Translation of Conversations on Greatest Common Divisor : Ashok Prasad_From Azim premji University At Right Angles_March, 2020

कक्षा से

महत्तम समापवर्तक पर बातचीत

अशोक प्रसाद

मुख्य शब्द / कीवर्ड : गुणनखण्ड, अभाज्य, समान गुणनखण्ड, महत्तम समापवर्तक गुणज, एल्गोरिद्म, क्यों का तर्क

आज मैं आपके साथ मेरी चचेरी बहन अपूर्वा, जो कक्षा 9 की एक जिज्ञासु छात्रा है, और मेरे बीच की एक दिलचस्प बातचीत साझा करने जा रहा हूँ। यह बातचीत तब शुरू हुई जब उसने मुझे प्रियंका को महत्तम समापवर्तक (Greatest Common Deviser) सिखाते हुए देखा। प्रियंका मेरे पड़ोस में रहती है। वह कक्षा चार की छात्रा है। कभी-कभी वह गणित में मदद लेने के लिए मेरे घर आती है। एक दिन प्रियंका को उसके होमवर्क में मदद करने के बाद, मैंने अपूर्वा से बात करना शुरू किया।

मैं : क्या तुम जानती हो कि महत्तम समापवर्तक (आगे से हम इसे संक्षेप में 'मस' लिखेंगे) की गणना कैसे की जाती है?

अपूर्वा : ओह, अरे भैया! बेशक मुझे पता है! मैं इसे खोजने की पाँच विधियाँ जानती हूँ।

मैं : पाँच विधियाँ? यह तो मुझे भी पता नहीं था कि मस को खोजने के पाँच तरीक़े होते हैं।

अपूर्वा : ठीक है!! मैं उन्हें एक-एक करके समझाती हूँ। सबसे पहले, जिन संख्याओं का मस निकालना हो उन संख्याओं को अभाज्य संख्याओं के गुणनखण्ड के रूप में लिख लो।

उदाहरण के लिए, $60 = 2 \times 2 \times 3 \times 5$ और $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$

अभाज्य संख्याओं के गुणनखण्ड के रूप में लिखने के बाद, उनमें से समान अभाज्य गुणनखण्डों का गुणनफल, दी गई संख्याओं को मस होगा। यानी इस उदाहरण में $2 \times 2 \times 3$, संख्या 60 और 24 का मस होगा।

मैं : यह पहली विधि है जिसके बारे में मुझे भी पता है। इसे हम अभाज्य गुणनखण्ड विधि (Prime factorization method) कहते हैं। क्या तुम मुझे बता सकती हो कि यह विधि कैसे काम करती है? मेरा मतलब है कि हम बताए गए चरणों का पालन करके मस क्यों खोज पाते हैं?

अपूर्वी : यह तो बहुत आसान है और कारण इसके नाम महत्तम समापवर्तक –में छिपा है। महत्तम समापवर्तक का शाब्दिक अर्थ है– सबसे बड़ा अपवर्तक। तो दो (या अधिक) संख्याओं का महत्तम समापवर्तक यानी वह सबसे बड़ी संख्या जो दोनों (या सभी) संख्याओं को विभाजित करती हो। अभाज्य गुणनखण्ड विधि में, प्रत्येक संख्या अभाज्य संख्याओं का एकमात्र सम्भव संयोजन है। इसके पीछे दो बातें हैं। पहली यह कि अगर कोई गिनती वाली संख्या, दो अभाज्य संख्याओं से विभाजित होती है तो वह गिनती वाली संख्या, विभाजित करने वाली अभाज्य संख्याओं के गुणनफल से भी विभाजित हो जाती है। यहाँ पर भी यही हो रहा है। 60 संख्या 2 और 2 से विभाजित हो रही है तो यह 4 से विभाजित होगी ही। यह बात हम 24 के लिए भी कह सकते हैं। अभाज्य गुणनखण्ड विधि में हमने दोनों संख्याओं के सभी अभाज्य गुणनखण्डों को लिख दिया और फिर उन संख्याओं को छाँट दिया है जो दोनों संख्याओं को विभाजित कर रही हैं। इसलिए इनके गुणनफल से जो सबसे बड़ी संख्या मिलती है वह दी गई संख्याओं का महत्तम समापवर्तक होगी।

दूसरी बात यह कि हमने जान-बूझकर अभाज्य गुणनखण्ड ही लिए हैं, केवल गुणनखण्ड नहीं। किसी भी गिनती वाली संख्या को अभाज्य गुणनखण्डों के रूप में केवल एक ही तरीक़े से लिखा जा सकता है।

मैं : बहुत बढ़िया!! अब दूसरा तरीक़ा बताओ।

अपूर्वी (मस निकालने की दूसरी विधि) : मान लीजिए कि हमें दो संख्याओं 60 और 24 का मस खोजना है। इसके लिए, हम पहले 60 को 24 से विभाजित करते हैं तो शेषफल 12 बचता है। फिर 24 को शेषफल 12 से विभाजित करने पर हमें शेषफल 0 मिलता है। तब यह प्रक्रिया समाप्त होती है और इस प्रक्रिया का अन्तिम विभाजक, 60 और 24 का मस होता है।

मैं : ठीक है। यह मस निकालने की लम्बी विभाजन विधि (Long division method) है, लेकिन अभी तो तुम मुझे तीन विधियाँ और बताने वाली हो।

अपूर्वी : हाँ! हाँ! धीरज रखो! मैं आपको सभी पाँच विधियाँ बताने जा रही हूँ। हम चौखाना टाइल्स द्वारा भी मस की गणना कर सकते हैं। (चित्र 1 में बनाया और समझाया गया)।

Figure 1: Calculating GCD using square tiles.

चित्र-1 : चौखाना टाइल्स का उपयोग करके मस की गणना।

60 और 24 के मस को खोजने के लिए, 60 × 24 लम्बाई-चौड़ाई का एक आयत बनाएँ। अब 24 × 24 लम्बाई-चौड़ाई के सभी सम्भव वर्ग बनाएँ। जो बचता है वह 12 × 24 लम्बाई-चौड़ाई का आयत है। फिर, हम यथासम्भव 12 × 12 के वर्ग बनाते हैं। क्या कोई आयत बचा है? इसका उत्तर है– नहीं बचा और इसलिए 12, 60 और 24 का मस है।

(मुझे आश्चर्य हुआ कि अपूर्वी इसे पूरी तरह से नई विधि मान रही थी और वह विधि 2 और 3 के बीच अन्तर्सम्बन्धों को देखने में असमर्थ थी। लेकिन इन दो विधियों के बीच सम्बन्ध पर चर्चा करने के बजाय, मैंने अगली दो विधियों को सुनना तय किया। तो, मैंने उससे चौथी विधि पूछी।)

मैं : दिलचस्प है!! मुझे मस खोजने की अगली विधि बताओ।

अपूर्वी : हम पट्टियों द्वारा भी मस निकाल सकते हैं।

(फिर से, उसने **चित्र 2** बनाया)।

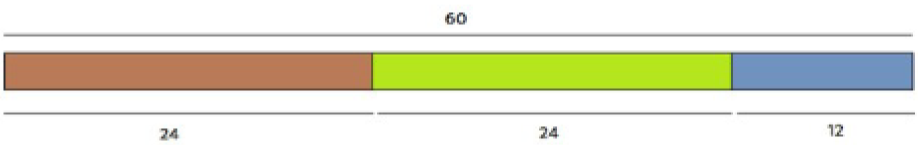

Figure 2: Calculating GCD using strips.

चित्र-2 : पट्टियों का उपयोग करके मस की गणना करना।

60 और 24 के मस को खोजने के लिए हम पहले 60 लम्बाई की एक पट्टी बनाते हैं और फिर एक छोर से शुरू करते हुए जितनी बार सम्भव हो उतनी बार 24 लम्बाई की पट्टियाँ बनाते जाते हैं। हम 24 लम्बाई की दो पट्टियों को फिट करने में सक्षम थे और शेष पट्टी की लम्बाई पता करने पर, हमने इसे 12 पाया। फिर हम 24 लम्बाई की पट्टी पर 12 लम्बाई की पट्टियाँ बनाते हैं (फिर से एक छोर से शुरू करते हैं, चित्र 3 देखें)। इस बार, 12 लम्बाई की दो पट्टियाँ बनाने के बाद कुछ भी नहीं बचा है।

इसलिए, 60 और 24 का मस 12 होगा।

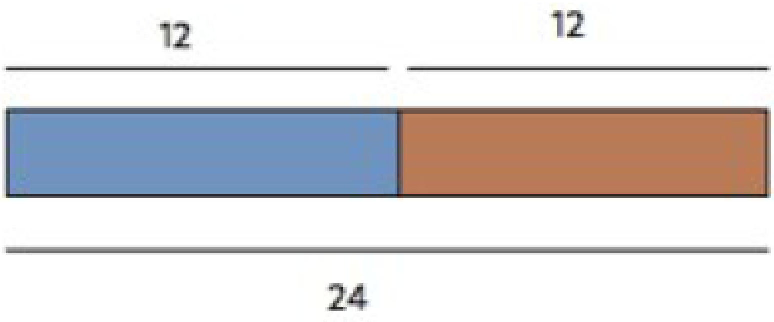

Figure 3: Calculating GCD using strips

चित्र-3 : पट्टियों का उपयोग करके मस की गणना करना

मैं : मैं चाहता हूँ कि तुम, अपने द्वारा साझा की गई विधियों के कुछ अन्य पहलू पर सोचो, लेकिन उससे पहले मुझे अपनी पाँचवीं विधि बताओ।

अपूर्वी : मैंने हाल ही में इस पद्धति के बारे में सीखा। इस विधि का नाम यूक्लिड डिवीजन एल्गोरिद्म है। मेरे शिक्षक ने मुझे बताया कि इस विधि को पहली बार यूक्लिड ने अपनी पुस्तक *एलिमेंट्स* में समझाया था। इस पद्धति का उपयोग करते हुए मस निकालने के लिए हम 'भाज्य = भाजक x भागफल + शेषफल' सम्बन्ध का प्रयोग तब तक करते हैं जब तक हमें शेषफल शून्य नहीं मिल जाता है। 60 और 24 के लिए यह इस प्रकार होगा–

$60 = 2 \times 24 + 12$

शुरुआत 60 और 24 से की है।

संख्या की अगली जोड़ी के लिए 60 और 24 में से छोटी संख्या और शेषफल को लें व फिर से ऊपर बताए सम्बन्ध का उपयोग करें।

$24 = 2 \times 12 + 0$

यहाँ हमें शेषफल 0 मिलता है, इसलिए 60 और 24 का मस 12 होगा।

मैं : यहाँ तुम्हारे लिए दो प्रश्न हैं।

1. क्या तुम इस विधि को अपने शब्दों में समझा सकती हो?
2. 24 = 2 x 12 + 0, इस सम्बन्ध से मस 12 ही क्यों है? (60 और 24 का मस 2 क्यों नहीं होता है?)

अपूर्वी : (थोड़ी हैरानी और शिकायत भरे लहज़े में) भैया, आप हमेशा मुझसे विधि को शब्दों में बताने के लिए क्यों कहते हैं? इस विधि के अनुसार, किसी भी धनात्मक पूर्णांक जोड़ी a, b के लिए (मान लो) $0 < b \leq a$, हम लिख सकते हैं $a = q \times b + r$ जहाँ $0 \leq r < b$; यहाँ b भाजक है, q भागफल है, और r शेषफल है; b और r ऋणात्मक पूर्णांक नहीं हैं।

यदि शेषफल $r = 0$ है, तो इसका मतलब है कि a, b का गुणज है, इसलिए b स्वयं a और b का मस है। यदि $r > 0$ है, तब हमारे पास b और r दो धनात्मक संख्याएँ हैं तो इसे भी $b = r \times b_1 + r_1$ ऐसे लिख सकते हैं, जहाँ $0 \leq r_1 < b_1$ है।

यदि शेषफल $r_1 > 0$, तो हम तब तक विभाजन प्रक्रिया जारी रखते हैं जब तक कि शेषफल शून्य न हो जाए, और फिर अन्तिम भाजक a और b का मस होगा।

मैं : ठीक है!! अपूर्वी, मुझे ख़ुशी है कि तुम मस निकालने की कई विधियाँ जानती हो। लेकिन मुझे सन्देह है कि क्या वे सभी अलग-अलग विधियाँ हैं। इसलिए, मैं तुम्हें सोचने के लिए कुछ प्रश्न दे रहा हूँ।

1. *इन सभी विधियों में बुनियादी तर्क क्या है? यह विधियाँ क्यों काम करती हैं? मेरा मतलब है, इन प्रक्रियाओं से मस कैसे निकल जाता है?*
2. *क्या इन विधियों में कोई सम्बन्ध है?*

अपूर्वी : नहीं, नहीं!! यह ठीक नहीं है! आपको जवाब पता है। अपने सवालों के साथ मुझे छोड़ने के बजाय, मुझे जवाब बताओ। नहीं तो, आप जानते हैं, आपके प्रश्न मुझे परेशान करते रहेंगे जब तक कि मुझे स्पष्टीकरण नहीं मिलेगा।

मैं : अपूर्वी, यह सवाल मुझे भी परेशान कर रहे हैं और अभी, मेरे पास इनके बारे में कोई अच्छा स्पष्टीकरण और विचारशील प्रतिक्रिया नहीं है। इसलिए, मेरा सुझाव है कि तुम भी उनके बारे में सोचो और मैं भी सोच-विचार करूँगा।

अपूर्वी : ठीक है!! मैंने कभी इनके बारे में सोचा नहीं। लेकिन मैं जल्द ही आपको इन सवालों का जवाब बताऊँगी।

अपूर्वी के साथ मेरी इतनी बातचीत हुई थी और फिर मैं इसके बारे में भूल गया था। लेकिन हमारी बातचीत का नतीजा महीनों बाद आया। एक शाम मैं उपन्यास *अ सर्टन एम्ब्युगिटि* (A Certain Ambiguity) का आनन्द ले रहा था। मेरे हाथ में चाय का प्याला था और पृष्ठभूमि में धीमा-धीमा गढ़वाली संगीत बज रहा था। तभी अचानक, हाथ में नोटबुक लिए अपूर्वी ने कमरे में प्रवेश किया। वह बहुत ख़ुश लग रही थी। उसकी आँखों की चमक से यह स्पष्ट था कि वह मेरे साथ कुछ रोमांचक बात साझा करना चाहती थी।

अपूर्वी : (उत्साह से) भैया! भैया! मैं समझ गई! मैं समझ गई!

मैं : (मैं थोड़ी उलझन में पड़ गया) 'मैं समझ गई?'! तुम क्या समझ गईं, अपूर्वी?

अपूर्वी : आपके सवालों के जवाब।

मैं : कौन-से सवाल?

अपूर्वी : भैया! आपको मस पर हमारी बातचीत याद है जो हमने कुछ महीने पहले की थी और जिसके अन्त में आपने मुझे कुछ सवालों के साथ छोड़ दिया था?

मैं : मस पर बातचीत? मुझे ऐसा कुछ याद नहीं। थोड़ा विस्तार से बताओ ताकि मैं याद कर सकूँ।

अपूर्वी : जब मैंने आपको बताया था कि किन्हीं दो संख्याओं का मस खोजने की पाँच विधियाँ हैं और एक-एक करके उनका वर्णन किया था।

मैं : हाँ, हाँ! अब मुझे याद आया। मुझे सवाल भी याद हैं लेकिन खेद है कि मुझे उनपर विचार करने का समय नहीं मिला। अच्छा, तुम बताओ।

अपूर्वी : ठीक है, भैया। अब मैं आपको अपने निष्कर्ष बताने जा रही हूँ। सबसे पहले, मैंने पाया कि वे सभी अलग-अलग विधियाँ नहीं हैं। पहली विधि अलग है लेकिन बाक़ी की चार एक ही गणितीय तर्क पर आधारित हैं। इसलिए इन चार विधियों के बीच एक स्पष्ट सम्बन्ध है।

मैं : ओह सच! मैं यह जानने के लिए उत्सुक हूँ कि वह गणितीय तर्क क्या है।

अपूर्वी : तर्क बताने से पहले, मैं आपको यह बताना चाहूँगी कि मैंने यह निष्कर्ष कैसे निकाला कि यह विधियाँ किस पर आधारित हैं। मैंने मस को खोजने के लिए निम्न तालिका बनाई जो मस खोजने की विधियों के गणितीय तर्क को दर्शाती है।

मैंने कोई भी दो संख्याएँ लीं और उनको नीचे दी गई तालिका में भर दिया। फिर मैंने इन दोनों संख्याओं में से छोटी संख्या को लिया और छोटी संख्या द्वारा बड़ी संख्या को विभाजित करने पर मिले शेषफल को अगली पंक्ति में लिखा। मैंने इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखा जब तक कि मुझे 0 शेषफल नहीं मिला। तालिका से मैंने देखा कि गुणनखण्ड द्वारा प्राप्त मस क्रमिक विभाजन के अन्तिम भाजक के बराबर है। यही वह तर्क है जिसे हमने अन्तिम चार विधियों में लागू किया है।

मैं : क्या तुम थोड़ा और विस्तार से बता सकती हो, अपूर्वी?

अपूर्वी : हम एक-एक करके देखते हैं। दूसरी विधि में, हम पहले 60 को 24 से विभाजित करते हैं जिसका अर्थ है कि हम देखते हैं कि 60 में कितने 24 हैं और शेष 12 पाते हैं। फिर, हम देखते हैं कि 24 में कितने 12 हैं और 12 और 24 के मस को देखने पर हमने पाया कि वह 24 और 60 के मस के बराबर है। आयत विधि में हम फिर से यही देखते हैं कि 60 में कितने 24 हैं। यह 60 को 24 से विभाजित करने और इसके आगे 24 को शेषफल 12 से विभाजित करने जैसा ही है। इसी प्रक्रिया को अन्तिम दो विधियों में भी लागू किया गया है।

परीक्षण क्रमांक	**संख्याएँ a और b ($a > b$)**	**बड़ी संख्या 'a' का अभाज्य गुणनखण्ड**	**छोटी संख्या 'b' का अभाज्य गुणनखण्ड**	**a और b का मस**	**शेषफल जब $a \div b$**
1	60 और 24	$2 \times 2 \times 3 \times 5$	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	12	$12 = 60 - 2(24)$
	अब हम 24 और 12 लेंगे	$2 \times 2 \times 2 \times 3$	$2 \times 2 \times 3$	12	$0 = 24 - 2(12)$
2	56 और 16	$2 \times 2 \times 2 \times 7$	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	8	$8 = 56 - 3(16)$
	अब हम 16 और 8 लेंगे	$2 \times 2 \times 2 \times 2$	$2 \times 2 \times 2$	8	$0 = 16 - 2(8)$
3	165 और 65	$5 \times 3 \times 11$	5×13	5	$35 = 165 - 2(65)$
	अब हम 65 और 35 लेंगे	5×13	5×7	5	$30 = 65 - 1(35)$
	अब हम 35 और 30 लेंगे	5×7	$5 \times 2 \times 3$	5	$5 = 35 - 1(30)$

	अब हम 30 और 5 लेंगे	$5 \times 2 \times 3$	5	5	$0 = 30 - 6(5)$

मैं : शानदार! तुम्हें सही तर्क का आधार मिल गया है। लेकिन क्या तुम्हें अपने तर्क पर यक़ीन है?

अपूर्वी : नहीं भैया, मुझे यक़ीन नहीं है क्योंकि मैंने इसे केवल कुछ संख्याओं के साथ करके देखा है। मैं यह दावा नहीं कर सकती कि यह परिणाम हर एक मामले के लिए सही होगा। इसके लिए हमें इसे सिद्ध करने की ज़रूरत है। क्या आप इस परिणाम को सिद्ध करने में मदद करेंगे?

मैं : ठीक है! शुरू करने से पहले मैं यह स्पष्ट रूप से बता देना चाहता हूँ कि यहाँ मैं केवल पूर्ण संख्याओं (Whole numbers) के समुच्चय के बारे में बात कर रहा हूँ।

शैक्षणिक नोट्स :

नीचे दी गई तालिका में दो कॉलम हैं। बाएँ हाथ के कॉलम में, हम तर्क का वर्णन करने के लिए संख्याओं का उपयोग करेंगे। दाहिने हाथ के कॉलम में, हम सामान्य मामले के लिए परिणाम सिद्ध करेंगे। हम सलाह देंगे कि विद्यार्थियों के लिए सामान्य मामला तभी सिद्ध होगा जब वे बीजगणित के साथ सहज हों। बेशक, उन्हें यह समझाया जाना चाहिए कि एक उदाहरण द्वारा दिया गया प्रमाण मान्य नहीं होता है।

12, संख्या 60 और 24 का मस है : तब 1. 12, संख्या 60 और 24 दोनों को विभाजित करता है। $60 = 12 \times 5$ $24 = 12 \times 2$ 2. 12 महत्तम समापवर्तक है और हम देख सकते हैं कि 5 व 2 सह-अभाज्य संख्याएँ (co-prime numbers) हैं यानी उनके कोई समान गुणनखण्ड नहीं हैं।	यदि 'd', संख्या a और b का मस है : तब 1. d, संख्या a और b दोनों को विभाजित करता है। $a = d \times \alpha$ $b = d \times \beta$ 2. d महत्तम समापवर्तक है और हम देख सकते हैं कि α व β सह-अभाज्य संख्याएँ (co-prime numbers) हैं यानी उनके कोई समान गुणनखण्ड नहीं हैं।
पूर्ण संख्याओं, माना कि 12 और 17, के लिए $17 = 1 \times 12 + 5$; जहाँ $0 \leq 5 < 12$	सामान्य तौर पर, पूर्ण संख्याएँ a और b के लिए

यहाँ 5 शेषफल मिलता है जब 12 से 17 को विभाजित करते हैं	$a = q \times b + r$; जहाँ $0 \le r < b$ यहाँ r शेषफल मिलता है जब b से a को विभाजित करते हैं
$60 = 2\,(24) + 12$ तो $12 = 60 - 2\,(24)$ $= (12 \times 5) - (2 \times 2 \times 12)$ $= 12\,(5 - (2 \times 2))$ तो 12, संख्या 60 और 24 दोनों को विभाजित करता है और 12 को भी।	चूँकि $a = q \times b + r$ तो $r = a - qb$ $= d \propto - qd\beta$ $= d\,(\alpha - q\beta)$ तो d, संख्या a और b दोनों को विभाजित करता है और r को भी।
हमें अब यह दिखाना है कि 12, संख्या 24 और 12 का मस है। हमने देखा है कि 12, संख्या 24 और 12 दोनों को विभाजित करता है। अब हमें यह दिखाना है कि 12 उनका सबसे बड़ा भाजक है।	हमें अब यह दिखाना है कि d, संख्या b और r का मस है। हमने देखा है कि d, संख्या b और r दोनों को विभाजित करता है। अब हमें यह दिखाना है कि d उनका सबसे बड़ा भाजक है।
$24 = 12 \times 2$ $12 = 12 \times 1$ और 1 और 2 सह-अभाज्य हैं तो 12, संख्या 12 और 24 का मस है।	$b = d\beta$ $r = d(\alpha - q\beta)$ तो d, b और r का मस होगा, यदि β और $(\alpha - q\beta)$ सह-अभाज्य हैं।
	इसके विपरीत, मान लो कि β और $(\alpha - q\beta)$ सह-अभाज्य नहीं हैं। तो फिर हमारे पास एक नम्बर c होगा जो β और $(\alpha - q\beta)$ दोनों को विभाजित करेगा। प्रतीकात्मक रूप से माना $c\|\beta$ और $c\|(\alpha - q\beta)$ ।
	हम $\alpha = \{q\beta + (\alpha - q\beta)\}$ लिख सकते हैं। चूँकि c, $q\beta$ और $(\alpha - q\beta)$ को विभाजित करता है इसलिए c, α को विभाजित करेगा।
	इस प्रकार, हम कह सकते हैं कि c, α और β दोनों को विभाजित करता है जो कि इस तथ्य के विपरीत है कि α और β सह-अभाज्य हैं। इसका तात्पर्य यह है कि हमारी धारणा कि

	संख्या c, β और (α - qβ) दोनों को विभाजित करती है, ग़लत होगी। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि β और (α - qβ) सह-अभाज्य हैं। यदि β और (α - qβ) सह-अभाज्य हैं तो d, b और r का मस भी होगा। हम इस तरह से जारी रख सकते हैं क्योंकि हम क्रमिक रूप से विभाजित करते हैं और यह सिद्ध करते हैं कि a और b का मस उसके क्रमिक शेषफलों का भी मस होता है।

अपूर्वी : ओह! धन्यवाद भैया! मैं समझ गई। मैंने कभी नहीं सोचा था कि मस जैसी छोटी अवधारणाओं के ऐसे अन्तर्सम्बन्ध और समझ हो सकती है।

आभार : लेखक, स्वाति सरकार का इस लेख को लिखने के लिए प्रोत्साहित करने और अपने लेखन कौशल को सुधारने में मदद करने के लिए आभार व्यक्त करते हैं।

अशोक प्रसाद उत्तराखण्ड के पौड़ी (गढ़वाल) में अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन के साथ काम करते हैं। उन्होंने हेमवती नन्दन बहुगुणा, गढ़वाल विश्वविद्यालय से गणित में एमएससी किया है। वे पिछले चौदह वर्षों से गणित-शिक्षण से जुड़े हुए हैं और इस दिलचस्प क्षेत्र में बच्चों और वयस्कों दोनों के साथ काम करने का आनन्द लेते हैं। उनसे ashok.prasad@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

हिन्दी अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** अशोक प्रसाद

कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन** : राजेश उत्साही