प्राथमिक स्तर से गणितीय सोच का विकास

तान्या सक्सेना

प्रमेय सिद्ध करना, निगमनात्मक तर्क करना गणित शिक्षा का केन्द्र माना जाता है। परन्तु अकसर शिक्षक इसे कक्षा-कक्ष की सीखने-सिखाने की प्रक्रिया से जोड़ नहीं पाते एवं विद्यार्थी प्रायः प्रमेय को महज़ परीक्षा हेतु याद कर लेते हैं। इस समस्या की विवेचना करते हुए हम प्रस्तुत आलेख में गणितीय तर्क के आयामों को समझेंगे जिससे गणितीय तर्क के विकास के लिए प्राथमिक स्तर से ही गणित सीखने-सिखाने में जगह बनाई जा सके। यह आलेख देश-विदेश में किए गए शोध के आधार पर गणितीय तर्क विकास के लिए कुछ पेडागॉजिकल तरीक़े प्रस्तुत करता है। साथ में एनसीईआरटी और छत्तीसगढ़ की गणित की पाठ्यपुस्तकों में प्राथमिक स्तर पर किए गए प्रयत्नों को भी प्रस्तुत करता

विद्यार्थियों / बच्चों में तार्किक चिन्तन विकसित करना गणित शिक्षा का एक मुख्य उद्देश्य है। यह बात *एनसीएफ़ 2005* एवं *गणित शिक्षा के पोजीशन पेपर 2006* में गणित के लक्ष्यों में शामिल है। भारत में गणित की पाठ्यपुस्तकों में माध्यमिक-उच्च माध्यमिक स्तर पर विद्यार्थी कथन (प्रमेय) को सिद्ध करने की प्रक्रिया स्वयं करना व समझना आरम्भ करते हैं। किन्तु साथी शिक्षकों के कक्षा अनुभव यह बताते हैं कि तार्किक चिन्तन के उद्देश्य से किए गए यह प्रयत्न शायद पर्याप्त नहीं हैं। मैंने भी यह पाया कि अकसर विद्यार्थी प्रमेय सिद्ध करना, या निगमनात्मक तर्क (deductive reasoning) को समझ नहीं पाते और केवल परीक्षा हेतु उसे याद कर लेते हैं।

गणित शिक्षण के द्वारा तार्किक चिन्तन को विकसित करने पर भारत के शिक्षाविदों के साथ-साथ दूसरे देशों के गणितज्ञ भी चर्चा कर रहे हैं। सिद्ध करना या तार्किक चिन्तन को गणित शिक्षा का केन्द्र मानते हुए वे इस बात पर चर्चा और शोध कर रहे हैं कि तार्किक चिन्तन गणित सीखने-सिखाने (कक्षा में) के दौरान कैसे विकसित करें? यह बड़ा सवाल कुछ मूल सवालों से जुड़ता है– गणित में तार्किक चिन्तन से क्या अर्थ है, किस प्रकार की गणितीय अवधारणाओं या सवालों के द्वारा तार्किक चिन्तन विकसित कर सकते हैं, और कैसे प्राथमिक और उच्च प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थियों को ऐसे मौक़े दिए जा सकते हैं? इस सन्दर्भ में बॉल एवं उनके साथियों द्वारा लिखा गया एक पर्चा उल्लेखनीय है।

सन् 2002 में प्रकाशित बॉल एवं उनके चार साथियों द्वारा लिखित *टीचिंग ऑफ़ प्रूफ़्स,* प्रूफ़्स यानी उपपत्ति पर किए गए शोधों का एक संकलन है। यह शोध प्राथमिक, उच्च-माध्यमिक और उच्चतर माध्यमिक स्तरों के विद्यार्थियों के साथ किए गए हैं। इस संकलन में लेखक उपपत्ति (प्रूफ़्स) को गणित शिक्षा का एक मुख्य लक्ष्य मानते हुए उपपत्ति सीखने के मूल बिन्दु, उन बिन्दुओं को विकसित करने के तरीक़े एवं उनसे जुड़ी चुनौतियों पर चर्चा करते हैं। साथ ही प्राथमिक कक्षा से ही तार्किक चिन्तन के विकास को प्रोत्साहित करते हैं। प्रस्तुत लेख में हम बॉल एवं उनके साथियों द्वारा किए गए शोध को आधार बनाकर तार्किक चिन्तन के विकास

से जुड़े उपरोक्त बिन्दुओं और सवालों पर चर्चा करेंगे। साथ ही एनसीईआरटी और छत्तीसगढ़ की पाठ्यपुस्तकों में इस दिशा में किए गए प्रयत्नों का विवेचन करेंगे।

गणित में तार्किक चिन्तन से क्या अभिप्राय है?

जैसा कि बॉल एवं अन्य (2002) कहते हैं कि गणितीय तार्किक चिन्तन (मेथेमेटिकल रीज़निंग) कोई एकमात्र कौशल नहीं, अपितु गणित के कुछ मूल कौशलों का संकलन (set) है। गणितीय रीज़निंग, पड़ताल (enquiry) का एक सम्भव साधन है जिसके द्वारा विद्यार्थी गणित में नए विचारों / वस्तुओं की खोज (discovery) और अन्वेषण (exploration) कर सकते हैं। इसमें अपने अनुसार परिभाषा बनाना या बीजगणित के किसी सवाल को नए तरीक़े से हल करना जैसी बातें भी शामिल हैं। इसके अतिरिक्त, गणितीय रीज़निंग विद्यार्थियों में गणितीय कथन, दावे या किसी गणितीय प्रक्रिया को सिद्ध करने में भी मददगार हो सकती है। आख़िर कैसे?

शोधकर्ता कहते हैं कि सिद्ध (प्रूव) करना 'दिमाग़ की आदतों' (habits of mind) से जुड़ा है एवं विश्वास (belief), सहज-बोध (intuition), सामाजिक नियम (social norms), दृढ़ता (conviction) या किसी प्राधिकारी का परिप्रेक्ष्य (perception of authority) जैसे कारक उसे प्रभावित करते हैं– {क्लीमेन्ट्स एवं बातिस्ता (1992); हीली एवं होयल्स (2000)}। अकसर जब किसी विद्यार्थी से कक्षा में यह सवाल पूछा जाता है कि क्या आप कथन P को सत्य सिद्ध कर सकते हैं? यह सवाल असल में दो सवालों को जोड़कर बना है– पहला, क्या आप कथन P पर विश्वास करते हैं? और अगर हाँ तो दूसरा सवाल, आप कथन P पर क्यों विश्वास करते हैं?

यहाँ पर विद्यार्थी अपने सहज-बोध, पुराने अनुभवजन्य साक्ष्य, उदाहरण, या परिभाषा टटोलते हुए कथन P को जाँचते हैं, अथवा कई बार बाह्य जानकार (external authority) के कहे को मानते हुए आगे बढ़ जाते हैं। उदाहरणस्वरूप, यह गणितीय कथन लें कि किन्हीं दो सम संख्याओं का जोड़ एक सम संख्या होती है। इसकी सत्यता या असत्यता को जाँचने हेतु अथवा अपने विश्वास या सहज-बोध को तार्किक तथ्यों से जोड़ने हेतु शायद वे कुछ अनुभवजन्य साक्ष्य, जैसे– 8 + 4 = 12, का उपयोग करेंगे, सम संख्या की परिभाषा, उसके गुणों को जाँचेंगे, आदि।

उपरोक्त चर्चा के आधार पर मैं यह रेखांकित करना चाहती हूँ कि गणित में रीज़निंग का विकास या सिद्ध करना एक जटिल प्रक्रिया है जिसे सहजता और क्रमात्मक ढंग से पढ़ाया जाना चाहिए। प्रूफ़्स शिक्षण के प्रयास की शैक्षिक असफलता दर्शाती है कि माध्यमिक और उच्च-माध्यमिक स्तर पर वर्तमान पाठ्यक्रम जिस प्रकार प्रूफ़्स से परिचय कराता व उसके विकास को समझाता है, वह शायद तार्किक चिन्तन के विकास हेतु पर्याप्त नहीं है। जैसे यह धारणा, कि गणितीय तर्क और प्रूफ़्स की समझ प्रमेय लिखते हुए ही विकसित हो सकती है और सीखने-सिखाने की प्रक्रिया को बहुत सीमित कर देती है। अतः कक्षा में ऐसे मौक़े देने होंगे जहाँ विद्यार्थी खोजबीन करें, पैटर्न पर काम करें, कथनों को सिद्ध करने के लिए ख़ुद तर्क ढूँढ़ें और छोटे समूहों में एक दूसरे के तर्कों पर बात करें, ख़ुद सामान्यीकरण करें और दावे बनाएँ। ऐसे मौक़ों के लिए पर्याप्त समय और अवसर तभी मिल सकता है जब प्राथमिक शालाओं से प्रयत्न किया जाए। अतः यह आवश्यक हो जाता है कि गणित पाठ्यक्रम में तार्किक सोच या मेथेमेटिकल रीज़निंग के मौक़े प्राथमिक स्तर से ही सम्मिलित किए जाएँ।

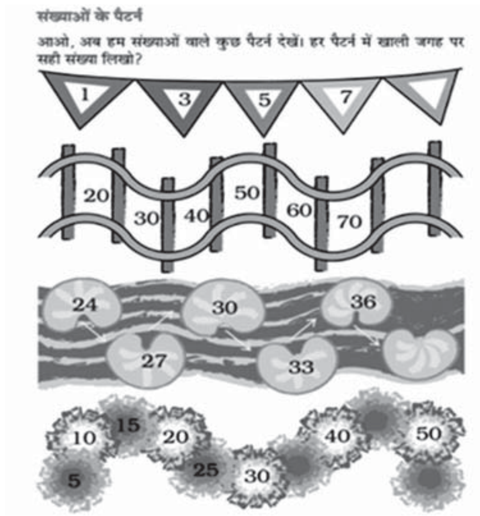
प्राथमिक स्तर पर तार्किक चिन्तन के विकास हेतु किए गए प्रयत्न

उपरोक्त चर्चानुसार, गणितीय तार्किक क्षमता और निगमनात्मक सोच के विकास हेतु प्राथमिक कक्षाओं से ही प्रयत्न करने होंगे। अतः प्राथमिक स्तर पर ऐसे अधिक-से-अधिक

अवसर दिए जा सकते हैं जहाँ विद्यार्थी संख्याओं के साथ खेलें, उनके स्वरूप, पैटर्न, आपसी सम्बन्धों को समझें और उनकी परिभाषा की व्याख्या करते हुए उनका उपयोग करें। आगे की कक्षाओं में इस समझ का स्थापन धीरे-धीरे औपचारिक प्रूफ़्स तक किया जा सकता है। ऐसे ही प्रयत्न एनसीईआरटी और छत्तीसगढ़ की पाठ्यपुस्तकों में देखे जा सकते हैं। प्रस्तुत खण्ड में इन पुस्तकों से हम कुछ बिन्दु एवं उदाहरण प्रस्तुत करेंगे।

एनसीईआरटी कक्षा 2 की पाठ्यपुस्तक से

प्राथमिक कक्षाओं में एक मुख्य कोशिश गणित को मज़ेदार और रुचिकर बनाने की होती है। अतः यह प्रयत्न किया जाता है कि आसपास की मूर्त वस्तुओं पर आधारित गतिविधियाँ दी जाएँ जिनसे बच्चों को तार्किक और अमूर्त चिन्तन करने या सोचने के लायक़ बनाया जा सके। इस स्तर पर कक्षा में खेल, पहेलियों, कथाओं के द्वारा संख्याओं को जोड़ा जा सकता है। पैटर्न की पहचान गणित में अहम है। पैटर्न पुनरावृत्ति को देखने और जाँचने के कौशल का विकास करते हैं, साथ ही यह ऐसी गणितीय सोच की नींव रखते हैं जो बीजगणित और सामान्यीकरण का आधार है। इसे आकारों, संख्याओं की आसान पुनरावृत्ति से शुरू करते हुए जटिल बनाया जा सकता है जिसके दौरान बच्चे पुनरावृत्ति के नियम को समझेंगे और नए पैटर्न बनाएँगे। चित्र 1 में संख्याओं के पैटर्न दिए गए हैं, जहाँ बच्चे संख्याओं के निम्न पैटर्न में निहित तार्किक नियम को पता करके उसे आगे बढ़ाएँगे। जैसे– 24, 27, 30, 33, 36, ... में बच्चे यह पता करेंगे कि हर संख्या पिछली संख्या से 3 अंक बड़ी है, और इसी तरह ठीक अगली संख्या लिखी जाएगी।



चित्र 1

एनसीईआरटी कक्षा 4 की पाठ्यपुस्तक से

गणितीय रूप से सोचने और तार्किक क्षमता के विकास के लिए गणित की बुनियादी अवधारणा में निहित तार्किकता को समझना और कौशल विकसित करना भी ज़रूरी है। जैसे– दस दशमलव आधारित संख्या पद्धति की समझ, अंक संक्रियाओं अर्थात जोड़ने, घटाने में गणितीय तर्क को खोजना और उस कौशल का दूसरी जगह उपयोग कर पाना। अकसर देखा जाता है कि बच्चे सवाल हल करके एक विशिष्ट जवाब पता कर लेते हैं, पर अनुमान लगाना उन्हें कठिन लगता है, जिसमें विभिन्न तरीक़ों / दिशाओं से सोचना व आकलन करना शामिल है, और यह कौशल गणितीय तार्किकता के लिए अहम है। इसलिए ऐसे अवसर भी दिए जा सकते हैं जो अनुमान लगाने, रणनीति या योजना बनाने को प्रोत्साहित करें। नीचे बॉक्स 1 का उदाहरण बच्चों को अनुमान लगाने और ऐसे तरीक़े खोजने के मौक़े देता है, जहाँ बच्चे अपने कक्षा-कक्ष की ऊँचाई की क़ुतुब मीनार की ऊँचाई से तुलना करते हुए एक संख्या के रूप में जवाब का अन्दाज़ा लगाएँगे।

कितने कमरे ऊँचा?

कुतुब मीनार 72 मीटर ऊँची है।

तुम्हारी कक्षा का कमरा लगभग कितने मीटर ऊँचा है?

अंदाज़ा लगाओ कि कितने कमरे एक के ऊपर एक लगाकर कुतुब मीनार जितने ऊँचे होंगे। ____________

बताओ कि तुमने यह अंदाज़ा कैसे लगाया।

बॉक्स 1

एनसीईआरटी कक्षा 6 की पाठ्यपुस्तक से

एनसीईआरटी की कक्षा 6 में ‘संख्याओं के साथ खेलना’ पाठ सम्मिलित है, जिसमें मुख्यतः संख्याओं के प्रकार, जैसे– भाज्य-अभाज्य, सम-विषम; अथवा संख्याओं के गुण, जैसे– गुणनखण्ड, गुणज, आदि पर बात की गई। पहले पैटर्न के आधार पर परिभाषा बनाना, फिर परिभाषा के आधार पर दूसरी बड़ी संख्याओं को जाँचना। महत्त्वपूर्ण बात यह जानना है कि संख्याओं का हर अनन्त पैटर्न / सेट किसी नियम से बद्ध है। अंक 2 से विभाजित संख्याएँ एक अनन्त सेट बनाती हैं। ज़ाहिर बात है कि यह संख्याएँ 2 की गुणज भी हैं और पैटर्न का नियम 2 × 1, 2 × 2, 2 × 3, 2 × 4, ... है।

इसके अतिरिक्त पैटर्न देखकर विभाज्यता के नियम बनाना और फिर उन नियमों के आधार पर दी गई संख्या की विभाज्यता पता करने के अवसर दिए गए हैं।

ऐसे अवसर विद्यार्थियों में संख्याओं का अनुमान (conjecture) और उनसे जुड़े तथ्यों पर सोच विकसित करने में मदद करते हैं। इनके द्वारा ऐसी अनुभूति भी मिलती है कि गणित में केवल एक ही नहीं, बल्कि एक से अधिक या अनन्त जवाब भी हो सकते हैं। 9 के गुणनखण्ड सीमित हैं वहीं 9 के गुणज अनन्त हैं, जिनमें ऐसी / इतनी बड़ी संख्याएँ भी हैं जो शायद उन्होंने कभी पढ़ी, सुनी या देखी नहीं, पर उनका अस्तित्व है। उपरोक्त प्रकार के अनुभव सामान्यीकरण, जो कि गणितीय प्रूफ़्स और तार्किक सोच का एक अहम हिस्सा है, की समझ विकसित करने में सहयोगी होंगे। साथ ही पैटर्न को समझते हुए नियम बनाना और फिर नियम की जाँच भी की जा सकेगी, क्योंकि अकसर विद्यार्थी अनुभवजन्य तथ्यों अथवा सत्यापन को प्रूफ़्स मान लेते हैं। यह बहुत ज़रूरी है कि वे साक्ष्य एवं सत्यापन के बीच अन्तर को समझें। अतः प्रस्तुत मौक़ों के द्वारा चर्चा करते हुए शिक्षक कक्षा में गणितीय प्रूफ़्स और तार्किकता के विकास को प्रोत्साहित कर सकते हैं।

सम और विषम संख्याएँ

क्या आप संख्याओं 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ... में कोई प्रतिरूप (pattern) देखते हैं? आप पाएँगे कि इनमें से प्रत्येक 2 का एक गुणज है।

ये संख्याएँ *सम* **संख्याएँ (even numbers)** कहलाती हैं। शेष बची सभी प्राकृत संख्याएँ 1, 3, 5, 7, 9, 11,... **विषम संख्याएँ (odd numbers)** कहलाती हैं।

आप आसानी से जाँच कर सकते हैं कि एक 2 या 3 अंकों वाली संख्या सम संख्या है या नहीं। आप यह कैसे ज्ञात करेंगे कि 756482 जैसी बड़ी संख्या एक सम संख्या है या नहीं? क्या 2 से भाग देकर? क्या यह प्रक्रिया जटिल नहीं होगी?

हम कहते हैं कि वह संख्या जिसके इकाई के स्थान पर 0, 2, 4, 6 या 8 अंक हों एक *सम संख्या* होगी। इसलिए संख्याएँ 350, 4862 और 59246 सम संख्याएँ हैं। संख्याएँ 457, 2359 और 8231 विषम संख्याएँ हैं। आइए, अब कुछ रोचक तथ्यों को ज्ञात करने का

बॉक्स 2

एनसीईआरटी कक्षा 8 की पाठ्यपुस्तक से

कक्षा 6 में संख्याओं और उनके सम्बन्ध पर की गई चर्चा का विस्तार करते हुए कक्षा 8 में भी ‘संख्याओं के साथ खेलना’ पाठ लिखा गया। चूँकि कक्षा 8 में गणित औपचारिकता की ओर अग्रसर हो रहा है, इसीलिए यहाँ गणितीय भाषा, चिह्न, प्रतीकों के इस्तेमाल के अवसर दिए गए हैं। इस पाठ में संख्या पद्धति और उनके गुणधर्मों को सामान्यीकरण के स्तर तक ले जाया गया है और पहले गणितीय भाषा और चिह्नों की मदद से संख्याओं को व्यापक रूप में लिखने के अवसर और सवाल दिए गए हैं। संख्याओं को व्यापक रूप में लिखते हुए अक्षरों का उपयोग संख्या की तरह किया जाता है। अक्षर संख्याओं का अनुभव न केवल बीजगणित में उपयोगी है, बल्कि गणितीय प्रूफ़्स में भी व्यापकता के कौशल से सहज होना विद्यार्थियों के लिए अति उपयोगी होगा। इसके अलावा, प्रस्तुत पाठ में विभाज्यता के नियमों की जाँच (test of divisibility) के औचित्य का विस्तार है।

इस प्रकार यह दोनों पाठ संख्या पद्धति की परिभाषा, गुणों, उनके सम्बन्धों को खोजने और

व्यापकता पर समझ बनाने में सहायक हैं, जोकि तार्किक सोच विकसित करने हेतु एक मज़बूत आधार प्रदान करेंगे।

16.2 व्यापक रूप में संख्याएँ

आइए एक संख्या 52 लें और उसे इस रूप में लिखें :

$$52 = 50 + 2 = 10 \times 5 + 2$$

इसी प्रकार, संख्या 37 को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$37 = 10 \times 3 + 7$$

व्यापक रूप में, अंकों a और b से बनी किसी दो अंकों की संख्या ab को इस रूप में लिखा जा सकता है : $ab = 10 \times a + b = 10a + b$

ba के बारे में क्या कहा जा सकता है? $ba = 10 \times b + a = 10b + a$

आइए, अब संख्या 351 को लें। यह एक तीन अंकों की संख्या है। इस संख्या को भी इस रूप में लिखा जा सकता है:

बॉक्स 3

छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक कक्षा 10 से

गणित के तार्किक ढाँचे को समझना और कथनों को गणितीय ढंग से सिद्ध करना गणित सीखने-सिखाने का एक अहम पहलू है। माध्यमिक स्तर पर इस बात पर ज़ोर दिया जाता है कि विद्यार्थी गणितीय कथनों को ऐसे ही न मानें, बल्कि उन्हें तर्क के आधार पर सिद्ध करते हुए अपनी एक विस्तृत समझ बनाएँ। यह कथन संख्या, बीजगणित और ज्यामिति से जुड़े हो सकते हैं। माध्यमिक स्तर पर गणितीय भाषा का उपयोग और गहन एवं विस्तृत हो जाता है। साथ ही इस बात पर ज़ोर दिया जाता है कि विद्यार्थी स्वयंसिद्ध, परिभाषाओं, सिद्ध प्रमेय, अभिगृहीत के ज्ञान का भरपूर इस्तेमाल करें।

इस समझ एवं लक्ष्य के अनुसार छत्तीसगढ़ की कक्षा दसवीं की पाठ्यपुस्तक में 'गणितीय कथनों की जाँच' पाठ लिखा गया। यह माध्यमिक स्तर पर ख़ास प्रूफ़्स पर केन्द्रित पहली बार गणित के पाठ्यक्रम में सम्मिलित किया गया। चलिए, इस पाठ के अहम बिन्दुओं पर विस्तार से चर्चा करते हैं।

पाठ का ढाँचा

इस पाठ में उपपत्तियों को तीन मुख्य पहलुओं में बाँटा गया है, जिनसे विद्यार्थी उपपत्ति की समझ तीन चरणों में सहजता से बना पाएँ। इसे नीचे बॉक्स 4 में प्रस्तुत किया गया है। सबसे पहला है, किसी भी कथन को सिद्ध करने हेतु इस्तेमाल होने वाले स्वयंसिद्ध, सिद्ध प्रमेयों व परिभाषाओं का ज्ञान होना। जैसे– परिभाषा के अनुसार सम संख्याएँ पूर्णांक 2 का गुणज होती हैं, इसीलिए उसे $b = 2k$ लिख सकते हैं।

दूसरा पहलू निगमनात्मक तार्किकता की बात करता है कि किस प्रकार उपपत्ति में दो क्रमात्मक कथन तर्क से जुड़े हैं। तीसरा और आख़िरी पहलू उपपत्ति के दौरान प्रतीक, चिह्नों के इस्तेमाल को प्रोत्साहित करता है जिससे गणितीय कथन संक्षिप्त और सटीक तरीक़े से लिखा जा सके। इन्हीं पहलुओं को उजागर करते हुए सम और विषम संख्याओं के जोड़ पर एक उपपत्ति नीचे दी गई है :

कथन 1 : एक विषम और एक सम संख्या का जोड़ हमेशा विषम संख्या होती है।

उपपत्ति : किसी भी सम पूर्णांक b को हम $b = 2k$ लिख सकते हैं, जहां k कोई पूर्णांक है।

(सम पूर्णांक की परिभाषा से, चूंकि b, 2 से विभाजित है) -------------- (1)

किसी भी विषम पूर्णांक a को हम $a = 2k_1 + 1$ लिख सकते हैं ,जहाँ k_1 भी पूर्णांक है।

(किसी भी सम संख्या में 1 जोड़ने पर विषम संख्या प्राप्त होती है) ------- (2)

अब (1) व (2) को जोड़ने पर

$a + b = 2k_1 + 1 + 2k = 2(k + k_1) + 1$

$= 2m + 1$ जहाँ $m = k + k_1$ है और m एक पूर्णांक है। (क्यों?)

चूँकि $2m$ एक सम संख्या है।

अतः $2m + 1$ एक विषम संख्या है।

यानी एक विषम और एक सम संख्या का जोड़ हमेशा विषम संख्या ही होगी।

आपने देखा कि यहाँ हमने सम और विषम पूर्णांक की परिभाषा के आधार पर इस कथन को सिद्ध किया है ।

बॉक्स 4

इस तरह निगमनात्मक तार्किक क्षमता, जोकि पेचीदा और अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है, के विकास हेतु इस पाठ में अनेक मौक़े देने का प्रयत्न किया गया है, जहाँ सरल, जटिल कथनों पर उदाहरण एवं सवाल हैं जो ज्यामिति, अंकगणित या बीजगणित के हैं। पाठ में ख़ास निगमनात्मकता पर ऐसे उदाहरण भी दिए गए हैं जहाँ विद्यार्थी परिभाषाओं व अभिगृहीतों में

सही कथन का चुनाव करेंगे और उसके आधार पर तार्किक निष्कर्ष निकालेंगे। पाठ्यपुस्तक में इस प्रकार के केन्द्रित प्रयत्न एवं कक्षा में चर्चा औपचारिक उपपत्ति लिखने, समझने में मदद कर सकती है।

पाठ्यपुस्तक से कक्षा तक

यह सब उदाहरण दिखाते हैं कि कुछ महत्त्वपूर्ण पाठ्यपुस्तकों में तो अब ऐसे मौक़े देने की बात अलग-अलग ढंग से है। एनसीईआरटी की कक्षा 1 से लेकर कक्षा 8 तक की सभी पाठ्यपुस्तकों में इनकी झलक मिलती है। पर यह कहना मुश्किल है कि यह कक्षा तक किस रूप में पहुँचता है और विद्यार्थियों की प्रूफ़ करने के बारे में क्या समझ बनी है। शिक्षकों व बच्चों के साथ अन्तःक्रिया के अनुभवों में यह बात दिखती है कि वे एक-दो उदाहरण देने अथवा किसी एक आकृति में मापकर दिखा देने को सिद्ध करने के तुल्य मानते हैं। जैसे विद्यार्थी अकसर त्रिभुज के तीनों कोणों के माप को जोड़कर जाँचने को अथवा उनके कोनों को काटकर उन कोणों को एक साथ जोड़कर रखने को प्रूफ़्स मानते हैं। बहुत-से शिक्षक भी इसे ही सिद्ध करना मानते हैं। यहाँ तक कि कुछ अनुभवी शिक्षक जो एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकों से पढ़ा चुके हैं, त्रिभुज के तीनों कोणों को काटकर, जोड़कर उन्हें एक अर्ध-वृत्त या चतुर्भुज के कोणों को जोड़कर वृत्त का आकार दिखने को सिद्ध करने का एक आसान और असरदार तरीक़ा समझते हैं। कुछ शिक्षकों से बात करने पर हमने यह भी पाया कि शिक्षक अकसर समान्तर श्रेणी (arithmetic progressions) जैसी अवधारणाओं में गणितीय तार्किकता / सोच कैसे विकसित करना है, यह ढूँढ़ नहीं पाते और अन्ततः सूत्र याद करके सवाल हल करने तक ही सीमित रह जाते हैं।

एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तक में इस बात की ओर ध्यान भी दिलाया गया है और प्रूफ़्स से जुड़ी भ्रान्तियों पर उदाहरण सहित बात की गई है। जैसे, यदि आपको सिद्ध करना है कि 'त्रिभुज के तीनों कोणों का जोड़ 180° होता है', तो त्रिभुज के तीनों कोणों को काटकर एक रेखा में रखना और 180° कहना, क्या गणितीय सिद्ध है? अथवा त्रिभुज के तीन कोणों को नापना, फिर जोड़ना और 180° कहना, क्या गणितीय सिद्ध है? पाठ में एक बार फिर व्यापकता और गणितीय तर्क की भूमिका को स्थापित करने का प्रयत्न किया गया है।

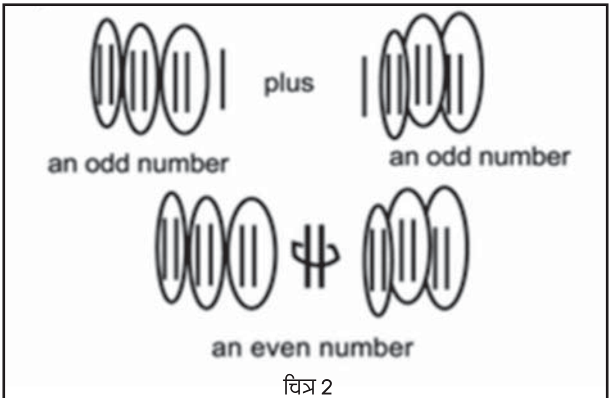
कक्षा में गणितीय तर्क क्षमता का विकास

यह कहना उचित है कि कक्षा में गणितीय तर्क विकसित करने में बच्चों की विविधता एक महत्त्वपूर्ण पहलू है। इस सन्दर्भ में बॉल एवं अन्य (2002) द्वारा अपने लेख में प्राथमिक स्तर पर किए गए शोधों के कुछ अनुभव देखना उचित होगा। विद्यार्थियों में गणितीय रीज़निंग के विकास को समझने हेतु कुछ दीर्घकालीन अध्ययन (longitudinal study) किए गए, जिनमें कक्षा तीन (8 से 9 वर्ष आयु) के विद्यार्थियों की विस्तृत एवं व्यापक जानकारी एकत्रित की गई, प्रतिदिन पाठ के वीडियो बनाए गए, विद्यार्थियों की नोटबुक और टेस्ट का अध्ययन किया गया, विद्यार्थियों के इंटरव्यू लिए गए और शिक्षकों के शैक्षिक नोट्स एवं प्लान भी अभिलिखित किए गए। इस दौरान उपयुक्त गणितीय टास्क / सवाल देते हुए विद्यार्थियों में गणितीय तार्किक क्षमता को बारीक़ी से समझने का प्रयास किया गया।

शिक्षक ने कुछ इस प्रकार के सवाल कक्षा में दिए– 'मेरी जेब में एक सेंट, पाँच सेंट और दस सेंट के सिक्के हैं। यदि मैंने बिना देखे दो सिक्के जेब से निकाले तो मेरे हाथ में कितने पैसे हो सकते हैं?' इस पर काम करते हुए विद्यार्थियों ने कुछ जवाब निकाले, जो हैं– 2, 6, 10, 11, 15 और 20, जिसके पश्चात उनको इन जवाबों के इतर सम्भव जवाबों को ढूँढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया गया। एक तरफ़ तो कुछ विद्यार्थियों को सवाल ही समझ नहीं आ रहा था वहीं दूसरी ओर, कुछ विद्यार्थियों ने एक सूची बनाकर ये स्पष्ट किया कि उपरोक्त जवाबों के इतर और कोई सम्भावना नहीं होगी एवं नए सिक्के निकालने पर भी इन्हीं छह में से एक

जवाब मिलेगा, यानी 2, 6, 10, 11, 15 या 20 । शायद वे अपने अनुभवजन्य साक्ष्यों से सन्तुष्ट थे। और वैसे भी इस स्तर पर विद्यार्थियों से सीमित या अनन्त उत्तर समूह (finite or infinite answer set) की पूर्णता को जाँचने की गणितीय या तार्किक सोच और तरीक़ों की अपेक्षा नहीं की जाती।

उपरोक्त चर्चा के चार महीने बाद कक्षा में शिक्षक द्वारा एक और चर्चा की गई। चूँकि विद्यार्थियों ने चार महीने सम और विषम संख्याओं के जोड़-घटाव पर काफ़ी काम किया था, (जैसे– 4 + 8 = 12, 6 + 4 = 10 आदि), इसीलिए ऐसा माना गया कि उनके दिमाग़ में इन संख्याओं का अनुमान (conjecture) विकसित हो गया होगा। शिक्षक ने इस प्रकार के कुछ उदाहरण देते हुए अब यह कथन सिद्ध करने को कहा। कथन था : 'किन्हीं भी दो विषम संख्याओं का जोड़ एक सम संख्या होती है।' कुछ विद्यार्थी इस बात को ही नहीं समझे, तो कुछेक सूची बनाने लगे। इसी बीच शिक्षक ने कक्षा में सम और विषम संख्याओं की परिभाषा और स्वभाव को पुनः दोहराया। प्रयत्न करने के बाद कुछ विद्यार्थियों ने कहा कि इसे सिद्ध करना तो सम्भव ही नहीं है क्योंकि हमने इतनी बड़ी संख्या कभी देखी ही नहीं, और न ही हमें यह पता है कि इस संख्या का नाम क्या होगा। कुछ देर और जूझने के बाद विद्यार्थियों ने दो विषम संख्याओं के जोड़ को निम्न प्रकार से निरूपित किया :



चित्र 2

विद्यार्थियों द्वारा उपरोक्त स्पष्टीकरण और प्रयत्न कक्षा में हो रही चर्चा की सार्थकता को बताता है। भले ही यह एक व्यवस्थित तार्किक प्रूफ़ नहीं है, पर एक अनन्त समूह की संख्याओं को सीमित संकेतों व शब्दों में सोचने और लिखने का उपयुक्त एवं सार्थक प्रयत्न दिखता है। इसपर पर्याप्त अभ्यास के पश्चात शिक्षक चर्चा को आगे ले जाते हुए गणितीय तर्क के विकास के नए आयाम खोल सकते हैं।

इससे यह लगता है कि इस क्षमता का विकास धीमी व लम्बी चलने वाली प्रक्रिया है और उसमें शिक्षक को बच्चों द्वारा ईजाद किए गए सिद्ध करने के नए तरीक़ों को समझना व परखना होगा और कक्षा में इस तरह के मौक़े कई बार अलग-अलग तरीक़े से देने की आवश्यकता है।

निष्कर्ष

गणितीय तर्क से कथन सिद्ध करना अत्यन्त आवश्यक होने के साथ-साथ पेचीदा भी है। अतः प्राथमिक कक्षाओं से ही इस दिशा में योजनाबद्ध और केन्द्रित प्रयत्न करने होंगे। पाठ्यपुस्तक व पाठ्यक्रम में किया गया बदलाव आवश्यक तो है, किन्तु पर्याप्त नहीं। इस बदलाव को कक्षा-कक्ष में सीखने-सिखाने का असरदार हिस्सा बनाने हेतु शिक्षकों की अहम भूमिका दिखती है।

यह अपेक्षित है कि शिक्षक गणितीय सोच के स्वरूप, स्वभाव और विकास के मार्ग को समझें और ध्यान दें। इसके अलावा, शोध के आधार पर गणितीय रीज़निंग के प्रचुर विकास के लिए बॉल एवं अन्य (2002) शिक्षकों के लिए तीन बिन्दु सुझाते हैं– पहला, ऐसे गणितीय टास्क देना जो तार्किक चिन्तन के मौक़े दें, जैसे– ऊपर चर्चित सिक्के वाला टास्क विद्यार्थियों को सम्भव जवाब खोजने के लिए प्रेरित करता है, पर सही या सटीक जवाब की अपेक्षा नहीं करता। दूसरा अहम बिन्दु है विद्यार्थियों

को गणितीय ज्ञान, जैसे– परिभाषा, अवधारणा, गणितीय भाषा, आदि, से अवगत कराना और फिर उनकी मदद करना ताकि वे इस गणितीय ज्ञान को सवालों, हल करने के तरीक़ों, गणित में नए विचारों और अवधारणाओं से जोड़ सकें। अन्त में, तीसरा अहम बिन्दु है कक्षा-कक्ष में तार्किक चर्चा और सवालों का एक ऐसा माहौल स्थापित करना जहाँ व्यक्तिगत सुझाव व सोच को सामूहिक चर्चा में जगह मिल सके एवं हर व्यक्ति एक दूसरे के सुझावों को सुने, रुचि ले, और उसपर प्रतिक्रियाओं के माध्यम से सम्मिलित हो सके। ज़ाहिर है, इसका असर पाठ्यक्रम की समझ व आकलन के तरीक़े पर भी पड़ेगा। और इस तरह के प्रयासों के लिए पर्याप्त समय व महत्त्व आवश्यक होगा।

सन्दर्भ

1. पाठ-5, 'पैटर्न', कक्षा 2, *गणित का जादू*, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, प्रथम संस्करण 2007.
2. पाठ-2, 'लम्बा और छोटा', कक्षा 4, *गणित का जादू*, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, प्रथम संस्करण 2007.
3. पाठ-3, 'संख्याओं के साथ खेलना', कक्षा 6, *गणित*, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, प्रथम संस्करण 2006.
4. पाठ-16, 'संख्याओं के साथ खेलना', कक्षा 8, *गणित*, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसन्धान और प्रशिक्षण परिषद्, प्रथम संस्करण 2008.
5. पाठ-6, 'गणितीय कथनों की जाँच', कक्षा 10, *गणित*, छत्तीसगढ़ पाठ्यपुस्तक निगम, रायपुर, 2021
6. Ball, D. L., Hoyles, C., Jahnke, H. N., & Movshovitz-Hadar, N. (2003). *The Teaching of proof*. arXiv preprint math/0305021.
7. Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). 'Geometry and Spatial Reasoning'. In D. Grouws, (Ed) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, 420–464. New York: Macmillan.
8. Healy, L. & Hoyles, C. (2000). 'From Explaining to Proving: A Study of Proof Conceptions in Algebra'. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31,396–428.

तान्या सक्सेना शिक्षा में कार्यरत रही हैं। उन्होंने स्नातकोत्तर के दौरान शोध विज्ञान, तकनीकी, शिक्षा और गणित शिक्षण में शोध किया है। उनकी रुचि गणित शिक्षण और उसकी पेडागॉजी के शोध में है।

सम्पर्क : tanya.saxena26@gmail.com