Translation of Tying it up Knot Theory_without loose ends : Ramya Ramalingam From Azim premji University At Right Angles_ March, 2017

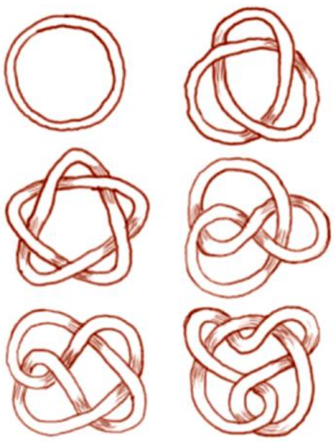
गाँठ सिद्धान्त

कोई छोर न छूटे ढीला

रम्या रामालिंगम

मुख्य शब्द : *Topology; संस्थिति-विज्ञान; Knot; गाँठ; String; डोरी; Projection; प्रक्षेपण; प्रक्षेप; Tri-colourable; त्रि-रंगीयता; Reidemeister; राइडेमाइस्टर; Unknot; अग्रन्थित गाँठ; Trefoil; तिनपतिया; Twist; भाँज; Poke; अन्तःक्षेप; Slide; सरकन.*

गाँठ सिद्धान्त, संस्थिति-विज्ञान [Topology] का एक महत्त्वपूर्ण उप-क्षेत्र है जो विभिन्न प्रकार की गाँठों के गुणधर्मों का अध्ययन करता है। यह विषय गणित की नई शाखा है और अभी विकसित हो रही है। दिलचस्प बात यह है कि इस विषय की जड़ें गणित से नहीं बल्कि भौतिकी से निकलती हैं। एक समय में भौतिकविदों का मानना था कि परमाणु और अणु गाँठदार धागों के विन्यास थे। हालाँकि, परमाणु के बाद के मॉडलों ने इस धारणा को छोड़ दिया, किन्तु गणित और विज्ञान की अन्य शाखाओं में गाँठ सिद्धान्त एक स्वतंत्र शाखा के रूप में स्थापित हो गया।



गणित की अन्य शाखाओं में भी गाँठ सिद्धान्त के इस्तेमाल हैं। ग्राफ़ सिद्धान्त में इसका काफ़ी उपयोग किया जाता है, जिसके प्रभाव फिर कम्प्यूटर विज्ञान में नेटवर्कों के अध्ययन, डेटा को व्यवस्थित करने और कम्प्यूटेशनल प्रवाह के अध्ययन में होते हैं। जीवविज्ञान में भी गाँठ सिद्धान्त के उपयोग हैं – ऐसा पाया गया है कि कुछ जीवों में, डीएनए अक्सर ख़ुद को गाँठों में ऐंठ लेता है, जिसके परिणामस्वरूप उस जीव में अलग ही तरह के कई गुणधर्म बन जाते हैं और कभी-कभी समस्याएँ भी हो जाती हैं। इसके अध्ययन में गाँठों के गुणधर्मों का ज्ञान अनिवार्य हो जाता है।

संस्थिति-विज्ञान क्या है?

यूक्लिडियन ज्यामिति में हमें त्रिभुजों की सर्वांगसमता की धारणा मिलती है। इस विषय को देखने का एक तरीक़ा यह है कि उन ***फलनों*** या ***प्रतिचित्रणों*** या ***रूपान्तरणों*** का अध्ययन किया जाए जिनके ज़रिए तल स्वयं अपने आप में बदलता है। शुरू करने के लिए, आइए हम केवल उन फलनों पर विचार करें जिनका गुणधर्म यह है कि प्रतिचित्रण के परिणामस्वरूप बिन्दुओं के किसी भी जोड़े के बीच की दूरी अपरिवर्तित रहती है। इस तरह के प्रतिचित्रण को ***समदूरिक*** (Isometry – आइसोमेट्री : 'आइसो' = समान, 'मीटर' = दूरी) के रूप में जाना जाता है। इस
तरह के प्रतिचित्रण के तहत, किसी भी आकृति को उस आकृति से प्रतिचित्रित किया जाता है जो स्वयं के सर्वांगसम हो। यहाँ 'सर्वांगसम' शब्द का प्रयोग उसके सामान्य अर्थ में हुआ है। लेकिन हम परिभाषा को घुमाकर सर्वांगसमता को, इसके सामान्य अर्थ की बजाय, प्रतिचित्रण के सन्दर्भ में परिभाषित कर सकते हैं। अर्थात, यदि इस तरह के प्रतिचित्रण का उपयोग करके आकृति A को आकृति B से प्रतिचित्रित किया जा सकता है, तो हम कहते हैं कि B, A के सर्वांगसम है और इन आकृतियों के सभी गुणधर्मों का अध्ययन जो इस प्रतिचित्रण के परिणामस्वरूप अपरिवर्तित रहते हैं, उसे हम ***यूक्लिडियन ज्यामिति [Euclidean geometry]*** कहते हैं।

ध्यान दें कि प्रतिचित्रण का स्वीकृत समूह [class] अत्यन्त महत्वपूर्ण है। यदि हम समूह को विस्तार देते हैं, तो उसके अनुसार सर्वांगसमता की धारणा बदल जाती है।

समदूरिक प्रतिचित्रण का समूह बहुत ही सीमित है; तो चलिए इसकी जगह कुछ बड़े समूह का उपयोग करते हैं। इसकी बजाय यदि हम उन फलनों पर विचार करें जिनमें निम्नलिखित गुणधर्म हैं : *किन्हीं तीन बिन्दुओं A, B, C, जिन्हें क्रमशः A', B', C' बिन्दुओं पर प्रतिचित्रित किया गया हो, के लिए कोण ABC को कोण A'B'C' के बराबर होना चाहिए;* ऐसे में हमें जो मिलता है उसे आम तौर पर ***समरूपता ज्यामिति [similarity geometry]*** कहते हैं।

संस्थिति-विज्ञान [Topology] में जो फलन किए जा सकते हैं वे बहुत बड़े समूह से सम्बन्धित हैं। इन्हें ***होमियोमॉर्फ़िज़्म्स*** कहते हैं – हिन्दी शब्द तद्वत्ता है। तकनीकी परिभाषा देने की बजाय, आसान शब्दों में कहें तो होमियोमॉर्फिस्म से आशय निरन्तर ***विरूपणों [continuous deformations]*** है। अतः, हम खींचने, सिकोड़ने, मरोड़ने, कर्तन करने आदि की अनुमति देते हैं;

लेकिन हम टूटने या फटने की अनुमति नहीं देते। यदि त्रिआयामी समष्टि [3-D space] में एक वस्तु A को निरन्तर विरूपणों का उपयोग करके दूसरी वस्तु B में परिवर्तित किया जा सकता है और B को निरन्तर विरूपणों का उपयोग करके A में परिवर्तित किया जा सकता है, तो हम कहते हैं कि A और B सांस्थितिकीय रूप से ***अविभेद्य [topologically indistinguishable]*** हैं।

इस समूह के फलनों का उपयोग करके यह देखना आसान है कि :

- किसी भी आकार का एक वृत्त किसी भी आकार और किसी भी उत्केन्द्रता के दीर्घवृत्त से सांस्थितिकीय रूप से अविभेद्य होता है।
- किसी भी आकार का एक वृत्त किसी भी आकार और किसी भी आकृति के आयत से सांस्थितिकीय रूप से अविभेद्य है।
- किसी भी लम्बाई का एक रेखाखण्ड किसी भी आकृति और किसी भी लम्बाई के तलीय चाप से सांस्थितिकीय रूप से अविभेद्य होता है, बशर्ते कि चाप किसी भी बिन्दु पर स्वयं का प्रतिच्छेद न करे।
- एक डोनट एक कॉफ़ी कप से सांस्थितिकीय रूप से अविभेद्य है (यह मानते हुए कि कप सामान्य प्रकार का है और उसका एक ही हैण्डल है!) और ये दोनों आकृतियाँ एक तश्तरी से सांस्थितिकीय रूप से भिन्न हैं।

किस प्रकार की आकृतियाँ किन अन्य आकृतियों से सांस्थितिकीय रूप से अविभेद्य हैं, यह ***संस्थिति-विज्ञान*** शब्द को समझने का एक अनौपचारिक तरीक़ा है।

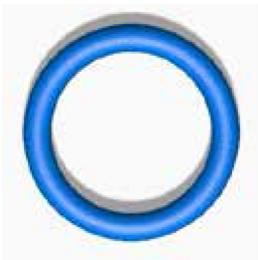
कार्बनिक रसायन विज्ञान भी दर्पण-प्रतिबिम्ब अणुओं (जो आश्चर्यजनक रूप से भिन्न गुणधर्मों वाले हो सकते हैं) के बीच भेद करने में गाँठ सिद्धान्त का उपयोग कर सकता है।

गाँठ क्या है?

हम इस विषय के बारे में शुरुआत सबसे बुनियादी प्रश्न से करते हैं : गाँठ वास्तव में क्या है? सरल शब्दों में, गाँठ को एक निश्चित तरीक़े से एक-दूसरे पर से पार की गई डोरी के टुकड़े के रूप में माना जा सकता है, जिसके सिरे एक साथ बँधे हों। परिभाषा के लिए सिरों को बाँधना विशेष रूप से महत्त्वपूर्ण है क्योंकि खुले छोरों वाली डोरी के किसी भी पैटर्न को निरन्तर विरूपण के ज़रिए किसी अन्य पैटर्न में बदला जा सकता है। अतः, सिरों को बाँधे बिना विभिन्न गाँठों के बीच अन्तर करना असम्भव हो जाता है जो उनके अध्ययन में एक अनिवार्य आवश्यकता है।

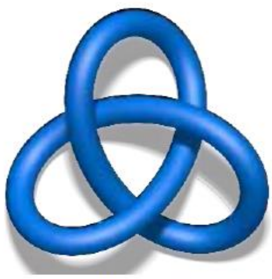
कुछ बुनियादी गाँठें

1. **अग्रन्थित गाँठ [The Unknot] :** इसे तुच्छ गाँठ के नाम से भी जाना जाता है और यह सबसे सरल गाँठ है। यह बस एक छल्ला है; इसे समझने का सबसे सरल तरीक़ा है – एक डोरी को बिना बाँधे या किसी भी बिन्दु पर इसे अपने ऊपर से पार ना करते हुए उसके दो सिरों को जोड़ दें।



चित्र-1

2. **तिनपतिया गाँठ [The Trefoil] :** अगली सरल गाँठ आश्चर्यजनक रूप से सूक्ष्म जीवों और प्रकृति में कई स्थानों पर दिखाई देती है। इसकी सबसे सरल तस्वीर में 3 क्रॉसिंग हैं। इसे ओवरहैड गाँठ भी कहा जाता है और यह उस सबसे सरल गाँठ का सिरा-बन्द रूप है जिसका उपयोग ज़्यादातर लोग डोरी बाँधने के लिए करते हैं।



चित्र-2

3. **8 के जैसी गाँठ [Figure-8 Knot] :** सबसे साधारण रूप में देखने पर इस गाँठ में 4 स्थानों पर डोरी स्वयं को पार करती है। इसे ऐसा इसलिए कहा जाता है क्योंकि यह आमतौर पर अंक 8 जैसी दिखाई देती है।

चित्र-3

प्रयोग-1 : डोरी का एक लम्बा टुकड़ा लें; यह मज़बूत लेकिन विरूपण के लायक होना चाहिए। सबसे पहले, डोरी के दोनों सिरों को एक साथ जोड़कर अग्रन्थित गाँठ बनाएँ। इसके बाद, डोरी को उसके ऊपर से पार करके और अलग-अलग क्रॉसिंग और कुण्डलियाँ बना कर इसका विरूपण करें – लेकिन डोरी न तो खोलें और न ही किसी जगह से काटें। कई क्रॉसिंग करने के बाद गाँठ को एक टेबल पर रखें। क्या बस इसे देख कर आप बता सकते हैं कि यह एक अग्रन्थित गाँठ है या यह अलग दिखती है?

प्रयोग-2 : अब, डोरी का एक और टुकड़ा लें और **चित्र-2** का उपयोग करके तिनपतिया गाँठ बनाएँ। क्या ऐसा लगता है कि यह अग्रन्थित गाँठ हो सकती है? गाँठ को इधर-उधर घुमाने और उसका विरूपण करने का प्रयास करें। क्या तिनपतिया गाँठ को ऐसा बनाना मुमक़िन है कि वह अग्रन्थित गाँठ के सरल रूप की तरह दिखे? आप 8 के जैसी गाँठ भी बनाने की कोशिश कर सकते हैं और देख सकते हैं कि क्या आप इसे तिनपतिया गाँठ या अग्रन्थित गाँठ में बदल सकते हैं।

तुल्य गाँठें

दो गाँठों को समान या एक-दूसरे के तुल्य माना जाता है, यदि आप उन्हें खोले बिना एक को दूसरे में 'विरूपित' कर सकते हैं। हालाँकि यह औपचारिक परिभाषा नहीं है, लेकिन यह सहज ही समझ में आती है। यदि आप कल्पना करते हैं कि आप गाँठ को पकड़े हुए हैं और इसे दूसरी गाँठ की तरह दिखने के लिए किसी तरह ऐंठ या मोड़ सकते हैं, तो स्पष्टतः दोनों समान होनी चाहिए। लेकिन अभी भी अधिक आधिकारिक (सख़्त) परिभाषा की आवश्यकता है, जो निम्नलिखित प्रश्नों की ओर ले जाती है :

1. हम कैसे सिद्ध करें कि दो गाँठें समान हैं?
2. हम कैसे सिद्ध करें कि दो गाँठें भिन्न हैं?

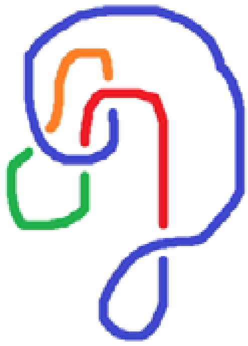
पहली नज़र में दोनों समस्याएँ एक जैसी लगती हैं, लेकिन दूसरे प्रश्न का उत्तर देना अधिक कठिन है। हम कुछ बातें रखने का प्रयास करेंगे, जो मददगार हो सकती हैं।

परिभाषाएँ

एक *प्रक्षेपण* किसी त्रिआयामी गाँठ का द्विआयामी चित्र होता है।

जिस स्थान पर प्रक्षेप के दो सूत्र मिलते हैं, उसे *क्रॉसिंग* कहा जाता है। जो सूत्र क्रॉसिंग में ऊपर रहता है उसे *ओवर-क्रॉसिंग* कहा जाता है और जो सूत्र नीचे रहता है उसे *अण्डर-क्रॉसिंग* कहा जाता है।

किसी प्रक्षेप का सूत्र गाँठ के उस टुकड़े को कहते हैं जो क्रॉसिंग के द्वारा दोनों सिरों पर कटता है। मूलतः, गाँठ प्रक्षेप को चित्रित करते समय, प्रत्येक सूत्र गाँठ के उस सबसे लम्बे टुकड़े को दर्शाता है जिसे आप अपनी पेंसिल को काग़ज़ से उठाए बिना उस बिन्दु पर खींच सकते हैं।



चित्र-4

गाँठ के सभी अलग-अलग रंग के टुकड़े सूत्रों का प्रतिनिधित्व करते हैं।

एक *शृंखला [link]* कई गाँठों का संग्रह (या एक संघ) होता है, जो सम्भवतः आपस में जुड़े या गाँठित हैं। एक n-घटक शृंखला एक ऐसी शृंखला है जिसमें n अलग-अलग गाँठें हैं।

किसी प्रक्षेपण की एक *तलीय समस्थानिकी [planar isotopy]* द्विआयामी स्थान में गाँठ के एक हिस्से का हेर-फेर है (सिकोड़कर, सीधा करके, बड़ा करके) जो प्रक्षेप की क्रॉसिंग की संख्या को *नहीं* बदलता है।

प्रक्षेपण की एक परिवेश *समस्थानिकी [ambient isotopy]* त्रिआयामी समष्टि में गाँठ का एक हेर-फेर है जो क्रॉसिंग को बदल सकता है। इसमें एकमात्र प्रतिबन्ध यह है कि गाँठ कहीं भी काटी नहीं जा सकती है।

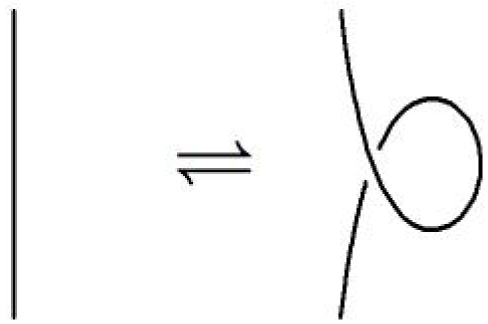
नोट : एक गाँठ के बड़ी संख्या में अलग-अलग प्रक्षेप हो सकते हैं।

राइडेमाइस्टर प्रमेय

राइडेमाइस्टर प्रमेय (जर्मन गणितज्ञ कर्ट राइडेमाइस्टर [1893-1971] के नाम पर) के अनुसार *दो प्रक्षेप एक ही गाँठ के तब और केवल तब होते हैं जब दोनों में से किसी एक को तलीय समस्थानिकों और/ या राइडेमाइस्टर चालों [Reidemeister moves] की एक शृंखला [series] का उपयोग करके दूसरे में परिवर्तित किया जा सकता हो।* अब हम समझाते हैं कि इसका क्या अर्थ है, लेकिन हम यहाँ प्रमेय को सिद्ध करने की कोशिश नहीं करेंगे।

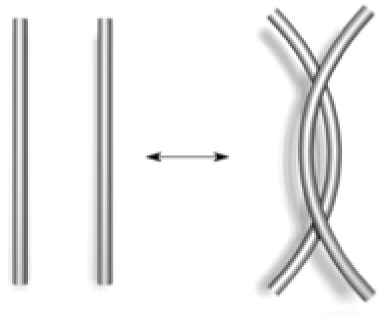
हमें पहले ***'राइडेमाइस्टर चाल' [Reidemeister move]*** शब्द की व्याख्या करने की आवश्यकता है। यह पाया गया है कि तीन प्रकार की चालें हैं जो उन तरीक़ों को शामिल करती हैं जिनसे आप एक गाँठ में हेर-फेर कर सकते हैं, बशर्ते आप इसे कहीं भी न काटें। ये तीन चालें कहलाती हैं :

i. **ऐंठना (Twist – आरएम 1) :** यदि आपके पास गाँठ का एक सीधा टुकड़ा है और आप इसे एक बार ऐंठ दें ताकि एक एकल क्रॉसिंग बनाई जा सके, तो आपने राइडेमाइस्टर चाल-1 का प्रदर्शन किया है; **चित्र-5** देखें।



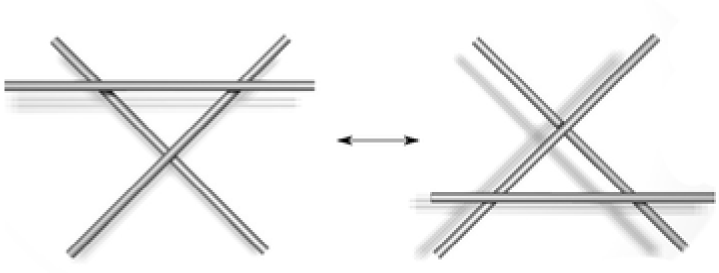
चित्र-5

ii. **अन्तःक्षेप (Poke – आरएम 2) :** राइडेमाइस्टर चाल-2 करने के लिए, आपको गाँठ के एक हिस्से को गाँठ के दूसरे हिस्से के नीचे (या ऊपर) धकेलना होगा ताकि आपको एक-दूसरे के बगल में दो अण्डर-क्रॉसिंग (या ओवर-क्रॉसिंग) मिलें; **चित्र-6** देखें।



चित्र-6

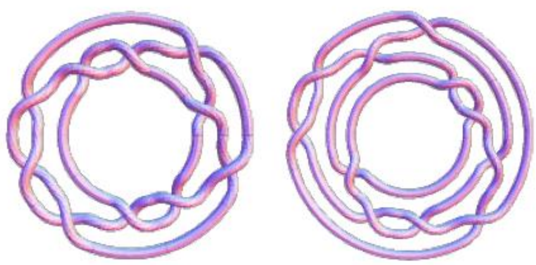
iii. **सरकन (Slide – आरएम 3) :** यदि गाँठ का एक हिस्सा एक-दूसरे को पार करने वाले दो अन्य टुकड़ों के नीचे (या ऊपर) से जाता है, तो उस हिस्से को दूसरी तरफ़ क्रॉसिंग के नीचे (या ऊपर) सरकाया जा सकता है – यह राइडेमाइस्टर चाल-3 है; **चित्र-7** देखें।



चित्र-7

यदि दो गाँठ आरेख एक ही गाँठ के प्रक्षेपण हैं, तो राइडेमाइस्टर प्रमेय स्पष्ट रूप से इस तथ्य को स्थापित करना आसान बनाता है। यदि हम एक प्रक्षेपण को दूसरे के समान बनाने के लिए राइडेमाइस्टर चाल का उपयोग कर सकते हैं, तो यह प्रमेय हमें बताता है कि वे एक ही गाँठ हैं।

लेकिन अगर हम ऐसा नहीं कर पाते, तो हम यह नहीं मान सकते हैं कि दो गाँठ-प्रक्षेपण भिन्न हैं; शायद हमने राइडेमाइस्टर चालों के ग़लत सेट का इस्तेमाल किया है! गाँठों के बीच वास्तव में भेद करने के लिए, हमें एक ***निश्चर [invariant]*** की आवश्यकता होती है; कुछ ऐसा जो गाँठ के लिए नहीं बदलता है, चाहे गाँठ के किसी भी प्रक्षेपण का उपयोग किया जाए। तब, यदि दो अलग-अलग प्रक्षेपणों के अलग-अलग निश्चर हैं, तो हम दिखा सकते हैं कि दो गाँठें अलग हैं। इस उद्देश्य के लिए गाँठ की ***त्रि-रंगीयता [tri-colourability]*** को परिभाषित किया गया था।



निश्चर क्या है?

गणित में निश्चरता एक शक्तिशाली साधन है। इसका उपयोग अक्सर तब किया जाता है जब हम यह साबित करने की कोशिश कर रहे होते हैं कि कुछ ऐसा है जो सम्भव नहीं है – जो कभी-कभी यह साबित करने से कहीं अधिक कठिन हो सकता है कि कुछ सम्भव है। यहाँ महत्त्वपूर्ण क़दम कोई ऐसी मात्रा को ढूँढ़ना है जो तब भी नहीं बदले जब हम उस विन्यास में विभिन्न रूपान्तरणों का अनुप्रयोग करें। गणित में कई प्रसिद्ध असम्भवता परिणाम एक उपयुक्त निश्चर की पहचान और कुशल उपयोग के माध्यम से सिद्ध होते हैं। उदाहरण के लिए, यह हो सकता है कि एक निश्चित सुपरिभाषित मात्रा है जिसकी पैरिटी अनुमत रूपान्तरणों के परिणामस्वरूप नहीं बदलती है, लेकिन यहाँ ऐसा है कि दो दी गई अवस्थाओं से जुड़ी मात्राओं की पैरिटी भिन्न हैं। ऐसे में, यह स्पष्ट हो जाता है कि रूपान्तरणों का कोई भी क्रम आपको एक अवस्था से दूसरी अवस्था में नहीं ले जाएगा। इस शैली की एक प्रसिद्ध समस्या यूक्लिडियन ज्यामितीय उपकरणों (यानी, परकार और अचिह्नित सीधमापी) का उपयोग करके किसी मनमाने कोण को तीन बराबर भागों में विभाजित करने की विधि खोजने की है। प्राचीन यूनानी भूमितीज्ञ इस समस्या से जूझते रहे लेकिन इससे पार नहीं पा सके। पूरी दो सहस्राब्दियों के बाद, उन्नीसवीं सदी के पूर्वार्द्ध में, यह दिखाया गया कि ऐसी कोई प्रक्रिया हो ही नहीं सकती है। यह एक असम्भव परिणाम का एक उदाहरण है। हमारे सन्दर्भ में हम दूसरे प्रश्न में मदद के लिए निश्चर का उपयोग कर सकते हैं – यानी, यह दिखाना कि दो गाँठें समान नहीं हैं।

निश्चरों का उपयोग केवल असम्भव परिणामों को सिद्ध करने के लिए नहीं किया जाता है। निश्चर की धारणाओं का उपयोग करके त्रिभुजों और शंकु परिच्छेदों से सम्बन्धित कई सुन्दर परिणाम सिद्ध किए जा सकते हैं। इसी तरह, प्रारम्भिक संख्या सिद्धान्त में विभाज्यता से सम्बन्धित कुछ परिणामों को ऐसी धारणाओं का उपयोग करके सिद्ध किया गया है।

त्रि-रंगीयता

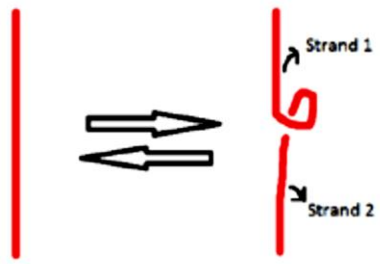
एक गाँठ को *त्रि-रंगीय* के रूप में तब परिभाषित किया जाता है, जब केवल 2 या 3 रंगों का उपयोग करके प्रक्षेपण के सूत्रों को रंगा जा सकता हो, वह भी इस तरह कि प्रत्येक क्रॉसिंग पर या तो सभी सूत्र एक ही रंग के हों या सभी सूत्र अलग-अलग रंगों के हों।
त्रि-रंगीयता उपयोगी है क्योंकि यह किसी भी गाँठ के लिए एक निश्चर होती है – यानी, यदि किसी गाँठ का एक प्रक्षेपण त्रि-रंगीय है, तो उस गाँठ के सभी प्रक्षेपण त्रि-रंगीय होते हैं।

प्रमाण

यह साबित करने के लिए कि गाँठ के प्रक्षेपण के साथ त्रि-रंगीयता नहीं बदलती है, हमें केवल यह दिखाने की ज़रूरत है कि कोई प्रक्षेपण त्रि-रंगीय होगा या नहीं, यह किसी भी राइडेमाइस्टर चाल से प्रभावित नहीं होता है। यह स्वतः स्पष्ट होना चाहिए क्योंकि किसी गाँठ के किसी भी प्रक्षेपण को उसी गाँठ के किसी अन्य प्रक्षेपण में केवल राइडेमाइस्टर चाल का उपयोग करके परिवर्तित किया जा सकता है।

आरएम-1

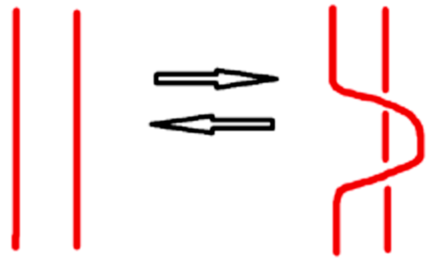
जब हम ग़ैर-ऐंठित सूत्र से एक ऐंठन (जिसमें हम दो सूत्र देख सकते हैं) पर जाते हैं, तो आरेख से यह स्पष्ट होता है कि ऐंठे हुए प्रक्षेपण को इस तरह से रंगा जा सकता है जो त्रि-रंगीयता को बरक़रार रखता है। जब हम विपरीत दिशा को देखते हैं (ऐंठन से बिना ग़ैर-ऐंठन), तो हम देख सकते हैं कि आरेख त्रि-रंगीय हो इसके लिए सूत्र-1 और सूत्र-2 को रंगने का केवल एक ही तरीक़ा है – दोनों सूत्रों का रंग एक जैसा होना चाहिए। इस मामले में भी, हम देख सकते हैं कि त्रि-रंगीयता ऐंठनहीन में संरक्षित है। इस प्रकार, त्रि-रंगीयता राइडेमाइस्टर चाल-1 द्वारा संरक्षित है।



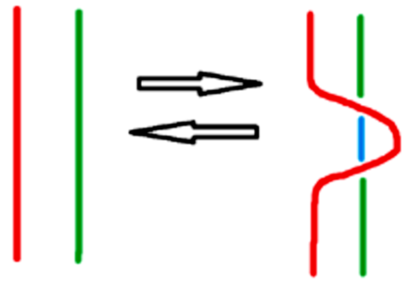
चित्र-8

आरएम-2

राइडेमाइस्टर चाल-2 में, दो सम्भावनाएँ हैं : दो सूत्र, जिनमें से एक, दूसरे पर 'अन्तःक्षेप' करता है, एक ही रंग के हो सकते हैं (**चित्र-9**) या वे दो अलग-अलग रंगों के हो सकते हैं (**चित्र-10**)। दोनों ही मामलों में, हम देख सकते हैं कि त्रि-रंगीयता को संरक्षित किया जा सकता है।



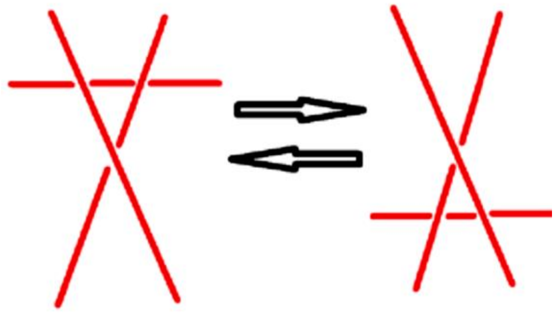
चित्र-9 – स्थिति-1



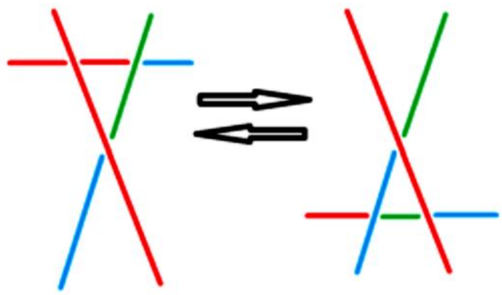
चित्र-10 – स्थिति-2

आरएम-3

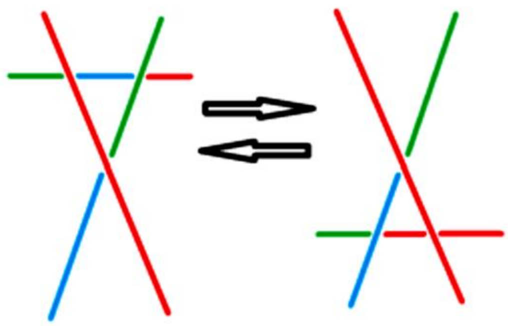
राइडेमाइस्टर चाल-3 के सूत्रों को रंगने के 3 तरीक़े हैं, जिनमें सभी क्रॉसिंग त्रि-रंगीयता की शर्तों को पूरा करती हैं। इन 3 मामलों में से प्रत्येक में, चाल के बाद नई क्रॉसिंग को फिर से इस तरह रंगना सम्भव है कि त्रि-रंगीयता संरक्षित रहे।



चित्र-11 – स्थिति-1



चित्र-12 – स्थिति-2

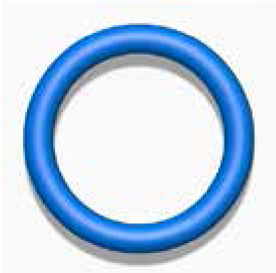


चित्र-13 – स्थिति-3

जैसा कि हम चित्रों में देखते हैं, कोई भी राइडेमाइस्टर चाल चलने के बाद त्रि-रंगीयता हमेशा संरक्षित रहती है। अर्थात यदि किसी गाँठ का एक प्रक्षेपण त्रि-रंगीय है, तो उस गाँठ के सभी प्रक्षेपण त्रि-रंगीय होंगे। अतः, किसी दी गई गाँठ के लिए त्रि-रंगीयता एक निश्चर है; एक गाँठ या तो त्रि-रंगीय होगी या नहीं होगी।

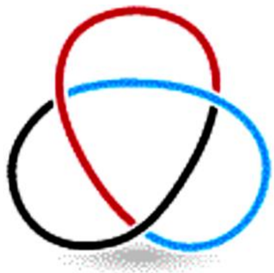
नोट : उपरोक्त को कहने का एक अन्य तरीक़ा यह है कि यदि गाँठ का कोई एक प्रक्षेपण भी त्रि-रंगीय नहीं है, तो गाँठ का कोई प्रक्षेपण त्रि-रंगीय नहीं है। यह स्वतः स्पष्ट होना चाहिए क्योंकि राइडेमाइस्टर चालें त्रि-रंगीयता को बनाए रखती हैं।

तिनपतिया से अग्रन्थित गाँठ को अलग करना



चित्र-14

त्रि-रंगीयता की समझ बनने तक हमारे पास यह साबित करने का कोई निश्चित तरीक़ा नहीं था कि यक़ीनी तौर पर दो सबसे सरल गाँठें – अग्रन्थित गाँठ और तिनपतिया – वास्तव में अलग-अलग हैं। जब हम उन्हें देखते हैं और एक को दूसरे में बदलने की कोशिश करते हैं, तो यह सहज रूप से स्पष्ट लगता है कि वे समान नहीं हैं, किन्तु यह एक ठोस प्रमाण नहीं है। लेकिन अब हमारे पास एक औज़ार है – निश्चर – जिसका हम उपयोग कर सकते हैं। अग्रन्थित गाँठ के ऊपर दिए प्रक्षेपण में, केवल एक सूत्र है – इसलिए हम इसे दो या तीन रंगों का उपयोग करके रंग नहीं सकते हैं, जो कि त्रि-रंगीयता की एक आवश्यक शर्त है। इसलिए अग्रन्थित गाँठ त्रि-रंगीय नहीं है। ऊपर (दाईं ओर) तिनपतिया की तस्वीर में, हम देख सकते हैं कि यह त्रि-रंगीय है। इसलिए, हमारे पास दो गाँठों के बीच अन्तर है। चूँकि तिनपतिया गाँठ त्रि-रंगीय है जबकि अग्रन्थित गाँठ नहीं है, इसलिए दोनों गाँठें भिन्न हैं।



चित्र-15

क्या यह काफ़ी है?

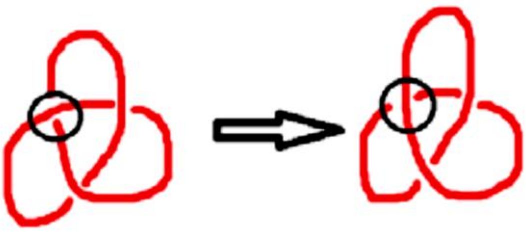
स्पष्ट है कि त्रि-रंगीयता के अपने उपयोग हैं, क्योंकि यह हमें दो गाँठों के बीच निश्चित रूप से अन्तर करने देती है, कुछ ऐसा जो हम अब तक नहीं कर पाए थे। लेकिन अगर हम थोड़ा और गहराई से देखें, तो समझ में आता है कि इससे हमें ज़्यादा मदद नहीं मिलती है। त्रि-रंगीयता एक बूलीयन निश्चर है – एक गाँठ में या तो यह गुणधर्म होता है या नहीं होता। दुर्भाग्य से, इसका मतलब है कि ऐसी बहुत सारी गाँठें हैं जिन्हें हम अभी अलग-अलग नहीं कर सकते हैं; हमारे पास सिर्फ़ दो श्रेणियाँ हैं – ऐसी गाँठें जो त्रि-रंगीय हैं और वे जो नहीं हैं। उन श्रेणियों के भीतर, हमारे पास यह साबित करने का कोई तरीक़ा नहीं है कि दो गाँठें भिन्न हैं। यक़ीनन, निश्चर की धारणा ने पहले हमारी मदद की है – शायद हमें बस एक अधिक बहुमुखी निश्चर की आवश्यकता है; सम्भवतः एक ऐसा फलन जिसमें केवल हाँ या नहीं (जो कि त्रि-रंगीयता प्रदान करती है) की बजाय अधिक परिणाम मिलते हों – शायद एक ऐसा फलन जो प्रत्येक गाँठ के लिए अद्‌वितीय हो।

कुछ और निश्चर

गाँठों में अन्तर करने के और अधिक तरीक़े सामने लाने के प्रयास में गणितज्ञों ने अधिक-से-अधिक निश्चरों को परिभाषित किया है, जिनमें से कुछ का मैं नीचे वर्णन कर रही हूँ :

- *अग्रन्थित गाँठ संख्या [unknotting number]*, क्रॉसिंग की वह न्यूनतम संख्या है जिसकी अदला-बदली आपको एक गाँठ को एक अग्रन्थित गाँठ में परिवर्तित करने के लिए करनी होगी। किसी क्रॉसिंग की अदला-बदली करने से हमारा मतलब है कि उस विशिष्ट क्रॉसिंग पर, हम ओवरक्रॉसिंग को अण्डर-क्रॉसिंग में बदल देते हैं और ऐसा ही इसके उलट भी करते हैं।

उदाहरण के लिए, तिनपतिया गाँठ की अग्रन्थन संख्या 1 है :



चित्र-16

दाईं ओर की तस्वीर वास्तव में अग्रन्थित गाँठ है।

- यदि ऐसा कम-से-कम एक प्रक्षेप मौजूद है जहाँ सूत्रों की क्रॉसिंग के ऊपर और नीचे के बीच प्रत्यावर्तित होता है, तो वह गाँठ *एकान्तरी [alternating]* होती है।

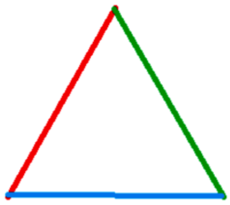
उदाहरण के लिए, तिनपतिया और 8 जैसी गाँठ दोनों एकान्तरी गाँठें हैं क्योंकि यदि आप इस लेख की शुरुआत में दिए गए इस गाँठ के नियमित प्रक्षेपणों को देखें, तो आप पाएँगे कि सम्पूर्ण गाँठ के दौरान यह गाँठें ओवर-क्रॉसिंग और अण्डर-क्रॉसिंग में प्रत्यावर्तित होती रहती हैं।

- किसी गाँठ की *क्रॉसिंग संख्या [crossing number]* उसके किसी भी प्रक्षेपण में क्रॉसिंग की न्यूनतम संख्या है।

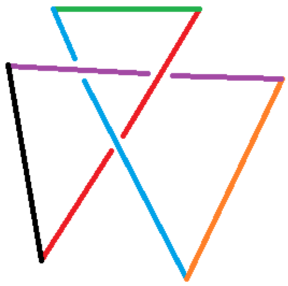
अग्रन्थित गाँठ की क्रॉसिंग संख्या 0 है। तिनपतिया की क्रॉसिंग संख्या 3 है। ध्यान दें, इसका मतलब यह है कि हालाँकि स्पष्टतः तिनपतिया गाँठ के ऐसे प्रक्षेपण हैं जिन्हें 3 से अधिक क्रॉसिंग के साथ खींचा जा सकता है, लेकिन तिनपतिया के किसी भी प्रक्षेपण में क्रासिंग की न्यूनतम संख्या 3 होनी चाहिए। अर्थात, तिनपतिया गाँठ का ऐसा कोई प्रक्षेपण नहीं है जिसमें 3 से कम क्रॉसिंग हों।

- एक गाँठ की छड़ी संख्या [stick number], गाँठ बनाने के लिए आवश्यक न्यूनतम 'छड़ियाँ' (सीधी रेखाएँ) होती है।

अग्रन्थित गाँठ की छड़ी संख्या 3 है और तिनपतिया की छड़ी संख्या 6 है, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।



चित्र-17



चित्र-18

ये गाँठों के बीच अन्तर करने के लिए बनाए गए कुछ निश्चर हैं।

तलाश अभी जारी है...

हालाँकि ये निश्चर गाँठों में भिन्नता साबित करने में बेहद उपयोगी हैं, लेकिन ये पर्याप्त नहीं हैं। इनमें से कोई भी निश्चर प्रत्येक गाँठ के लिए अद्‌वितीय नहीं है – उदाहरण के लिए, कम-से-कम 6 से 7 गाँठों की अग्रन्थन संख्या 1 है। प्रत्येक गाँठ के लिए कुछ अद्‌वितीय खोजने हेतु, गणितज्ञों ने एक गाँठ बहुपद विकसित करने की कोशिश की – यह चरों के रूप में एक व्यंजक है जो गाँठ का वर्णन करता है। 1928 में, ***एलेक्ज़ेण्डर बहुपद [Alexander polynomial]*** पेश किया गया था, जो अपनी तरह का पहला बहुपद था। बाद में, 1969 में, कॉनवे ने ***कॉनवे बहुपद [Conway polynomial]*** की ईजाद की, जो गणना के सन्दर्भ में एलेक्ज़ेण्डर बहुपद की तुलना में बहुत सरल है। 1984 में, ***जोन्स बहुपद [Jones polynomial]*** नामक एक आविष्कार के कुछ महीनों बाद, छह लोगों के एक समूह ने सामूहिक रूप से ***होम्फ़ी बहुपद [HOMFLY polynomial]*** बनाया, जो अब तक बने अन्य सभी बहुपदों का एक ***अधिसमुच्चय [superset]*** है। हालाँकि, इस क्षेत्र में **होम्फ़ी बहुपद** ने अब तक की तुलना में बड़ी उपलब्धि हासिल की, किन्तु यह एक आश्चर्यजनक और साथ ही निराशाजनक सच्चाई है कि यह अभी भी पर्याप्त नहीं है। एक ही **होम्फ़ी बहुपद** वाली दो गाँठों की खोज की गई है, लेकिन अन्य

विधियों का उपयोग करके यह सिद्ध किया गया है कि वे अलग-अलग गाँठें हैं। इसलिए अब तक इस बात का कोई निश्चित उत्तर नहीं है कि यह कैसे साबित किया जाए कि दो गाँठें भिन्न हैं।

जैसा कि पहले उल्लेख किया गया है, गाँठ सिद्धान्त एक अपेक्षाकृत नया विषय है। इस बारे में अभी और बहुत शोध करने की ज़रूरत है। लेकिन हम यह ज़रूर जानते हैं कि यह एक बहुत ही रोचक विषय है – और किसे पता, हो सकता है कि आप वास्तव में यह साबित करने का कोई तरीक़ा खोज सकें कि दो गाँठें भिन्न हैं?

सन्दर्भ :

1. Colin C. Adams, The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots

2. Charles Livingston, Knot Theory (Mathematical Association of America Textbooks)

3. Richard H. Crowell and Ralph H. Fox, Introduction to Knot Theory. Chapter 1 (Dover Books on Mathematics)

आभार :

लेख के कुछ चित्र निम्नलिखित वैबसाइटों से लिए गए हैं :

1. http://www.wikiwand.com/en/Unknot
2. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Trefoil_Knot.png
3. https://collegemathteaching.wordpress.com/tag/knot-theory/
4. http://xingyuyang.blogspot.in/2016/02/reidemeister-moves.html
5. https://en.wikipedia.org/wiki/Reidemeister_move#/media/File:Reidemeister_move_2.png
6. https://en.wikipedia.org/wiki/Reidemeister_move#/media/File:Reidemeister_move_3.png

----

रम्या रामालिंगम नेशनल पब्लिक स्कूल, एचएसआर लेआउट, बेंगलूरु की कक्षा-12 की छात्रा हैं। उन्होंने 2015 में कर्नाटक क्षेत्रीय गणित ओलम्पियाड में पाँचवाँ स्थान प्राप्त किया था। भारतीय सांख्यिकी संस्थान, बेंगलूरु में भारतीय राष्ट्रीय गणित ओलम्पियाड (आईएनएमओ) शिविर में भाग लिया और आईएनएमओ 2016 में शामिल हुईं। वे एएमसी-10 (2015) (अमेरिकन मैथेमैटिकल कॉम्पिटिशन) और एएमसी-12 (2016, 2017) के ऑनर रोल पर थीं। उन्हें अमेरिकन इंविटेशनल मैथेमैटिक्स एक्ज़ामिनेशन (2015, 2016, 2017) और एमआईटी में

मैथ प्राइज़ फ़ॉर गर्ल्स (2015, 2016) के लिए आमंत्रित किया गया था। उन्होंने 2016 में गाँठ सिद्धान्त पर स्टैनफ़ोर्ड प्री-कॉलेजिएट समर इंस्टीट्यूट मैथ कोर्स में भाग लिया। उन्हें पाणिनी भाषाविज्ञान ओलम्पियाड (जनवरी 2017) में भारत में शीर्ष सत्रह में रखा गया था और जून 2017 में उस टीम में स्थान के लिए प्रतिस्पर्धा करेंगी जो अन्तर्राष्ट्रीय भाषाई ओलम्पियाड 2017 में भारत का प्रतिनिधित्व करेगी। वे एक उत्साही पाठक हैं और लेखन, संगीत और बास्केटबॉल में गहरी रुचि रखती हैं।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **अनुवाद पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय (सभी एकलव्य फ़ाउण्डेशन) **सम्पादन :** राजेश उत्साही