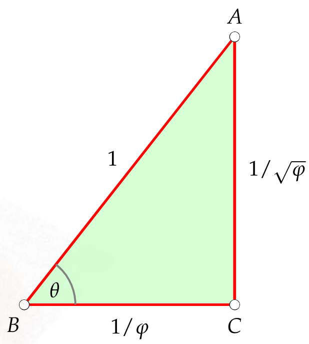
ತರಗತಿ ಕೋಣೆ

ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತ - ಅನಿರೀಕ್ಷಿತವಾಗಿ ಭಾಗ 1

ಮಾರ್ಕಸ್ ಬಿರ್ಝೋನಿ

ಕೆಪ್ಲರ್ ತ್ರಿಕೋನವು ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಬಾಹುಗಳು ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿಯಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಅದರ ಬಾಹುಗಳ ಅನುಪಾತವು $1 : \sqrt{\varphi} : \varphi$ ಇರಬೇಕಾಗುತ್ತದೆ; ಇದರಲ್ಲಿ $\varphi = (1 + \sqrt{5})/\sqrt{2}$ ಇರುತ್ತದೆ. ಇದನ್ನು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1

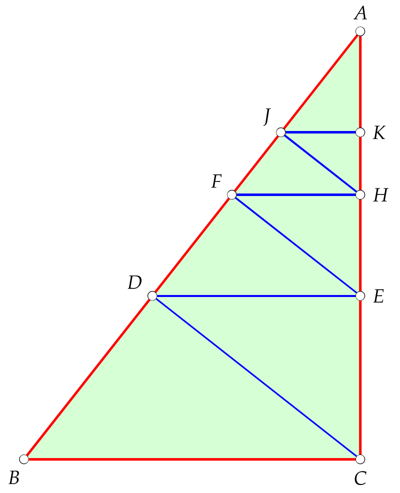
ಚಿತ್ರ 1 ರಿಂದ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುವುದೇನೆಂದರೆ, ವಿಕರ್ಣದ ಉದ್ದವು 1 ಆಗಿದ್ದರೆ (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ) ಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದಗಳು

$$\frac{1}{\varphi}, \quad \frac{1}{\sqrt{\varphi}}, \quad \text{ಮತ್ತು 1 ಆಗಿರುತ್ತವೆ.}$$

ಈ ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿನ ದೊಡ್ಡ ಲಘುಕೋನವು θ ಆದರೆ, $\tan\theta = \sqrt{\varphi}$. ಈ ಕೋನವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಲಘು ಉತ್ತರವಾಗಿದೆ. $\tan^2\theta\cos\theta = 1$. (ಏಕೆಂದರೆ, $\varphi^2 = \varphi + 1$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ನಮಗೆ $\tan^4\theta = \tan^2\theta + 1$ ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರಕುತ್ತದೆ. ಎಂದರೆ $\tan^4\theta = \sec^2\theta$, ಇದನ್ನು ಸರಳೀಕರಿಸಿದರೆ, $\tan^2\theta = \sec\theta$ ದೊರಕುತ್ತದೆ ಮತ್ತು θ ಲಘುಕೋನವಾಗಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $\tan^2\theta\cos\theta = 1$.)

ಇಲ್ಲಿ ಸ್ಪಷ್ಟೀಕರಿಸಬೇಕಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ನಾವು φ ಚಿಹ್ನೆಯನ್ನು ಅದರ ಮೌಲ್ಯವಾದ 1.618 … ಅನ್ನು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಲು ಬಳಸುತ್ತೇವೆ ಎಂಬ ಅಂಶವನ್ನು ಗಮನದಲ್ಲಿರಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ; ಇದರ ಫಲವಾಗಿ $\varphi^2 = \varphi + 1$. ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತ ಎಂದು ಕರೆಯಬಹುದಾದ ಮತ್ತೊಂದು ಮೌಲ್ಯವು ಈ ಸಂಖ್ಯೆಯ ವ್ಯುತ್ಕ್ರಮ ಸಂಖ್ಯೆ (ರೆಸಿಪ್ರೋಕಲ್) ಯಾಗಿದ್ದು ಅದು $\varphi - 1$ ಗೆ ಸಮನಾಗಿದೆ ಮತ್ತು ಇದನ್ನು G ಚಿಹ್ನೆಯಿಂದ ಗುರುತಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ.

ಮುಖ್ಯಪದಗಳು: ಕೆಪ್ಲರ್ ತ್ರಿಕೋನ, ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತ, ಅಂತಃವೃತ್ತ, ಗುಣೋತ್ತರ ಶ್ರೇಢಿ.



$AB = 1$

$BC = G$

$AC = G^{1/2}$

$CD = G^{3/2}$ $\quad AD = G$

$DE = G^2$ $\quad AF = G^2$

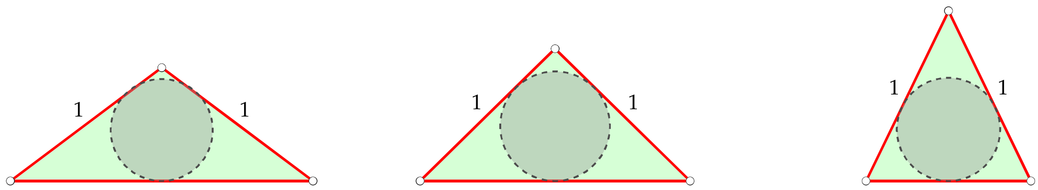
$EF = G^{5/2}$ $\quad AJ = G^3$

$FH = G^3$

$HJ = G^{7/2}$

$JK = G^4$

ಚಿತ್ರ 2

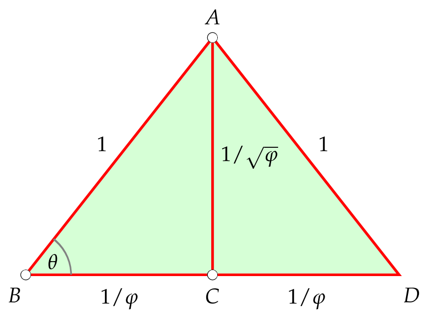


ಚಿತ್ರ 3

ಕ್ರಮವಾಗಿ ಶೃಂಗದಿಂದ ಲಂಬರೇಖೆಗಳನ್ನು ವಿಕರ್ಣವನ್ನು ಮುಟ್ಟುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ನಂತರ ವಿಕರ್ಣದಿಂದ ಬಾಹುವನ್ನು ಸ್ಪರ್ಶಿಸುವಂತೆ ಎಳೆಯಿರಿ (ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿರಿ). ಹೀಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ಮೂಡುವ ಲಂಬರೇಖೆಗಳ ಅಳತೆಯು $G^{1/2}$ ನ ಘಾತಗಳಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತವೆ. ಇದೇ ಕ್ರಮವನ್ನು ಮುಂದುವರಿಸಿದಂತೆ ಇದೇ ರೀತಿಯ ತ್ರಿಕೋನಗಳು ಮೂಡುತ್ತಾ ಹೋಗುತ್ತವೆ; ಆದ್ದರಿಂದ $G^{n/2}$ ಗೆ ಸರಿಹೊಂದುವಂತಹ ಯಾವುದೇ ಅಳತೆಯನ್ನು ಇಂತಹ ಕ್ರಮಗಳಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಾಧಿಸಬಹುದು.

ಈಗ ಎರಡು ಬಾಹುಗಳ ಅಳತೆಯು 1 ಇರುವಂತಹ ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಇದಕ್ಕೆ ಹಲವಾರು ‘ಆಕಾರಗಳು’ ಇರುವುದು ಸಾಧ್ಯ ಎನ್ನುವುದು ಸುಸ್ಪಷ್ಟ ಹಾಗೂ ತತ್ಕಾರಣ ಅಂತಃವೃತ್ತದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲಗಳೂ ಬದಲಾಗುತ್ತವೆ ಎಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 3 ನೋಡಿರಿ). ಈ ದ್ವಿಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತಃವೃತ್ತವು ಉಳಿದ ಎರಡಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಪ್ರಶ್ನೆ ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ಉದ್ಭವಿಸುತ್ತದೆ.

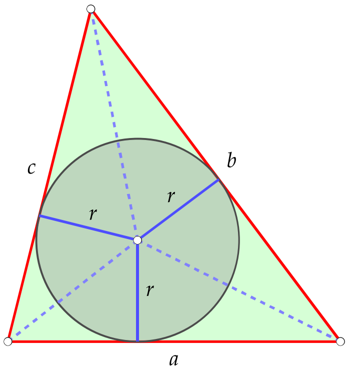
ಇದಕ್ಕೆ ನಮ್ಮ ಸ್ವೋಪಜ್ಞ ಉತ್ತರವು ನಮಗೆ ನೀಡತಕ್ಕ ದ್ವಿಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಹಾಹುತ್ರಿಕೋನವಾಗಲಿದೆ ಎಂದು ಇರಬಹುದು; ಅದು ಹಾಗಾದಲ್ಲಿ, ನಮ್ಮ ಅನಿಸಿಕೆ ಸರಿ ಎಂದಂತಾಗುತ್ತದೆ. ನಿಜಕ್ಕೂ, ದ್ವಿಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವು ಸಮಬಾಹುತ್ರಿಕೋನವಾದಾಗ ಮಾತ್ರ ಅದರ ಹೆಚ್ಚಿನ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲದ ಅನುಪಾತವು ಅಂತಃವೃತ್ತದಲ್ಲಿ ಇರುತ್ತದೆ. ಆದರೆ ಅಂತಃವೃತ್ತವನ್ನೇ ಸಾಧ್ಯವಾದಷ್ಟು ದೊಡ್ಡದು ಮಾಡಬೇಕಾದಾಗ, ನಾವು ದ್ವಿಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವನ್ನಾಗಿಸದೆ ದ್ವಿ ಕೆಪ್ಲರ್ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿ ಮಾರ್ಪಡಿಸಬೇಕು; ಎರಡು ಕೆಪ್ಲರ್ ತ್ರಿಕೋನಗಳನ್ನು ಅವುಗಳ ಉದ್ದವಾದ ಬಾಹುಗಳು ಐಕ್ಯವಾಗುವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಪಕ್ಕ ಒಂದನ್ನು ಇಡುವುದರ ಮೂಲಕ ಇದನ್ನು ಸಾಧಿಸಬಹುದು (ಚಿತ್ರ 4 ನೋಡಿರಿ).



ಚಿತ್ರ 4

ಇದು ಏಕೆಂದು ತಿಳಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಮೊದಲಿಗೆ ನಾವು ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರದ (ಇನ್ಸೆಂಟರ್) ಬಗ್ಗೆ ಅಧ್ಯಯನ ಮಾಡಬೇಕು. ಈ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರವು ಎಲ್ಲ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಸಮವಾದ r ಅಂತರದಲ್ಲಿದೆ (ಚಿತ್ರ 5 ನೋಡಿ). ಈ ಚಿತ್ರವು ಒಂದು ತ್ರಿಕೋನ ಮತ್ತು ಒಂದು ಅಂತಃವೃತ್ತವನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತಿದೆ ಮತ್ತು ತ್ರಿಕೋನದ ಶೃಂಗಗಳನ್ನು ಮತ್ತು ಅಂತಃಕೇಂದ್ರವನ್ನು ಸೇರಿಸುವ ರೇಖೆಗಳನ್ನು ಸಹ ತೋರಿಸುತ್ತಿದೆ; ಇವು ಇಡೀ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವನ್ನು ಅದರೊಳಗೆ ಅಡಕವಾಗಿರುವ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ ಮೊತ್ತವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸುತ್ತಿವೆ. ಅಂತಃವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯಗಳು ತ್ರಿಕೋನದ ಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಲಂಬವಾಗಿವೆ ಮತ್ತು ತತ್ಕಾರಣ ಸಣ್ಣ ತ್ರಿಕೋನಗಳ

ತಲಬಾಹುಗಳಿಗೆ ಇವು ಎತ್ತರಗಳಾಗಿ (ವಿಕರ್ಣದ ಎದುರಿನ ಬಾಹುಗಳಂತೆ) ಪರಿಣಮಿಸುತ್ತವೆ.



ಚಿತ್ರ 5

ಹೀಗಾಗಿ, ಇಡೀ ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲವು $ra/2 + rb/2 + rc/2 = rs$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; ಇಲ್ಲಿ s ಎಂಬುದು ತ್ರಿಕೋನದ ಅರೆ-ಪರಿಧಿ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಇದರಿಂದ ನಾವು ತರ್ಕೈಸಬಹುದಾದ ಅಂಶವೆಂದರೆ, ಯಾವುದೇ ತ್ರಿಕೋನದ ಅಂತಃತ್ರಿಜ್ಯ (ಇನ್-ರೇಡಿಯಸ್) r ಅನ್ನು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಬಳಸಿ ಪಡೆಯಬಹುದು.

$$r = \frac{(\text{ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ})}{(\text{ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಧಿ})}.$$

ಸಮದ್ವಿಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವೊಂದರ ಸಮಬಾಹುಗಳ ಉದ್ದವು 1 ಮತ್ತು ತಳದಲ್ಲಿ ನಿರ್ಮಿತವಾದ ಕೋನವು x ಆಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ:

$$\text{ತ್ರಿಕೋನದ ಕ್ಷೇತ್ರಫಲ} = \cos x \cdot \sin x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$
$$\text{ತ್ರಿಕೋನದ ಪರಿಧಿ} = 2 + 2\cos x.$$

ಆದ್ದರಿಂದ ಅಂತಃವೃತ್ತದ ತ್ರಿಜ್ಯವನ್ನು ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನೀಡುತ್ತದೆ:

$$r = \frac{\sin 2x}{2 + 2\cos x}.$$

$r = 0$ ಎಂಬ ನಿಷ್ಪನ್ನವನ್ನು ಬಳಸಿದಾಗ ನಮಗೆ

$$(2 + 2\cos x)2\cos 2x - \sin 2x(-2\sin x) = 0,$$

ಎಂಬ ಸಮೀಕರಣವು ದೊರಕುತ್ತದೆ.

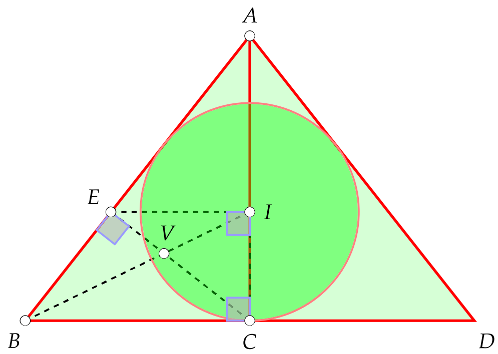
$$\therefore\ 4(1+\cos x)\left(2\cos^2 x - 1\right) + 4\sin^2 x\,\cos x = 0,$$
$$\therefore\ (1+\cos x)\left(2\cos^2 x - 1\right) + \cos x\left(1 - \cos^2 x\right) = 0,$$
$$\therefore\ 2\cos^2 x - 1 + \cos x(1 - \cos x) = 0,$$

$1 + \cos x \neq 0$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ, ಸಮೀಕರಣದ ಕೊನೆಯ ಸಾಲು ನಮಗೆ ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ;

$$\cos^2 x + \cos x - 1 = 0,$$

ಮತ್ತು $\cos x = G$ ಆಗುತ್ತದೆ. ಈ ಸಮೀಕರಣವು r ಗೆ ಗರಿಷ್ಠ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆಯೇ ಎಂಬುದನ್ನು ಓದುಗರೇ ಪರೀಕ್ಷಿಸಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಈ ವಿಶಿಷ್ಟ ದ್ವಿಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನದಲ್ಲಿ ($\triangle ABD$, ಇದರಲ್ಲಿ $AB : AD : BD = 1 : 1 : 2/\varphi$ ಮತ್ತೊಂದು ಹೆಚ್ಚುವರಿ ವಿಶಿಷ್ಟ ಗುಣವಿದೆ. ತಳರೇಖೆಯಿಂದ ಈ ತ್ರಿಕೋನದ ಎತ್ತರವು AC ಆದರೆ, ಆಗ AC ರೇಖೆಯಿಂದ ಅಂತಃಕೇಂದ್ರ (ಇನ್ಸೆಂಟರ್) I ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ರಚಿಸಿದ ಲಂಬರೇಖೆಯು $\triangle ABD$ ಯ ತಳಬಾಹುವಾದ BD ಯ ಮಧ್ಯಬಿಂದು C ಯಿಂದ AB ಬಾಹುವಿನೆಡೆಗೆ ಎಳೆದ ಲಂಬರೇಖೆಯನ್ನು D ಲಂಬರೇಖೆಯ ಪಾದವಾದ E ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸುತ್ತದೆ. ಚಿತ್ರ 6 ನೋಡಿರಿ.



ಚಿತ್ರ 6

ಅಲ್ಲದೆ I ಯು AC ಯ ಸುವರ್ಣ ಬಿಂದು (ಎಂದರೆ ಅದು ಆ ರೇಖೆಯನ್ನು ಸುವರ್ಣ ಅನುಪಾತದಲ್ಲಿ ವಿಭಜಿಸುತ್ತದೆ). ಮುಂದುವರಿದಂತೆ, BI ರೇಖೆಯು CE ರೇಖೆಯನ್ನು ಸಂಧಿಸುವ ಬಿಂದುವಾದ V ಯು CE ಮತ್ತು BI ಎರಡೂ ರೇಖೆಗಳ ಸುವರ್ಣ ಬಿಂದುವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಓದುಗರು ಇದನ್ನು ತಾವೇ ಸ್ವತಃ ರುಜುವಾತು ಮಾಡಲು ಇಚ್ಛಿಸಬಹುದು.

ಮಾರ್ಕಸ್ ಬಿಝೋನಿಯವರು ಕೇಪ್ ಟೌನ್‌ನ ಬಿಷಪ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಉಪ ಮುಖ್ಯಸ್ಥರು (ಶೈಕ್ಷಣಿಕ) ಆಗಿ ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಅದಕ್ಕೆ ಮುಂಚೆ ಅವರು ಅಲ್ಲಿಯ ಗಣಿತ ವಿಭಾಗದ ಪ್ರಧಾನ ಹುದ್ದೆಯನ್ನು ಅಲಂಕರಿಸಿದ್ದರು. ಬಿಷಪ್ಸ್‌ನಲ್ಲಿ ಅವರು ಮೂರು ದಶಕಗಳಿಗೂ ಹೆಚ್ಚು ಕಾಲ ಬೋಧಕರಾಗಿದ್ದರು. ಅಸೋಸಿಯೇಷನ್ ಫಾರ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಎಜುಕೇಟರ್ಸ್ ಆಫ್ ಸೌತ್ ಆಫ್ರಿಕಾ ಪ್ರಕಟಿಸುವ ಪತ್ರಿಕೆಯಾದ ಲರ್ನಿಂಗ್ ಎಂಡ್ ಟೀಚಿಂಗ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್‌ನ ಸಹ ಸಂಪಾದಕರಾಗಿಯೂ ಇವರು ಸೇವೆ ಸಲ್ಲಿಸಿದ್ದಾರೆ. ಸೌತ್ ಆಫ್ರಿಕನ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್‌ನ ಕೊಶ್ಚೆನ್ಸ್ ಫಾರ್ ಜೂನಿಯರ್ (ಗ್ರೇಡ್ 8 ಮತ್ತು 9) ನ ಪ್ರಶ್ನೆಪತ್ರಿಕೆಗಳನ್ನು ನಿಶ್ಚಯಿಸುವ ಮಂಡಳಿಯ ಸಂಚಾಲಕರಾಗಿದ್ದ ಮತ್ತು ಈಗ ವಿಶ್ರಾಂತ ಜೀವನ ನಡೆಸುತ್ತಿರುವ ಮಾರ್ಕಸ್ ಬಿಝೋನಿಯವರನ್ನು ಈ ಕೊಂಡಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು: marcusbizony@gmail.com.

ಅನುವಾದ : ಎನ್. ರಾಮನಾಥ್