करने के लिए हम संख्या-रेखा का सहारा ले सकते हैं।

इस तरह हम 5/3 की वास्तविक

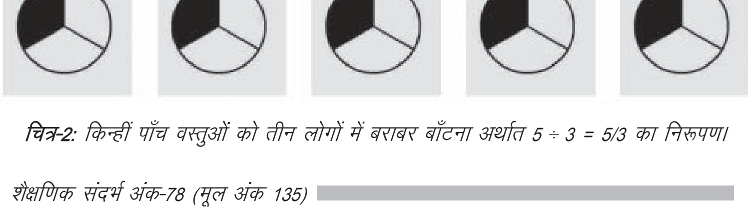


स्थिति पा रहें हैं, साथ ही उसे संख्या-रेखा पर दर्शा भी पा रहे हैं। जैसा कि आप जानते हैं, 5/3 का मान लगभग 1.6 होता है जिसे संख्या-रेखा पर दिखाना आसान है और मापन के मामले में इसका प्रयोग करना एक आम बात है, जैसे 1.6 मीटर या 1.6 कि.मी. आदि।

3. अब आते हैं सवाल नम्बर तीन पर, जिसे इस तरह भी पूछा जा सकता है - "अगर किसी 4 से.मी. भुजा वाले वर्ग के विकर्ण की लम्बाई के बराबर रस्सी चाहिए, तो आप कितनी रस्सी खरीदेंगे?"

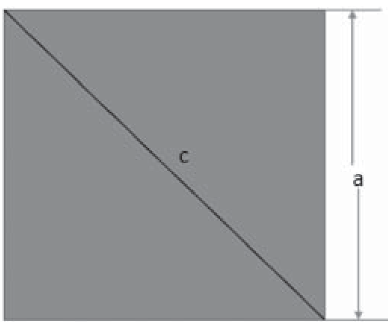
यदि इस समस्या को हल करने की कोशिश करें तो हमारी हालत भी बच्चों जैसी हो जाएगी। इसका व्यावहारिक तरीका यह हो सकता है कि हम 4 से.मी. लम्बा और 4 से.मी. चौड़ा एक वर्ग बना लें, फिर उसके विकर्ण को एक रस्सी से माप लें।

परन्तु आप सभी जानते हैं कि यह व्यावहारिक तरीका किसी बड़े इलाके



चित्र-2: *किन्हीं पाँच वस्तुओं को तीन लोगों में बराबर बाँटना अर्थात 5 ÷ 3 = 5/3 का निरूपण।*

के लिए, जिसकी लम्बाई 2 कि.मी. और चौड़ाई 2 कि.मी. हो, काम नहीं करेगा। इसके लिए पाइथागोरस के सूत्र का इस्तेमाल कर सकते हैं, जिसके अनुसार किसी समकोण त्रिभुज के विकर्ण की लम्बाई का वर्ग उसकी अन्य भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है। इससे हम जान सकते हैं कि 2 कि.मी. x 2 कि.मी. वर्ग के विकर्ण की लम्बाई 2√2 कि.मी. के बराबर होगी (चित्र-3)। हालाँकि, इस निश्चित मान को परिमेय संख्याओं की मदद से हम नहीं बता सकते, परन्तु 2√2 कि.मी. लम्बाई की रस्सी भी सम्भव है, जैसा कि हमने 4 से.मी. भुजा वाले वर्ग के विकर्ण के लिए, ऊपर दिए गए व्यावहारिक हल में देखा था।



चित्र-3: पाइथागोरस प्रमेय से वर्ग के विकर्ण एवं भुजा के बीच सम्बन्ध

$c^2=a^2+b^2$

$c^2=a^2+a^2$ *(क्योंकि वर्ग की भुजाएँ बराबर होती हैं)*

$c^2=2a^2$

$c=\sqrt{2a^2}$

$c=a\sqrt{2}$

4. अब हम अन्तिम स्थिति को हल करने का प्रयास करते हैं।

दो संख्याएँ लेते हैं जिनका जोड़ 10 हो, यानी यदि पहली संख्या x है तो दूसरी संख्या (10 - x) होगी।

प्रश्न के अनुसार, इन दोनों संख्याओं का गुणनफल 40 होना चाहिए, अर्थात –

$x(10 - x) = 40$

या, $10x - x^2 = 40$

या कहें, $40 - 10x + x^2 = 0$

या, $x^2 - 10x = -40$

या, $x^2 - 10x + 25 = -40 + 25$

या, $(x - 5)^2 = -15$

इसे हल करने के लिए, अर्थात x का मान ज्ञात करने के लिए, हमें ऐसी संख्या चाहिए जिसका वर्ग ऋणात्मक हो।

इसे थोड़ा और समझने का प्रयास करते हैं। हम जानते हैं कि दो गुणा दो चार होते हैं, पाँच गुणा पाँच पच्चीस होते हैं। इसका उलटा कहें तो, चार का वर्गमूल दो होता है, पच्चीस का वर्गमूल पाँच होता है। किसी संख्या x का वर्गमूल, यानी कि दो ऐसी बिलकुल समान संख्याएँ a और a खोजने का काम, जिनका आपस में गुणा करा दिया जाए तो हमें x ही वापस मिल जाए। तो अगर $a \times a = x$ है, तो x का वर्गमूल a हो जाएगा। यह बात तो बहुत साधारण है, परन्तु यदि कोई हमसे ऋणात्मक

संख्या का वर्गमूल पूछे तो हम क्या जवाब देंगे? अर्थात अगर कोई (-4) का वर्गमूल पूछ ले या यदि वे कहें $a \times a = -4$, तो बताओ a का मान क्या होगा, तो हम क्या कहेंगे?

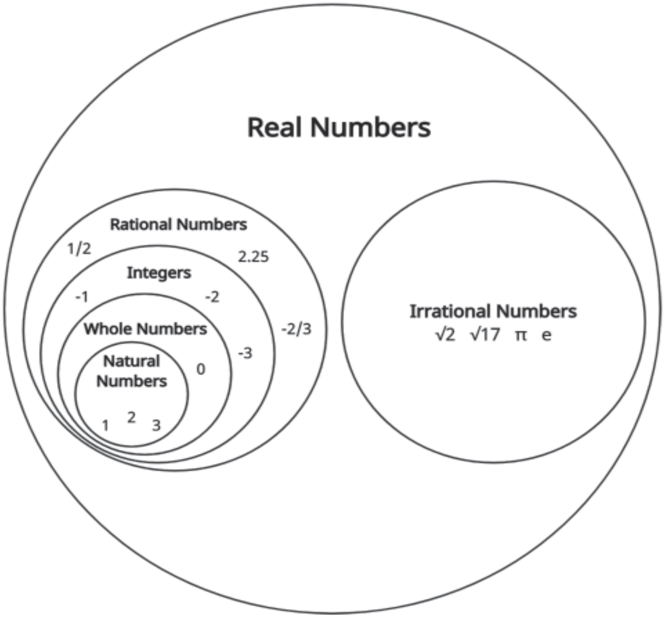
आपने भी बचपन में पढ़ा होगा कि दो धनात्मक संख्याओं का गुणनफल हमेशा धनात्मक संख्या ही होता है, और दो ऋणात्मक संख्याओं का गुणा भी धनात्मक संख्या ही होता है। मतलब अगर दो संख्याएँ समान चिन्हों वाली हैं, तो उनका गुणा धनात्मक ही होगा। वर्गमूल में हम समान संख्या खोजते हैं, ज़ाहिर है उनके चिन्ह भी समान ही होने चाहिए। मतलब स्पष्ट है, ऐसा सम्भव ही नहीं है कि दो समान संख्याओं का गुणा ऋणात्मक संख्या हो जाए। अर्थात, कोई ऐसी संख्या जिसका खुद से गुणा करने पर गुणनफल ऋणात्मक आए, ऐसा केवल 'कल्पना' में ही सम्भव है।

काल्पनिक संख्याओं की शुरुआती परिकल्पना

इटली के एक महान गणितज्ञ थे, जेरोलामो कर्दानो (Gerolamo Cardano), जिन्होंने इस समस्या का हल तलाशने का प्रयास किया कि कैसे 10 को दो ऐसे भागों में बाँटा जाए, जिससे उनका गुणनफल 40 हो जाए। और अपने प्रयास से वे इस समस्या के हल स्वरूप दो संख्याएँ ढूँढ़ लेते हैं, $5 + \sqrt{-15}$ और $5 - \sqrt{-15}$; मगर चूँकि (-15) का वर्गमूल सम्भव ही नहीं है, इसलिए अपनी लिखी एक किताब में वे बताते हैं कि यह बिलकुल अर्थहीन है, 'काल्पनिक' है, और इस प्रकार की संख्याओं के साथ काम करना, स्वयं को मानसिक कष्ट देने के समान है।

जेरोलामो कर्दानो के पहले भी, गणित में कुछ-न-कुछ खुराफात करते हुए लोगों का सामना ऊपर वर्णित स्थितियों से होता था और तब वे काफी प्रयास करने के बाद उन्हें अर्थहीन समझकर छोड़ देते थे व इस प्रकार की संख्याओं से दूर रहने में ही अपनी भलाई समझते थे।

जेरोलामो कर्दानो के हल ने, उनके बाद के गणितज्ञों के लिए ऐसी संख्याओं का प्रयोग करने का मार्ग प्रशस्त किया और इन्हें काल्पनिक संख्या कहा जाने लगा। बाद में रेने देकार्त ने इस तरह की संख्याओं को $a + (\sqrt{-1})b$ के रूप में लिखना शुरू किया। मगर उन्हें भी लगता था कि इस तरह की संख्या का वास्तविकता से कोई लेना-देना नहीं है। उनका कहना था जहाँ भी $a + (\sqrt{-1})b$ जैसा कुछ लिखा मिल जाए, समझ लो उसे हल नहीं किया जा सकता और वह काल्पनिक है। अर्थात इसका हल असम्भव है। महान गणितज्ञ एवं भौतिक वैज्ञानिक सर आइज़ेक न्यूटन ने भी रेने देकार्त की इन बातों का समर्थन किया था।



चित्र-4

काल्पनिक संख्याओं की वास्तविकता

उपरोक्त बातों पर ध्यान दें तो समझ आता है कि वे संख्याएँ जिनके साथ गणितीय ऑपरेशन करना सम्भव हो और साथ ही जिन्हें किसी संख्या-रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता हो, वे सभी वास्तविक संख्याएँ होंगी। इनमें $\pi, e, \varphi, \sqrt{2}$ जैसी अपरिमेय संख्याएँ भी होंगी जिनके स्थान का निर्धारण संख्या-रेखा पर एक निश्चित बिन्दु के रूप में भले ही न किया जा सके, किन्तु यह तय किया जा सकता है कि वे किन्हीं दो पूर्णांकों के बीच आएँगी। जैसे π 3 और 4 के बीच, e 2 और 3 के बीच तथा φ 1 और 2 के बीच होते हैं इत्यादि।

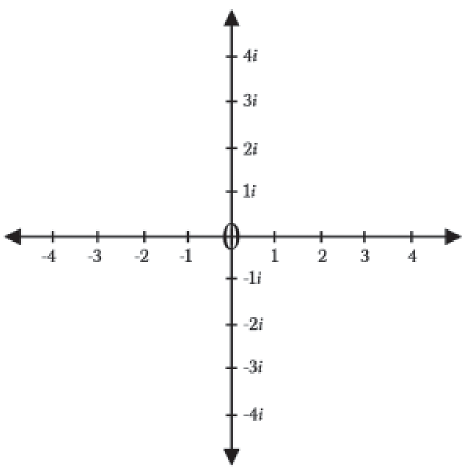
पर इनके अलावा ($\sqrt{-1}$) सहित ऐसी कई संख्याएँ हैं जिन्हें एक संख्या-रेखा पर प्रदर्शित करना तब तक सम्भव नहीं है जब तक कि उस रेखा को ही ‘काल्पनिक-संख्या-रेखा’ न मान लिया जाए।

अब हम समझ चुके हैं कि प्रत्येक परिमेय संख्या को एक संख्या-रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है। अतः सभी परिमेय संख्याएँ वास्तविक संख्याएँ मानी जाती हैं। साथ ही, सभी प्राकृत, पूर्ण (whole) एवं पूर्णांक संख्याएँ भी वास्तविक संख्याएँ मानी जाती हैं क्योंकि इन्हें परिमेय संख्याओं

की तरह संख्या-रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

इस तरह देखा जाए तो केवल ऋणात्मक संख्याओं का वर्गमूल, चतुर्थ मूल, अष्ट मूल आदि ही काल्पनिक संख्याएँ होंगी, क्योंकि इन्हें संख्या-रेखा में कोई स्थान दे पाना सम्भव नहीं है। संक्षेप में, $(-x)^{1/n}$ एक काल्पनिक संख्या होगी यदि n कोई सम संख्या हो। इसी प्रकार वे सभी मिश्रित संख्याएँ, जिनमें एक वास्तविक और एक काल्पनिक संख्या शामिल हो, जैसे $2 + \sqrt{-1}$ या $2\sqrt{-1}$ या $2/\sqrt{-1}$ आदि, काल्पनिक संख्याएँ होंगी।

राफेल बॉम्बेल्लि (Rafael Bombelli) ऐसे पहले गणितज्ञ थे, जो इन काल्पनिक संख्याओं में विश्वास करते थे, और उन्होंने बताया कि दो काल्पनिक संख्याओं का गुणा करने पर वास्तविक संख्या मिल सकती है। मगर उस ज़माने के गणितज्ञों ने उनके इस विचार को नहीं माना, उन्हें लगता था कि काल्पनिक संख्याओं के प्रयोग से वास्तविक हल भला कैसे तलाशे जा सकते हैं। प्रकारान्तर में जॉन वॉलिस एक अनूठा विचार लेकर आए, जिसके अनुसार $a + (\sqrt{-1})b$ जैसी संख्या को X-Y समतल में एक बिन्दु के रूप में दिखाया जा सकता है, जिसमें X-अक्ष वास्तविक अक्ष होगा और Y-अक्ष काल्पनिक अक्ष (चित्र-5)। इस तरह से एक काल्पनिक संख्या को एक काल्पनिक अक्ष में प्रदर्शित करना सम्भव हुआ।



चित्र-5: कॉम्प्लेक्स प्लेन काल्पनिक सँख्याओं को दर्शाने का एक तरीका है। इसमें X-अक्ष वास्तविक और Y-अक्ष काल्पनिक होता है।

शब्दावली

1. प्राकृतिक संख्याएँ (Natural Numbers)

गिनती में उपयोग की जाने वाली सभी संख्याएँ प्राकृतिक संख्या कहलाती हैं। उदाहरण: 1, 2, 3, 4, 5, ...

2. पूर्ण संख्याएँ (Whole Numbers)

प्राकृतिक संख्याओं में 0 को शामिल कर लेने से पूर्ण संख्याएँ बनती हैं। उदाहरण: 0, 1, 2, 3, ...

3. पूर्णांक संख्याएँ (Integers)

धनात्मक, ऋणात्मक और ज़ीरो से मिलकर बनी हुई संख्याएँ पूर्णांक संख्याएँ होती हैं। उदाहरण: ... , -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, ...

4. परिमेय संख्याएँ (Rational Numbers)

ऐसी सभी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में लिखा जा सकता है, उन्हें परिमेय संख्याएँ कहते हैं। (q का मान 0 नहीं होना चाहिए) उदाहरण: ½, ⅕, ¾ आदि।

5. अपरिमेय संख्याएँ (Irrational Numbers)

ऐसी संख्याएँ जिन्हें p/q के रूप में नहीं लिखा जा सकता और मुख्यतः उन्हें '√' के अन्दर लिखा जाता है, और कभी भी उनका पूर्ण वर्गमूल नहीं निकलता। उदाहरण: $\sqrt{2}$, $\sqrt{105}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{17}$ आदि।

अपरिमेय संख्याओं का मान अनावर्ती असान्त दशमलव संख्या के रूप में प्राप्त होता है, जैसे π जिसका मान 3 और 4 के बीच, e जिसका मान 2 और 3 के बीच तथा φ जिसका मान 1 और 2 के बीच प्राप्त होता है।

6. पाई (π)

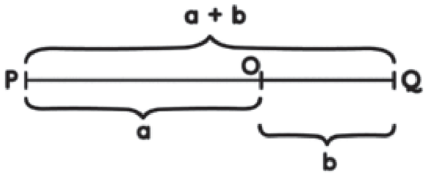
π एक अपरिमेय संख्या है जो किसी वृत्त की परिधि की लम्बाई और उसके व्यास की लम्बाई का अनुपात होता है। वैसे तो कम्प्यूटर की मदद से इसका मान दशमलव के बाद लाखों अंकों तक प्राप्त किया जा चुका है, परन्तु इसका मान अनावर्ती असान्त दशमलव संख्या के रूप में प्राप्त होता है। गणना की सुविधा के दृष्टिकोण से इसका मान 22/7 या 3.14 के रूप में लिया जाता है। इसका मान 3 से बड़ा और 4 से छोटा होता है। इसका दशमलव के 100 अंकों तक मान 3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679... होता है।

पाई (π) एक स्थिरांक है जिसे हम आर्कमिडीज़ स्थिरांक या फिर लूडोल्फ नम्बर के नाम से भी जानते हैं। पाई के समान ही $\sqrt{2}$ भी एक स्थिरांक है जिसे हम पाइथागोरस स्थिरांक के नाम से जानते हैं, जिसका मान है -

$\sqrt{2}$ = 1.414213562373095048801688724209698...

7. गोल्डन अनुपात (φ)

यदि किसी रेखा के दो टुकड़े किए जाएँ और उन दोनों टुकड़ों की लम्बाई का अनुपात, उनकी लम्बाई के जोड़ तथा बड़े टुकड़े की लम्बाई के अनुपात के बराबर हो, तो यह अनुपात गोल्डन रेशो, गोल्डन मीन, डिवाइन प्रोपोर्शन या गोल्डन सेक्शन कहलाता है।



$$\frac{a}{b} = \frac{a+b}{a} = 1.618.... = \phi$$

इसका मान 1 से बड़ा और 2 से छोटा, लगभग 1.6180339887498948482 होता है।

8. ऑइलर संख्या या नेपियर स्थिरांक (e) (Euler Number)

यह एक अपरिमेय संख्या है जिसे π, $\sqrt{2}$ या गोल्डन अनुपात φ की तरह ज्यामिति की मदद से परिभाषित नहीं किया जा सकता, परन्तु इसकी गणना निम्न सूत्र के आधार पर की जा सकती है -

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots$$

e = 2.71828182845904523536028747135266249775724709369995...

इस स्थिरांक का इस्तेमाल मिश्र ब्याज (Compound Interest) की गणना के लिए तथा रेडियो एक्टिव पदार्थ की अर्ध-आयु जानने के लिए किया जाता है। इसका मान 2 और 3 के बीच होता है जो गणना में लिए गए पदों की संख्या पर निर्भर करता है।

मनोज कुमार शराफ: विभिन्न विद्यालय जैसे ट्रिनिटी कॉन्वेंट, विद्या भारती, लायन्स स्कूल तथा डी.ए.वी. में गणित शिक्षक के रूप में करीब 27 वर्षों तक अध्यापन कार्य। पिछले तीन वर्षों से अज़ीम प्रेमजी फाउंडेशन, रायपुर में बतौर गणित विशेषज्ञ के रूप में कार्यरत।