ಸಮಸ್ಯಾ ಕಟ್ಟೆ

ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನಕ್ಕೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಪ್ರಮೇಯ

ಕೊಮ್ಯಾಕ್

ತ್ರಿಕೋನವನ್ನು ಕುರಿತಾದ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸೊಗಸಾದ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಫಲಿತಾಂಶವು 2016ರ ರೀಜನಲ್ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಒಲಿಂಪಿಯಾಡ್(RMO)ನಲ್ಲಿ ಕಂಡುಬಂದ ಸಮಸ್ಯೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿದೆ.

ABC ಒಂದು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿರಲಿ ಮತ್ತು D ಬಿಂದುವು BC ಬಾಹುವಿನ ಮಧ್ಯಬಿಂದುವಾಗಿರಲಿ. ಮಧ್ಯರೇಖೆ (ಮೀಡಿಯನ್) AD ಯನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ. D ಬಿಂದುವಿನ ಮೂಲಕ AD ರೇಖೆಗೆ ಲಂಬವಾದ ರೇಖೆಯೊಂದನ್ನು ಎಳೆಯಿರಿ ಮತ್ತು ಈ ರೇಖೆಯು AB ಮತ್ತು AC ರೇಖೆಗಳ ವಿಸ್ತರಿಸಿದ ರೇಖಾಖಂಡಗಳನ್ನು ಕ್ರಮವಾಗಿ K ಮತ್ತು L ಗಳಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಲಿ. ಆಗ BAC ಕೋನವು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ B, C, K, L ಬಿಂದುಗಳು ಒಂದೇ ವೃತ್ತದ ಮೇಲೆ ಇರುವಂತಹ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. (ಚಿತ್ರ 1 ನೋಡಿ).

ಚಿತ್ರ 1

ಇದನ್ನು ಒಂದು ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸುಲಭ (ತ್ರಿಕೋನವು ಲಂಬ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ ನಾಲ್ಕೂ ಬಿಂದುಗಳು ಸಹವೃತ್ತಸ್ಥ (ಕಾನ್‌ಸೈಕ್ಲಿಕ್) ಆಗಿರುತ್ತವೆ). ಆದರೆ ಪ್ರತಿಲೋಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವುದು ಹೆಚ್ಚಿನ ಸವಾಲನ್ನು ಒಡ್ಡುತ್ತದೆ. ಮುಂದಿನ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವಿಕೆ (ಫಾರ್ವರ್ಡ್ ಇಂಪ್ಲಿಕೇಶನ್)ಗೆ ನಾವು ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನು ನೀಡಿ, ನಂತರ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಪರಿಹಾರವನ್ನೂ ಸೂಚಿಸೋಣ; ಇದರಲ್ಲಿ ಎರಡು ವಿಧದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವಿಕೆಗಳೂ ಏಕಕಾಲದಲ್ಲಿ ಸ್ಥಾಪನೆಗೊಳ್ಳುತ್ತವೆ.

ನಾಲ್ಕೂ ಬಿಂದುಗಳು ಸಹವೃತ್ತಸ್ಥ ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಋಜುವಾತು: $\angle BAC$ ಯು ಲಂಬಕೋನವೆಂದು ನೀಡಲಾಗಿದೆ. ಬಿಂದುಗಳಾದ B. K. L ,C ಗಳು ಸಹವೃತ್ತಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳೆಂದು ಋಜುವಾತು ಮಾಡಬೇಕು.

ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ, ಛೇದಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಪ್ರಮೇಯ, ಅಡ್ಡಹಾಯ್ದ ಜ್ಯಾಗಳ ಪ್ರಮೇಯ, ಅಪೋಲೋನಿಯಸ್, ಬಿಂದುವೊಂದರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ

ನಾಲ್ಕು ದತ್ತ ಬಿಂದುಗಳು ಸಹವೃತ್ತಸ್ಥಗಳೆಂದು ಋಜುವಾತುಗೊಳಿಸಲು ಬಳಸುವ ಮೊದಲ ವಿಧಾನವೆಂದರೆ ಕೋನ-ಹಿಂಬಾಲಿಸುವ ಮಾರ್ಗ: ಎಂದರೆ ಎರಡು ಕೋನಗಳು ಸಮ ಎಂದು ತೋರ್ಪಡಿಸುವುದು. ಪ್ರಸ್ತುತ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ, $\angle AKD = \angle ACD$ ಅಥವಾ $\angle ALD = \angle ABD$ ಎಂದು

ಸ್ಥಾಪಿಸಿಬಿಟ್ಟರೆ ಸಾಕು. (ಈ ಎರಡೂ ಹೇಳಿಕೆಗಳು ಪರಸ್ಪರ ಸಮವಾಗಿವೆ ಎನ್ನುವುದು ಸ್ಪಷ್ಟ). ಚಿತ್ರ 2 ನೋಡಿ; ನಾವು $x = y$ ಎಂದು ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸಬೇಕು.

ಚಿತ್ರ 2

$x = z$ ಮತ್ತು $y = z$ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಾಗ ನಾವು ಬಯಸುತ್ತಿರುವ ಸಮಾನತೆಯು ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿಯೇ ಗೋಚರವಾಗುತ್ತದೆ. $y = z$ ಏಕೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯಬೇಕಾದರೆ, ಕೋನಗಳಾದ x ಮತ್ತು y ಎರಡೂ $\angle ALK$ ಗೆ ಪೂರಕವಾಗಿವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. (ಮತ್ತು ಇದಕ್ಕೆ ಕಾರಣವೇನೆಂದರೆ $\angle LAK$ ಮತ್ತು $\angle ADL$ ಗಳು ಲಂಬ ಕೋನಗಳು). $x = z$ ಏಕೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರಿಯಬೇಕಾದರೆ , $\triangle ABC$ ಒಂದು ಲಂಬಕೋನ ತ್ರಿಕೋನವಾಗಿದ್ದು, ಅದರ ಲಂಬಕೋನವು A ಯಲ್ಲಿದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಅದರ ಪರಿವೃತ್ತವು ವಿಕರ್ಣ BC ಯ ಮಧ್ಯಭಾಗದಲ್ಲಿದೆ. ಎಂದರೆ ಬಿಂದು B ಯು ಶೃಂಗಗಳಾದ A, B, ಮತ್ತು C ಗಳಿಗೆ ಸಮಾನಾಂತರದಲ್ಲಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ $DA = DC$, ಮತ್ತು ತತ್ಕಾರಣ $x = z$.

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮುಂದಿನ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಋಜುವಾತು ಮಾಡಲಾಯಿತು: $\angle BAC$ ಯು ಲಂಬಕೋನವಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ B, K, C, L ಬಿಂದುಗಳು ಸಹವೃತ್ತಸ್ಥವಾಗಿರುತ್ತವೆ.

ಪ್ರತಿಲೋಮ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವಿಕೆಗೆ, ಜ್ಯಾಮಿತೀಯ ಕ್ರಮವು ಸಿಗದು ಎನಿಸುತ್ತದೆ; ಆದ್ದರಿಂದ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ಕ್ರಮವನ್ನು ಆಯ್ಕೆ ಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುತ್ತೇವೆ. ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಫಲಿತಾಂಶಗಳು ನಮಗೆ ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ:

(i) ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮ: $\triangle ABC$ ಯಲ್ಲಿ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$, ಇತ್ಯಾದಿಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿದೆ;

(ii) ಛೇದಿಸುವ ಜ್ಯಾಗಳ ಪ್ರಮೇಯವು ಅಡ್ಡಹಾಯ್ದ ಜ್ಯಾಗಳ ಪ್ರಮೇಯವೆಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ ಮತ್ತು 'ಬಿಂದುವೊಂದರ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ' ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗೆ ಸಂಬಂಧಿತವಾಗಿದೆ: O ಅನ್ನು ಕೇಂದ್ರವಾಗಿ ಉಳ್ಳ ಮತ್ತು r ತ್ರಿಜ್ಯವುಳ್ಳ ವೃತ್ತದಲ್ಲಿ, ಆ ವೃತ್ತದ ಎರಡು ಜ್ಯಾಗಳಾದ EF ಮತ್ತು GH ಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ (ಈ ಬಿಂದುವು ವೃತ್ತದ ಒಳಗೆ ಅಥವ ಹೊರಗೆ ಇರಬಹುದು), ಆಗ ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮಾನತೆಯು ಸಂಭವಿಸುತ್ತದೆ:

$PE \cdot PF = PO^2 - r^2 = PG \cdot PH$.

(ಇಲ್ಲಿನ ಅಂತರಗಳಿಗೆ ಚಿಹ್ನೆಗಳಿವೆ (signed) ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ; ಆದ್ದರಿಂದ PE ಮತ್ತು PF ಗಳು ಪರಸ್ಪರ ವಿರುದ್ಧ ದಿಕ್ಕಿನಲ್ಲಿ ಗುರುತಿಸಲಾಗಿದ್ದರೆ, ಆಗ $PE \cdot PF \leq 0$.) ನಮಗೆ ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ಪ್ರಮೇಯವೂ ಬೇಕು (ಮತ್ತು ಅದೂ ಸಹ ಸತ್ಯವಾದುದೇ): $PE \cdot PF = PG \cdot PH$ ಸಮೀಕರಣಕ್ಕೆ ಅನುಗುಣವಾಗಿ ಸಮತಳೀಯ (coplanar) ಬಿಂದುಗಳಾದ E, F, G, H ಗಳನ್ನು ಇರಿಸಿದರೆ ಮತ್ತು ಹೀಗೆ

ಇರಿಸಿದಾಗ EF ಮತ್ತು GH ರೇಖೆಗಳು P ಬಿಂದುವಿನಲ್ಲಿ ಸಂಧಿಸಿದರೆ, ಆಗ E, F, G ಮತ್ತು H ಬಿಂದುಗಳು ಸಹವೃತ್ತಸ್ಥ ಬಿಂದುಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

(iii) ಅಪೋಲೋನಿಯಸ್ ಪ್ರಮೇಯವು ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ನಮಗೆ ತಿಳಿಸುತ್ತದೆ:

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 .$$

ನಾವು ಈ ಕೆಳಕಂಡಂತೆ ಪರಾಮರ್ಶಿಸುತ್ತೇವೆ:

ಬಿಂದುಗಳು B, C, K, L ಗಳು ಸಹಪರಿವೃತ್ತಸ್ಥ $\Longleftrightarrow AB \cdot AK = AC \cdot AL$

$$\Longleftrightarrow c \, . \frac{\mathrm{AD}}{\cos \angle KAD} = b \, . \frac{\mathrm{AD}}{\cos \angle LAD}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}} = \frac{\cos \angle BAD}{\cos \angle CAD}$$

ಚಿತ್ರ 3.

ನಂತರ, ಕೊಸೈನ್ ನಿಯಮದ ಪ್ರಕಾರ:

$$\cos \angle BAD = \frac{AB^2+AD^2-\mathrm{BD}^2}{2\ \mathrm{AB}\,.\ \mathrm{AD}} \quad , \quad \cos \angle CAD = \frac{AC^2+AD^2-\mathrm{CD}^2}{2\ \mathrm{AC}\,.\ \mathrm{AD}}$$

ಆದ್ದರಿಂದ :

$$\frac{\cos \angle BAD}{\cos \angle CAD} = \frac{AB^2+AD^2-\mathrm{BD}^2}{AC^2+AD^2-\mathrm{CD}^2} \, . \quad \frac{AC}{AB} = \frac{c^2+AD^2-\mathrm{a}^2/4}{b^2+AD^2-\mathrm{a}^2/4} \, . \, \frac{b}{c} \, .$$

ಅಪೋಲೋನಿಯಸ್ ಪ್ರಮೇಯದ ಪ್ರಕಾರ:

$$\mathrm{AD}^2 = \frac{b^2}{2} + \frac{c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$

ಈ ಮೌಲ್ಯವನ್ನು ಹಿಂದಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಆದೇಶಿಸಿದರೆ, ಈ ಕೆಳಕಂಡ ಸಮೀಕರಣ ದೊರೆಯುತ್ತದೆ:

$$\frac{\cos \angle BAD}{\cos \angle CAD} = \frac{3c^2+b^2-\mathrm{a}^2}{3b^2+c^2-\mathrm{a}^2} \, . \, \frac{b}{c}$$

ಈ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ನಮಗೆ ದೊರೆತ ಸಮೀಕರಣವೆಂದರೆ:

ಬಿಂದುಗಳು B, C, K, L ಗಳು ಸಹಪರಿವೃತ್ತಸ್ಥ $\Longleftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{3c^2+b^2-\mathrm{a}^2}{3b^2+c^2-\mathrm{a}^2} \, . \, \frac{b}{c}$

ಎಂದರೆ ಬಿಂದುಗಳು B, C, K, L ಗಳು ಸಹಪರಿವೃತ್ತಸ್ಥ $\Longleftrightarrow c^2 (3b^2 + c^2 - a^2) = b^2$
$(3c^2 + b^2 - a^2)$.

ಮುಂದಿನ ಹೆಜ್ಜೆಯಲ್ಲಿ:

$$c^2 (3b^2 + c^2 - a^2) - b^2 (3c^2 + b^2 - a^2) = a^2 (b^2 - c^2) - (b^4 - c^4)$$
$$= (a^2 - b^2 - c^2) - (b^2 - c^2).$$

ಆದ್ದರಿಂದ: ಬಿಂದುಗಳು B, C, K, L ಗಳು ಸಹಪರಿವೃತ್ತಸ್ಥ $\Longleftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2) - (b^2 - c^2) = 0.$

$b^2 - c^2 \neq 0$ ಆದ್ದರಿಂದ (ತ್ರಿಕೋನವು ಅಸಮಬಾಹು ತ್ರಿಕೋನವೆಂದು ನಮಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗಿ ತಿಳಿಸಲಾಗಿದೆ),

ಅಂತಿಮವಾಗಿ ನಾವು ಈ ವಿಧದ ತರ್ಕವನ್ನು ಮಂಡಿಸುತ್ತೇವೆ:

ಬಿಂದುಗಳು B, C, K, L ಗಳು ಸಹಪರಿವೃತ್ತಸ್ಥ $\Longleftrightarrow a^2 - b^2 - c^2 = 0 \Longleftrightarrow \angle BAC = 90^0.$

ಇದರ ಪ್ರತಿಲೋಮ ವ್ಯಕ್ತಗೊಳಿಸುವಿಕೆಯನ್ನು ಶುದ್ಧ ಜ್ಯಾಮೀತಿಯ ರೀತಿಯಲ್ಲಿಯೇ ಸಾಧಿಸಿ ತೋರಿಸುವ ಸವಾಲನ್ನು ಸ್ವೀಕರಿಸಲು ನಿಮ್ಮಲ್ಲಿ ಕೆಲವರು ಉತ್ಸುಕರಾಗಿರಬಹುದೆಂದು ಭಾವಿಸಬಹುದೇ?.

ದ ಕಮ್ಯುನಿಟಿ ಮ್ಯಾಥಮ್ಯಾಟಿಕ್ಸ್ ಸೆಂಟರ್ (ಕೊಮ್ಯಾಕ್) ರಿಷಿ ವ್ಯಾಲಿ ಎಜುಕೇಷನ್ ಸೆಂಟರ್(AP) ಮತ್ತು ಸಹ್ಯಾದ್ರಿ ಸ್ಕೂಲ್ (KFI)ಗಳ ಒಂದು ವಿಸ್ತರಣಾ ಅಂಗವಾಗಿದೆ. ಈ ಅಂಗಸಂಸ್ಥೆಯು ಗಣಿತ ಬೋಧನಾ ಕಾರ್ಯಾಗಾರಗಳನ್ನು ನಡೆಸುತ್ತದೆ ಮತ್ತು ರಾಜ್ಯ ಸರ್ಕಾರಗಳ ಮತ್ತು ಸರ್ಕಾರೇತರ ಶಾಲೆಗಳ ಬೋಧನಾ ಸಾಮಗ್ರಿಗಳ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸುವಿಕೆಯ ಕಾರ್ಯವನ್ನು ಕೈಗೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಕೊಮ್ಯಾಕೊವನ್ನು ಈ ಕೊಂಡಿಯಲ್ಲಿ ಸಂಪರ್ಕಿಸಬಹುದು: shailesh.shirali@gmail.com.