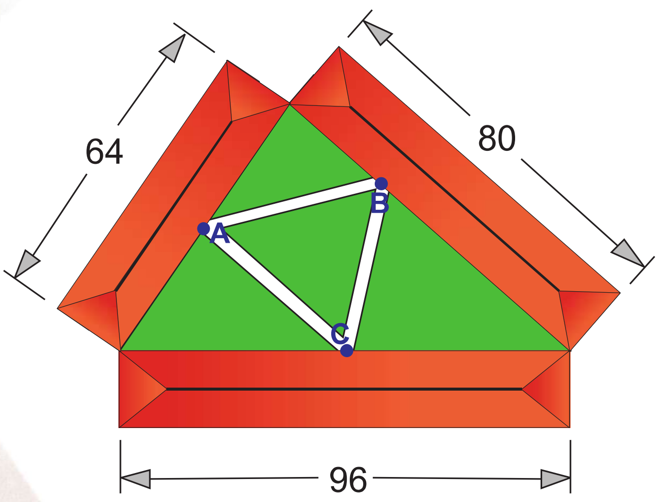
ಫ್ಯಾಗ್ನಾನೊ ಸಮಸ್ಯೆ
ಒಂದು ರೇಖಾಗಣಿತದ ಪರಿಹಾರ...

ಉಜ್ವಲ್ ರಾಣೆ

ಗರಿಷ್ಠೀಕರಣ ಅಥವ ಕನಿಷ್ಠೀಕರಣದ ಒಂದು ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡಿದಾಗ, ನಾವು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ ಕಲನ ಅಥವ ರೇಖಾತ್ಮಕ ಕ್ರಮವಿಧಿರಚನೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸುತ್ತೇವೆ. ಆದರೆ ವಾಸ್ತವದಲ್ಲಿ, ಸಮಸ್ಯೆಗಳು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಸಾಧನಕ್ಕೆ ಬಂಧಿತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ ಮತ್ತು ನಾವು ಪ್ರೌಢಶಾಲಾ ರೇಖಾಗಣಿತ ಅಥವಾ ಸ್ವಲ್ಪ ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದಂತಹ ಯಾವುದಾದರೂ ವಿಭಿನ್ನ ಪ್ರಯತ್ನವನ್ನು ಮಾಡಲು ಸದಾಕಾಲ ಮುಕ್ತವಾದ ಅವಕಾಶ ಹೊಂದಿರುತ್ತೇವೆ.

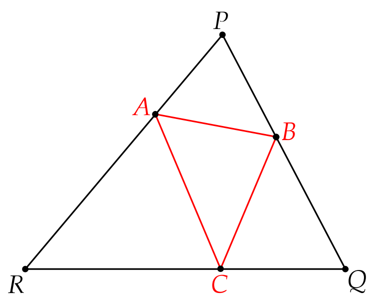
ಅಂತಹ ಒಂದು ಕನಿಷ್ಠೀಕರಣದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ನೋಡೋಣ: ಅಮೆರಿಕಾ ರಕ್ಷಣಾ ಸಚಿವಾಲಯದ ಪ್ರಧಾನ ಕಚೇರಿಯಾದ ಪೆಂಟಗನ್ನಿಂದ ಸ್ಫೂರ್ತಿಗೊಂಡು, ಗಣಿತದ ಇಲಾಖೆಯು **ದ ಟ್ರೈಯಾಂಗಲ್** ಅನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸಿದೆ. ಈ ತ್ರಿಕೋನಾಕಾರದ ಕಟ್ಟಡದಲ್ಲಿ ಮೂರು ವಿಭಾಗಗಳಿದ್ದು ಅವುಗಳಿಗೆ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಆರ್ಯಭಟ, ಬ್ರಹ್ಮಗುಪ್ತ ಮತ್ತು ಚಂದ್ರಶೇಖರ್ ಅವರುಗಳ ಹೆಸರುಗಳ ಮೊದಲ ಅಕ್ಷರಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಎ, ಬಿ, ಸಿ ಎಂದು ಹೆಸರಿಸಲಾಗಿದೆ. ವಿಭಾಗಗಳ ಪ್ರವೇಶದ್ವಾರಗಳು ಮಧ್ಯದ ಅಂಗಳಕ್ಕೆ ತೆರೆದುಕೊಳ್ಳುವಂತಿದ್ದು, ಅವು ತ್ರಿಕೋಣಾಕಾರದ ಕಾಲುದಾರಿಯಿಂದ ಸೇರಿಸಲ್ಪಟ್ಟಿವೆ. ಗಣಿತಶಾಸ್ತ್ರಜ್ಞರ ನಿಕಟ ಪರಸ್ಪರ ವಿಚಾರ ವಿನಿಮಯಕ್ಕಾಗಿ, ವಿಭಾಗೀಯ ದ್ವಾರಗಳನ್ನು ತಲುಪುವ ಕಾಲುದಾರಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆಗೊಳಿಸಲು ತೀರ್ಮಾನಿಸಲಾಯಿತು - ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ವಿಭಾಗೀಯ ದ್ವಾರಗಳನ್ನು ಇರಿಸುವುದರ ಮೂಲಕ.

ನೀವು ಅತಿ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲುದಾರಿಯ ಉದ್ದವನ್ನು (ಪರಿಧಿಯನ್ನು) ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲಿರ?



ಚಿತ್ರ 1. ದ ಟ್ರೈಯಾಂಗಲ್

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ಅತ್ಯುತ್ತಮಗೊಳಿಸುವಿಕೆ, ತ್ರಿಕೋನ, ಅಂಡಾಕೃತಿ, ಏಕಸಂಗಮೀಯ, ಸದೃಶ ತ್ರಿಕೋನ, ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ, ಪ್ರತಿಬಿಂಬ, ಫರ್ಮಾನ ತತ್ವ.



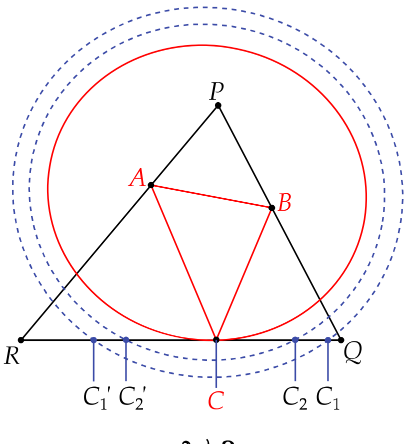
ಚಿತ್ರ 2

ಐತಿಹಾಸಿಕ ಉಲ್ಲೇಖ: ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ನಿರೂಪಿಸಿದ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯ ಅಮೂರ್ತ ನಿರೂಪಣೆಯೊಂದನ್ನು ಗಿಯೋವನಿ ಫಾಜ್ಞಾನೋ ಮೊದಲು ಪರಿಹರಿಸಿದರು: “ಒಂದು ಲಘುತ್ರಿಕೋನ (PQR) ವನ್ನು ಕೊಟ್ಟಿರುವಾಗ, ಕನಿಷ್ಠ ಪರಿಧಿಯ ಅಂತರ್‌ತ್ರಿಕೋನ (ABC) ವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಿರಿ”.

[ಟಿಪ್ಪಣಿ: PQR ತ್ರಿಕೋನವು ಲಘುತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರಬೇಕೆಂಬುವ ನಿರ್ಬಂಧವು ಗೊಂದಲಕ್ಕೆ ಎಡೆ ಮಾಡಬಹುದು. ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬಕೋನ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ? PQR ಲಂಬಕೋನ ಅಥವಾ ವಿಶಾಲಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಅತ್ಯುತ್ತಮಗೊಳಿಸುವಿಕೆಯ ಸಮಸ್ಯೆಯು ಗೌಣವೆನಿಸುತ್ತದೆ. ಇದರ ಕಾರಣವನ್ನು ಈ ಲೇಖನದ ಉಪಬಂಧದಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಲಾಗಿದೆ.]

ಫ್ಯಾಗ್ನನೋ ಇದನ್ನು ಪರಿಹರಿಸಲು ಕಲನ ಶಾಸ್ತ್ರವನ್ನು (ಕ್ಯಾಲ್ಕುಲಸ್) ಉಪಯೋಗಿಸಿದ್ದರು, ಆದರೆ ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ರೇಖಾಗಣಿತ ಮತ್ತು ಲಘು ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಭೌತವಿಜ್ಞಾನವನ್ನು ಕೂಡ ಪ್ರಯತ್ನಿಸೋಣ!

ಮೊದಲಿಗೆ, ನಾವು ಸ್ವಲ್ಪ ಮಟ್ಟಿಗೆ ಈ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಬಗಹರಿಸಲಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಈಗಾಗಲೆ ಗೇಟ್ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಅತ್ಯುತ್ತಮ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಊಹಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ. ಮತ್ತು ಈಗ ನಾವು A-C-B ಯ ಉದ್ದವನ್ನು ಕನಿಷ್ಠೀಕರಿಸಬೇಕು.



ಚಿತ್ರ 3

ಯಾವುದಾದರೂ ಪಥ A-C-B ಯನ್ನು ದಾರವಾಗಿ ಪರಿಗಣಿಸಿ ಮತ್ತು ಅದರ ತುದಿಗಳಾದ A ಮತ್ತು B ಗಳು ಪಿನ್ನುಗಳಿಂದ ಸ್ಥಿರಗೊಳಿಸಲಾಗಿವೆ ಎಂದುಕೊಳ್ಳಿ. ಇದು ನಿಮಗೆ ಯಾವುದನ್ನಾದರೂ ನೆನಪಿಸುತ್ತಿದೆಯೆ? ನಿಜ; ಇದು ಅಂಡಾಕೃತಿಯನ್ನು ನಕಾಶೆಯಾಗಿ ಬರೆಯುವ ಕ್ರಮವಾದ ದಾರಗಳು ಮತ್ತು ಸೂಜಿಗಳ (ಸ್ಟ್ರಿಂಗ್ಸ್ & ಪಿನ್ಸ್) ವಿಧಾನ!

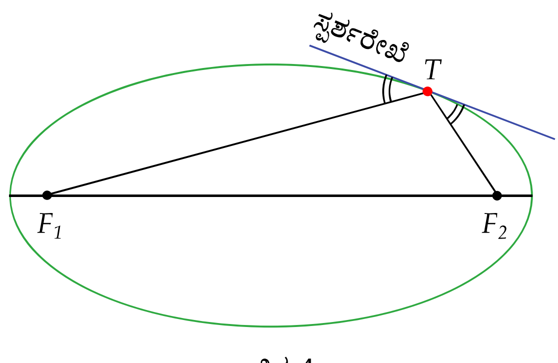
ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೀಲಿ ಚುಕ್ಕೆಯ ರೇಖೆಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದಂತೆ, A-C-B ಯ ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಉದ್ದಕ್ಕೆ, A ಮತ್ತು B ನಾಭಿಗಳಾಗಿ, C ಬಿಂದುವು ಅಂಡಾಕೃತಿಯ ಮೇಲೆ ಇರುತ್ತದೆ.

ಇಂತಹ ಒಂದು ಅಂಡಾಕೃತಿ, ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ, RQ ರೇಖೆಯನ್ನು ಎರಡು ಬಿಂದುಗಳಲ್ಲಿ ಛೇದಿಸುತ್ತದೆ. (ಅದನ್ನು C_1 ಮತ್ತು C_1' ಎಂದುಕೊಳ್ಳೋಣ).

ಈಗ, ನಾವು “ದಾರದ” ಉದ್ದವನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡಿದರೆ, ಅಂಡಾಕೃತಿಯು ಒಳಮುಖವಾಗಿ ಕುಗ್ಗುತ್ತದೆ, ಮತ್ತು ನಮಗೆ “ಸಮಾನಕೇಂದ್ರಬಿಂದು” ಇರುವ, ಎರಡು ಛೇದಿತ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು (C_2 ಮತ್ತು C_2') ಸಮೀಪಕ್ಕೆ ತರುವ ಅಂಡಾಕೃತಿ ಸಿಗುತ್ತದೆ. ನಾವು ದಾರದ ಅಳತೆಯನ್ನು ಕಡಿಮೆ ಮಾಡುವುದನ್ನು ಮುಂದುವರೆಸಿದರೆ, ಕೊನೆಯದಾಗಿ ಎರಡು ಛೇದಿತ ಬಿಂದುಗಳು, ಒಂದು ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ (C) ವಿಲೀನಗೊಂಡು, (C) ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ RQ ರೇಖೆಯು ಅಂಡಾಕೃತಿಗೆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯಾಗುತ್ತದೆ. ಆಗ ನಾವು ಅಂಡಾಕೃತಿಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯ ಒಂದು ಕುತೂಹಲಕಾರಿ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು.

ಗುಣಲಕ್ಷಣ: ಅಂಡಾಕೃತಿಯ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಎರಡು ನಾಭಿಗಳಿಗೆ (F_1 ಮತ್ತು F_2) ಸ್ಪರ್ಶತೆಯ ಬಿಂದು (T) ವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳತ್ತ ($F_1T\&F_2T$) ಸಮವಾಗಿ ಬಾಗಿರುತ್ತದೆ.

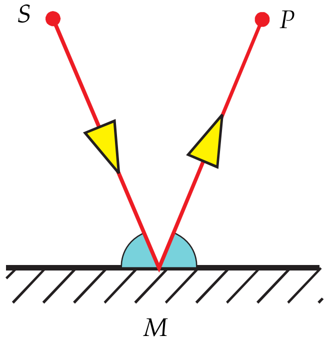
ಎರಡು ನಾಭಿಗಳನ್ನು ಈಗಾಗಲೇ ಕಂಡುಹಿಡಿದಿರುವಂತಹ ಎರಡು ದ್ವಾರಗಳು ಮತ್ತು (T) ಅನ್ನು ಆ ಸ್ಪರ್ಶರೇಖೆಯು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಮೂರನೇ ವಿಭಾಗದ ದ್ವಾರ ಎಂದು ಭಾವಿಸಿ.



ಚಿತ್ರ 4

ತೀರ್ಮಾನ: ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ಅಂತರ್ದಾಖಲಾದ ABC ತ್ರಿಕೋನದ ಬದಿಗಳು, ಹೊರಗಿನ ತ್ರಿಕೋನ PQR ನ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮಾನವಾದ ಪ್ರಮಾಣದಲ್ಲಿ ಬಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಆಶ್ಚರ್ಯವೆಂದರೆ ಈ ಫಲಿತಾಂಶವನ್ನು ಭೌತ ವಿಜ್ಞಾನದ ಫರ್ಮಾನ ತತ್ತ್ವವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಕೂಡ ಪಡೆಯಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 5

ಫರ್ಮಾನ ತತ್ವ: ಬೆಳಕು ಎಂದಿಗೂ ತ್ವರಿತ ಹಾದಿಯನ್ನು ಹಿಡಿಯುತ್ತದೆ.

ಮೇಲಿನ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿದ ಹಾಗೆ, ಮೂಲದಿಂದ (S) ಬರುತ್ತಿರುವ ಬೆಳಕಿನ ಒಂದು ಕಿರಣವು, ಒಂದು ಸಮತಲ ದರ್ಪಣದಲ್ಲಿ (M) ಪ್ರತಿಫಲಿತವಾಗಿ ಒಂದು ಬಿಂದುವಿಗೆ (P) ತಲುಪುವುದಕ್ಕೆ ಮೇಲಿನ ತತ್ವವನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸೋಣ. ಫರ್ಮಾನ ತತ್ವದ ಪ್ರಕಾರ, ಎಸ್ (S) ಯಿಂದ ದರ್ಪಣದ ಮೂಲಕ ಪಿ (P) ಗೆ S-M-P ಅತಿ ಚಿಕ್ಕ ಹಾದಿಯಾಗಿರಬೇಕು.

ಬೀಳುವ ಕಿರಣ (SM) ಮತ್ತು ಪ್ರತಿಫಲಿತ ಕಿರಣ (MP) ಲಂಬರೇಖೆಗೆ ಮತ್ತು ದರ್ಪಣಕ್ಕೆ ಸಮನಾಗಿ ಬಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂದು ನಮಗೆ ಮೂಲಭೂತ ದೃಗ್ವಿಜ್ಞಾನದಿಂದ ತಿಳಿದಿದೆ – ಇದು ಈ ಮೊದಲು ರೇಖಾಗಣಿತವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಿ ತಲುಪಿದ ತೀರ್ಮಾನವೆ!

ಆದ್ದರಿಂದ, ಅಂತರ್‌ದಾಖಲಾಗಿರುವ ಅತ್ಯುತ್ತಮವಾದ ತ್ರಿಕೋನದ (ABC) ಎಲ್ಲಾ ಬದಿಗಳು ಹೊರಗಿನ ತ್ರಿಕೋನದ (PQR) ಬದಿಗಳಿಗೆ ಸಮನಾಗಿ ಬಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ತೀರ್ಮಾನಿಸುತ್ತೇವೆ.

$\triangle ARC$, $\triangle PAB$ ಮತ್ತು $\triangle BCQ$ ಗಳಲ್ಲಿ (ಚಿತ್ರಗಳು 6 ಮತ್ತು 7):

$\angle R + \gamma + \alpha = 180^\circ$, $\quad \angle P + \alpha + \beta = 180^\circ$,
$\angle Q + \beta + \gamma = 180^\circ$.

ಮೂರು ಸಮೀಕರಣಗಳನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, ನಮಗೆ,

$(\angle R + \angle P + \angle Q) + 2(\alpha + \beta + \gamma) = 3 \times 180^\circ$ ಸಿಗುತ್ತದೆ.

ಇದರಿಂದ $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, ಮತ್ತು $\angle R = \beta$, $\angle P = \gamma$, $\angle Q = \alpha$ ಉತ್ಪತ್ತಿಯಾಗುತ್ತದೆ.

ಆದ್ದರಿಂದ $\triangle ARC$, $\triangle PAB$ ಮತ್ತು $\triangle BCQ$ ಗಳು $\triangle PQR$ ಗೆ ಸಮಾನವಾಗಿವೆ.

x, y, z ಗಳು $\triangle ARC$, $\triangle PAB$ ಗಳ ಅಂಶ ಪ್ರಮಾಣಗಳು ಆಗಿರಲಿ ಮತ್ತು $\triangle BCQ$ ಗೆ $\triangle PQR$ ಅನುಕ್ರಮವಾಗಿ ಸಂಬದ್ಧವಾಗಿರಲಿ.

$p, q, r =$ ಕ್ರಮವಾಗಿRQ, PR ಮತ್ತು PQ ಬದಿಗಳು ಆಗಿರಲಿ; ಆಗ,

$p = xq + zr, \quad q = xp + yr, \quad r = yq + zp.$

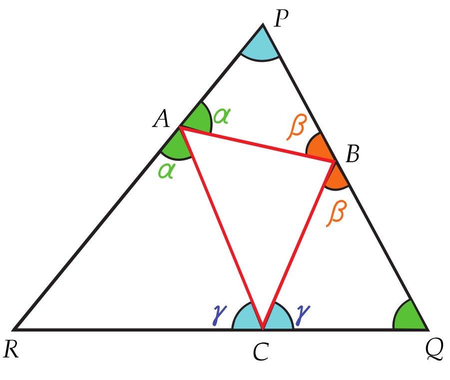
x ಗಾಗಿ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಪರಿಹರಿಸುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣ ದೊರಕುತ್ತದೆ. $x = \dfrac{q^2 + p^2 - r^2}{2pq}$. ಇದು $\cos R$ ಗೆ ಸಮವಾಗಿರುತ್ತದೆ.

ಹಾಗಾಗಿ,

$RC = RP \cos R.$

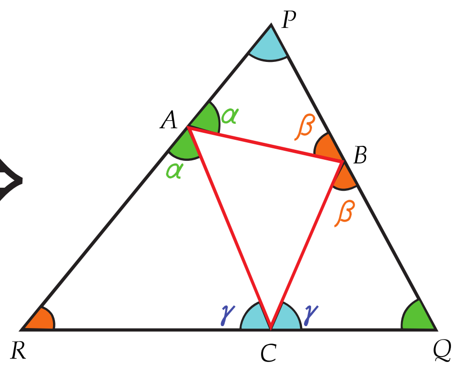
ಇದು ಲಂಬಕೋನತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯವಾಗುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನೇ ಇನ್ನೊಂದು ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, (P) ಯಿಂದ ಚಿಮ್ಮಿದ ಎತ್ತರಸೂಚಕ ರೇಖೆಗೆ (C) ಪಾದವಾಗಿದೆ.

ಸಮಮಿತಿಯ ಪ್ರಕಾರ (A) ಮತ್ತು (B) ಬಿಂದುಗಳು ಸಹ ಕ್ರಮವಾಗಿ ಎತ್ತರಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸುವ ರೇಖೆಗಳ ತಳಬಿಂದುಗಳಾದ (Q) ಮತ್ತು (R) ಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ.

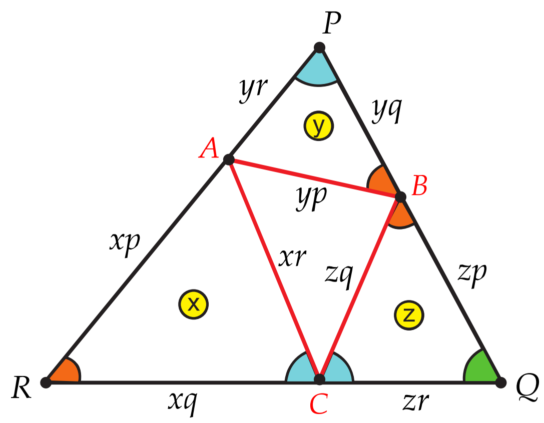


ಚಿತ್ರ 6

$\Rightarrow$



ಚಿತ್ರ 7



ಚಿತ್ರ 8

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಪೇಕ್ಷಿತ ತ್ರಿಕೋನವು **ಆರ್ಥಿಕ್ ತ್ರಿಕೋನ** – ಮೂರು ಎತ್ತರಸೂಚಕ ರೇಖೆಗಳ ಪಾದಗಳನ್ನು ಅದರ ಶೃಂಗಗಳನ್ನಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ತ್ರಿಕೋನ.

ಈಗ ಪರಿಧಿಗೆ:

ಪರಿಧಿ $= p\cos P + q\cos Q + r\cos R$.

ಕೊಟ್ಟಿರುವ ವಿಭಾಗಗಳ ಉದ್ದಗಳನ್ನು ಅನ್ವಯಿಸಿದಾಗ, $p = 96$, $q = 64$, $r = 80$,

$$p\cdot\cos P = 96\times\frac{64^2+80^2-96^2}{2(64)(80)} = 12,$$
$$q\cdot\cos Q = 64\times\frac{80^2+96^2-64^2}{2(80)(96)} = 48,$$
$$r\cdot\cos R = 80\times\frac{64^2+96^2-80^2}{2(64)(96)} = 45.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಕನಿಷ್ಠ ಪರಿಧಿಯು $45 + 48 + 12 =$ **105** ಅಂಶಗಳು.

ಲೇಖಕರಿಂದ ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಟಿಪ್ಪಣಿ: ನಾನು ಎರಡು ಪರಿಹಾರಗಳ ಎರಡು ವಿಡಿಯೋಗಳನ್ನು ಸೃಷ್ಟಿಸಿದ್ದೇನೆ ಮತ್ತು ಅವನ್ನು ಆನ್ಲೈನ್‌ನಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿದ್ದೇನೆ. ಇಲ್ಲಿದೆ ಅವುಗಳ ಚಿಕ್ಕ ಯುಆರ್‌ಎಲ್:

https://www.youtube.com/watch?v=tnaNT5_V9nk

http://tinyurl.com/FagnanoPhysical

ದಯವಿಟ್ಟು ಅವುಗಳನ್ನು ಪೂರ್ಣ ಪರದೆಯಲ್ಲಿ ವೀಕ್ಷಿಸಿ. ಎರಡೂ ವೀಡಿಯೋಗಳು ಉದ್ದಕ್ಕೂ ಶೀರ್ಷಿಕೆಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ.

ಉಜ್ವಲ್ ರಾಣೆಯವರು ತರಬೇತಿಯ ಮೂಲಕ ಮೆಕ್ಯಾನಿಕಲ್ ಇಂಜಿನಿಯರ್; ಇವರು ಐಐಟಿ ಮದ್ರಾಸ್ (ಮಷೀನ್ ಡೈನಮಿಕ್ಸ್) ಮತ್ತು ಆರಿಜೋನಾ ಸ್ಟೇಟ್ ಯುನಿವರ್ಸಿಟಿ, ಯುಎಸ್‌ಎಯಿಂದ (ಕಂಪ್ಯೂಟರ್ ಏಡೆಡ್ ಜಿಯೋಮೆಟ್ರಿಕ್ ಡಿಸೈನ್) ಸ್ನಾತಕೋತ್ತರ ಪದವಿಗಳನ್ನು ಗಳಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಇವರಿಗೆ ಗಣಿತ ಮತ್ತು ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರದ ವಿಷಯಗಳನ್ನು ದೃಶ್ಯರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ವಿಶೇಷ ಆಸಕ್ತಿಯಿದೆ; ಈ ಕ್ರಮವನ್ನು ಅವರು ತಮ್ಮ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಇಂಜಿನಿಯರಿಂಗ್, ಭೌತಶಾಸ್ತ್ರ, ಮತ್ತು ಗಣಿತವನ್ನು ಬೋಧಿಸುವಲ್ಲಿಯೂ ಬಳಸುತ್ತಾರೆ. ಅಲ್ಲದೆ ತಮ್ಮದೇ ಆನ್‌ಲೈನ್ ವಾಹಿನಿಯ ಮೂಲಕವೂ ಯೂಟ್ಯೂಬ್‌ನಲ್ಲಿ ಬೋಧನೆ ನೀಡುವಲ್ಲಿ ನಿರತರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ಆ ಯೂಟ್ಯೂಬ್‌ನ ಕೊಂಡಿ : https://www.youtube.com/user/UjjwalRane. ಅವರನ್ನು ujjukaka@gmail.com ನಲ್ಲಿ ತಲುಪಬಹುದು.

ಅನುವಾದ : ಸಹನಾ ರಾವ್