Translation of Mobile Puzzles - Making Sense of Variables and Equations : Sangeeta Gulati_From_Azim Premji University At Right Angles_Nov,2018

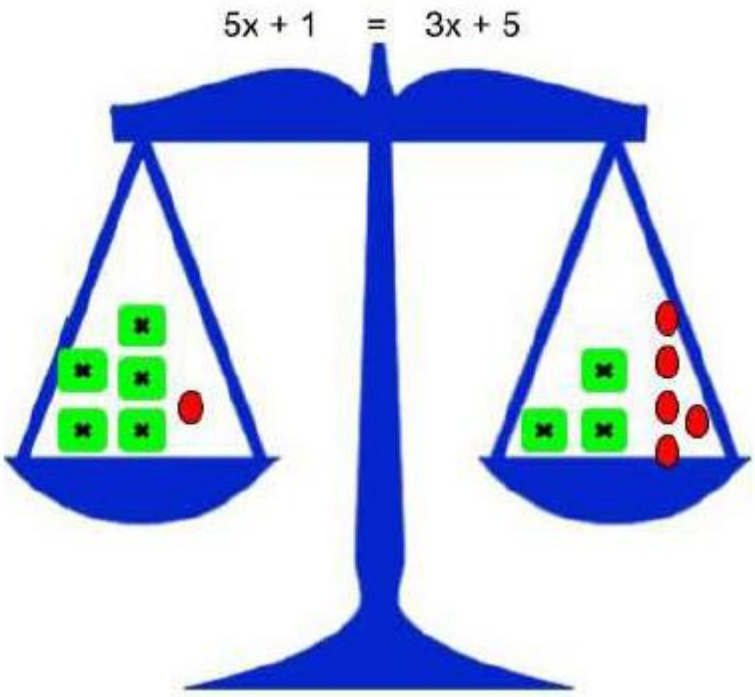
मोबाइल पज़ल : चरों और समीकरणों की समझ बनाना

संगीता गुलाटी

मुख्य शब्द : *मोबाइल, ऑनलाइन मेनिपुलेटिव (manipulative), बीजगणित, समीकरण, हल*

माध्यमिक विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए अंकगणित से बीजगणित की ओर जाना काफ़ी चुनौतीपूर्ण रहता है। 'चर' की अवधारणा से विद्यार्थियों का सामना पहली बार छठवीं कक्षा में होता है। यह पड़ाव है, जहाँ विद्यार्थी या तो 'बीजगणित' की अवधारणाओं को अपना लेते हैं या फिर संख्याओं के स्थान पर अक्षरों को देख हार मान लेते हैं। लेकिन यह वह पड़ाव भी है जब विद्यार्थी समीकरणों को हल करके अज्ञात राशियों (चर) का मान ज्ञात करना सीखते हैं। अक्सर, विद्यार्थी समीकरणों को हल करने में उलझ जाते हैं और तर्क को समझे बिना इनसे जुड़े नियमों को रट लेते हैं।

बराबर का चिह्न '=' बीजगणित सीखने में एक चुनौती बन जाता है। प्रारम्भिक वर्षों में अंकगणित सीखने के दौरान विद्यार्थी बराबर के इस चिह्न को गणित के किसी सवाल के हल खोजने से सम्बन्धित निर्देश के रूप में समझते हैं, जैसे कि 15 + 8 = ? । इसे शायद ही एक ऐसे चिह्न की तरह देखा जाता है जो किसी सवाल को उसके हल से जोड़ता है या किसी संक्रिया को दर्शाता है। लेकिन, बीजगणित सीखने के दौरान जब विद्यार्थियों का सामना $a + b = c$ या $2x + 1 = 5$ जैसे कथनों से होता है (जहाँ, '=' का चिह्न किसी सवाल को हल करने के लिए एक निर्देश की बजाय बराबरी को दर्शाता है), तो वे चकरा जाते हैं। इस पड़ाव पर विद्यार्थियों को सहारे (scaffolding) की आवश्यकता होती है ताकि वे बराबर के चिह्न के *संक्रियात्मक नज़रिए (operational view)* से *सम्बन्धनात्मक नज़रिए (relational view)* पर पहुँच सकें। विद्यार्थियों को बराबर के चिह्न के प्रति सम्बन्धनात्मक नज़रिया विकसित करने और समीकरणों को हल करने में मदद करने के लिए सन्तुलन तराज़ू (Balance Scale) के रूपक का उपयोग करना एक प्रचलित रणनीति है। इस मॉडल में समीकरणों को एक ऐसे तराज़ू की भाँति समझा जाता है जिसके दोनों तरफ़ बराबर वज़न रखा गया है। अत: समीकरण के दोनों तरफ़ संक्रियाएँ कुछ इस प्रकार से की जानी चाहिए कि उसका सन्तुलन बना रहे। **चित्र-1** में इस विचार को दर्शाया गया है।



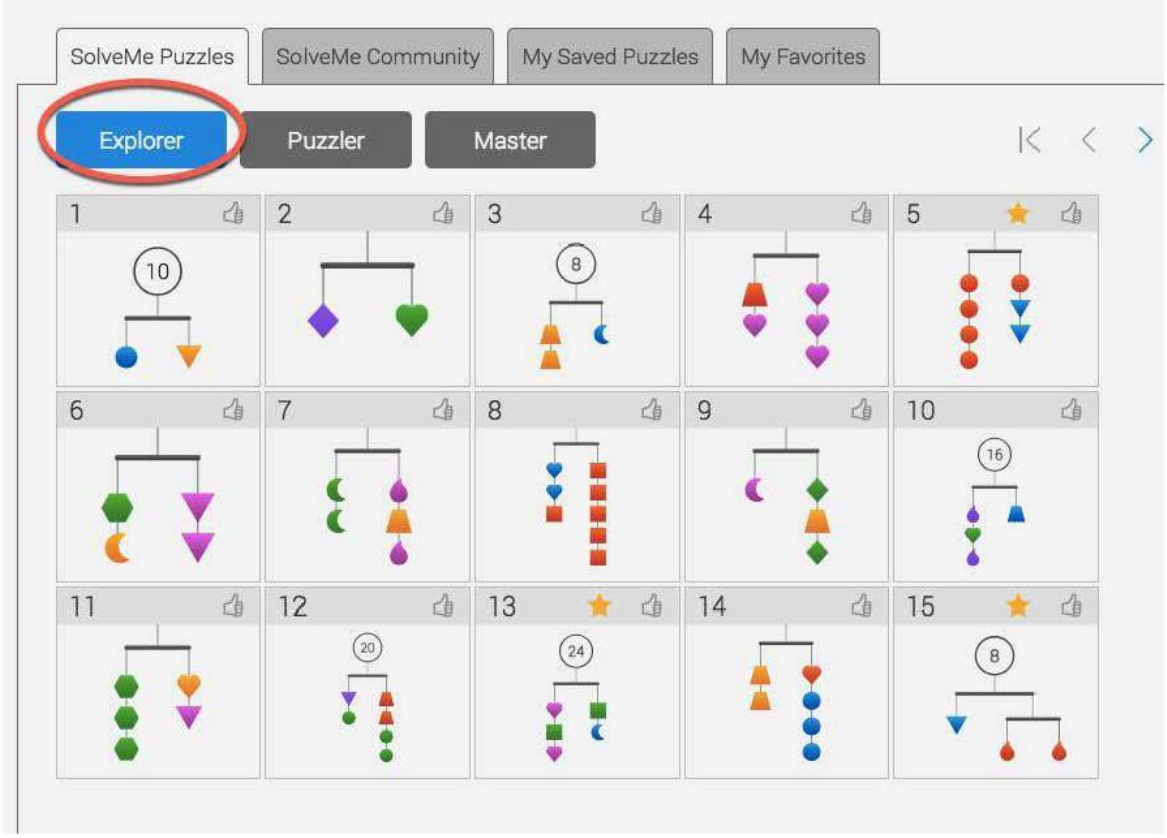
चित्र-1

वेबसाइट सोल्वमी पज़ल्स (http://solveme.edc.org/) शिक्षार्थियों को समीकरणों के हलों की खोजबीन करने व उनकी कल्पना करने में सक्षम बनाने के लिए सन्तुलन पद्धति का उपयोग करती है। इस वेबसाइट पर पज़ल्स का एक बेहतरीन संग्रह है, जैसे कि मोबाइल्स (Mobiles), हू ऐम आई? (Who Am I) और मिस्ट्री ग्रिड (Mystery Grid)। इस लेख में हम पाठकों को मोबाइल्स पज़ल का संचालन (navigate) करने में मदद करेंगे। मोबाइल्स रंगीन, इंटरेक्टिव स्क्ल्प्चर पज़ल्स हैं जो बीजगणितीय विचार (Reasoning) को बढ़ावा देने के लिए मज़ेदार और संवादात्मक (Interactive) तरीक़े से डिज़ाइन किए गए हैं।

इसके मुख्य मेन्यू (पहली स्क्रीन) (http://solveme.edc.org/mobiles/#) पर उपयोगकर्ता (user) को पज़ल खेलने के लिए **'प्ले' (Play)** या किसी पज़ल की रचना करने के लिए **'बिल्ड' (Build)** का विकल्प दिया जाता है। 'प्ले' पर क्लिक करते ही एक नई स्क्रीन उभरती है (**चित्र-2**) जहाँ तीन विकल्प दिए जाते हैं–एक्सप्लोरर (Explorer), पज़लर (Puzzler), मास्टर (Master); प्रत्येक विकल्प ऐसे पज़ल्स का संग्रह है जिनमें चुनौती का स्तर बढ़ता जाता है।

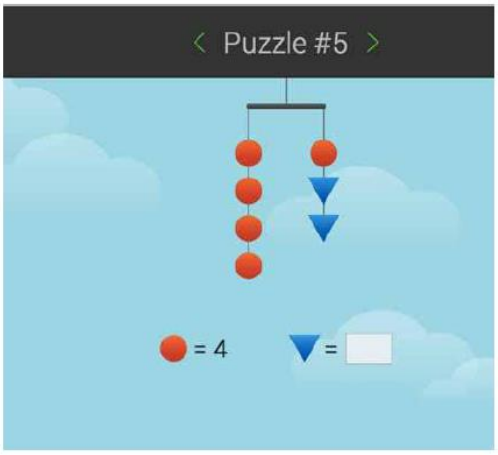
मोबाइल पज़ल (मोबाइल एक लटकने वाली संरचना है जो छोटे बच्चों के खिलौनों और उन चीज़ों को सहारा देती है जो बच्चे को प्रेरित करती हैं और उनका मनोरंजन करती हैं।) वस्तुओं के कई सन्तुलित संग्रहों को दर्शाता है। क्षैतिज (Horizontal) बीम धागों की सहायता से हमेशा बीचोंबीच लटकते रहते हैं। प्रत्येक बीम के दोनों छोरों पर एक समान वज़न होता है। बीम और धागे के वज़न को नगण्य माना जाता है। एक समान आकृतियाँ बराबर वज़न को दर्शाती हैं, जबकि अलग-अलग आकृतियाँ एक समान या अलग-अलग वज़न की भी हो सकती हैं। पज़ल

हल करने वाले (Puzzler) को अज्ञात वज़न का पता लगाने के लिए कहा जाता है। दरअसल, मोबाइल पज़ल समीकरणों की प्रणाली को एक ऐसी तस्वीर के रूप में दर्शाता है, जो अन्तर्निहित संरचना को विशेष रूप से दर्शाती है।



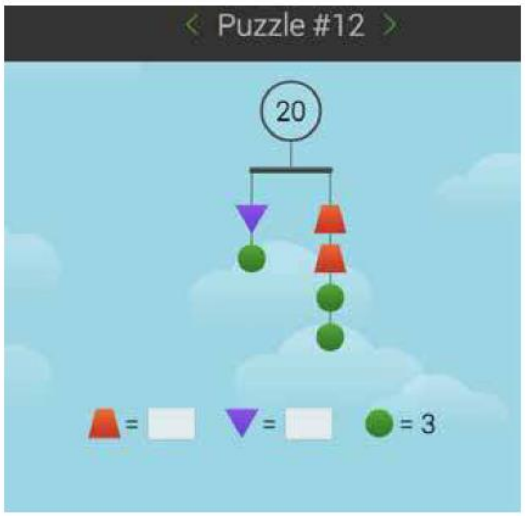
चित्र-2

'एक्सप्लोरर' के शुरुआती पज़ल काफ़ी आसान हैं। यह पहली दफ़ा खेल रहे यूज़र के लिए तैयारी और संचालन से परिचित होने के काम आ सकते हैं। उदाहरण के लिए, पज़ल 5# (चित्र-3 देखें) तराज़ू के बाईं ओर 4 नारंगी वृत्तों को दर्शाती है, जहाँ प्रत्येक वृत्त का मान 4 है। तराज़ू के दाईं ओर 2 नीले त्रिभुज और 1 नारंगी वृत्त है। शिक्षार्थी को यह ध्यान देने की ज़रूरत है कि दोनों ओर से एक-एक नारंगी वृत्त हटाने पर भी तराज़ू का सन्तुलन नहीं बिगड़ता है। ऐसा करने के बाद दाईं ओर के 2 नीले त्रिभुज बाईं ओर के 3 नारंगी वृत्तों के बराबर हो जाते हैं और इस स्थिति में दोनों का मान 12 हो जाता है। इसका मतलब कि प्रत्येक नीले त्रिभुज का मान 6 होना चाहिए। यह शिक्षार्थियों को हल खोजने के लिए आनुपातिक सोच' (Proportional thinking) का उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित करेगा।



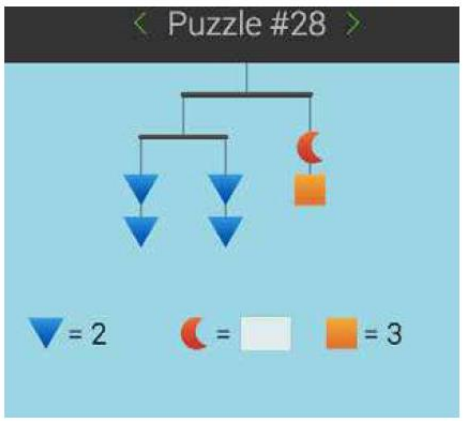
चित्र-3

अन्य पज़ल्स जैसे कि पज़ल#12 (**चित्र-4**) में बीम के ऊपर वृत्त में लिखी संख्या कुल वज़न को दर्शा रही है। यानी तराज़ू के दोनों ओर के वज़नों को जोड़ने पर प्राप्त मान इस संख्या के बराबर होना चाहिए। यहाँ, तराज़ू के प्रत्येक पक्ष के वज़न का मान 10 होना चाहिए। इसके अलावा चित्र में दिखाए गए हरे वृत्त का मान 3 है। तो दोनों ओर जहाँ भी कोई हरा वृत्त है, वहाँ इस मान को रखा जा सकता है। प्रतिस्थापन, यानी कि एक आकृति को एक संख्या से निरूपित करना, के विचार को इस तरह के उदाहरणों से पुख़्ता किया जा सकता है।

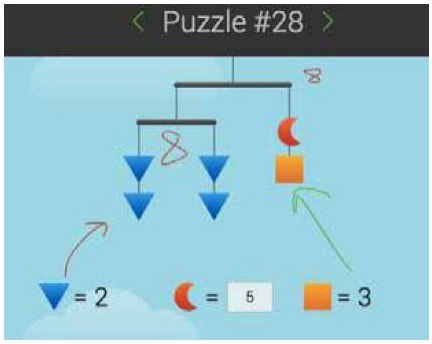


चित्र-4

कुछ पज़ल्स में दो बीम हैं, जैसे कि पज़ल#28 (**चित्र-5**)। इसके निचले बीम पर चार नीले त्रिभुज हैं। चूँकि इसका मान 8 है (प्रत्येक नीले त्रिभुज का मान 2 होगा), तो ऊपरी बीम के दाईं ओर के चाँद और वर्ग का योग भी 8 होना चाहिए। स्क्रीन के निचले दाहिने सिरे पर दिए गए पैन टूल की सहायता से यूज़र अपने अवलोकनों (**चित्र-6**) को लिख सकते हैं और चरों के मानों को ज्ञात कर सकते हैं। सुधार करने के लिए इरेज़र (Eraser) का उपयोग किया जा सकता है।



चित्र-5

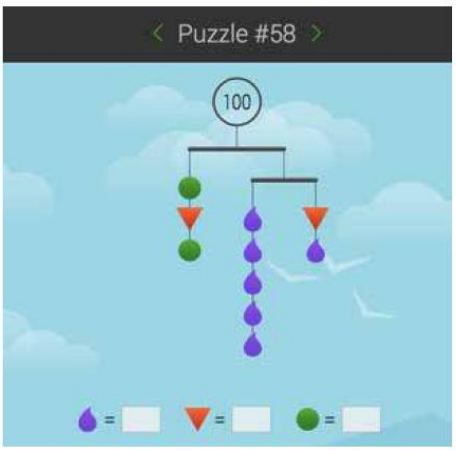


चित्र-6

पज़ल्स की इतनी सारी विविधताएँ अभ्यास एवं विचार (Reasoning) के निर्माण और अज्ञात राशियों को ज्ञात करने की रणनीतियों को विकसित करने की पर्याप्त गुंज़ाइश प्रदान करती हैं।

पज़ल#28 का उपयोग समीकरणों की अवधारणा से परिचय करवाने के लिए किया जा सकता है। पज़ल#28 को इस समीकरण $4t = m + s$ (‘*t*’ यानी त्रिभुज, ‘*m*’ यानी चाँद और ‘*s*’ यानी वर्ग) से दर्शाया जा सकता है। ‘*m*’ का मान ज्ञात करने के लिए हम ‘*t*’ के स्थान पर 2 और ‘*s*’ के स्थान पर 3 का उपयोग कर सकते हैं।

धीरे-धीरे पज़ल्स की जटिलता बढ़ती जाती है और यह और भी रोचक होते जाते हैं। पज़ल#58 (चित्र-7) में, यूज़र को तीनों प्रकार के वज़न का मान ज्ञात करना है, जैसे कि बूँद ‘*d*’, वृत्त ‘*c*’ और त्रिभुज ‘*t*’।



चित्र-7

इसमें दी गई एकमात्र संख्या वृत्त में लिखी संख्या 100 है। इस चित्र को निम्नलिखित तीन समीकरणों के रूप में बदला जा सकता है :

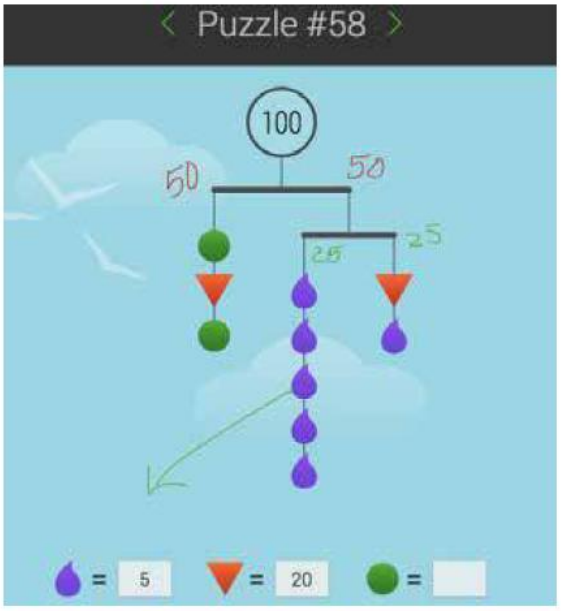
$5d = t + d$ (निचला बीम)

$2c + t = 6d + t$ (ऊपरी बीम की दोनों भुजाओं को सन्तुलित करते हुए)

$2c + t + (6d + t) = 100$

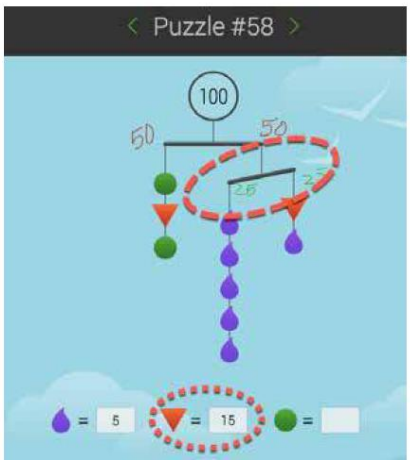
इस पज़ल को हल करने के लिए तीनों समीकरणों का उपयोग किया जा सकता है।

माध्यमिक विद्यालय (या इससे भी कम उम्र) का विद्यार्थी इस बात पर ग़ौर करके इस पज़ल को हल कर सकता है कि 100 के मान को ऊपर के प्रत्येक बीम में 50-50 में बराबर बाँटा गया है, फिर आगे 50 के मान को निचले दो बीमों में 25-25 में बाँटा गया है। सबसे पहले हमें पता चलता है कि पाँच बूँदें 25 के बराबर हैं (यानी एक बूँद का मान 5 है)। चूँकि एक बूँद का मान 5 है, तो एक त्रिभुज का मान 20 होगा। अब त्रिभुज के मान (20) का उपयोग कर हम ऊपर के बीम में बाईं ओर बने हरे वृत्तों का मान भी ज्ञात कर सकते हैं। इस तरह हम प्रत्येक हरे वृत्त का मान 15 पाते हैं। अलग-अलग विद्यार्थियों के लिए यह अवलोकन अलग-अलग हो सकते हैं और इसी तरह जो विधि यहाँ बताई गई है वह हल ज्ञात करने की कई विधियों में से एक है।

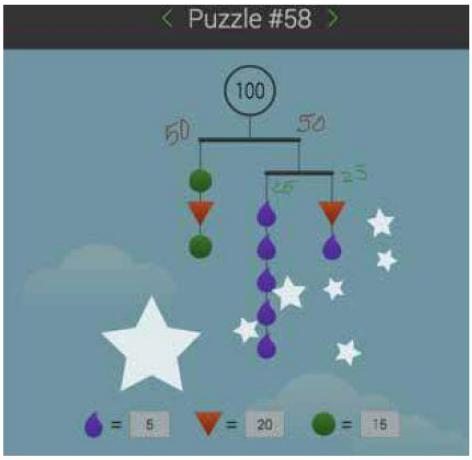


चित्र-8

इन पहेलियों के पीछे के तर्क समीकरणों को हल करने की प्रणालियों के लिए आवश्यक विचार (Reasoning) को पुख़्ता करते हैं । इन पहेलियों का दृश्य रूप इन्हें माध्यमिक स्तर के विद्यार्थियों से लेकर वयस्कों तक के लिए आकर्षक बनाता है। इस पज़ल की संवादात्मक विशेषताएँ (interactive features) मसलन ग़लत जवाब पर त्वरित प्रतिक्रिया (चित्र-9) और सही जवाब के लिए एक ख़ुशनुमा सन्देश (**चित्र-10**) यूज़र को प्रोत्साहित और व्यस्त रखती है।



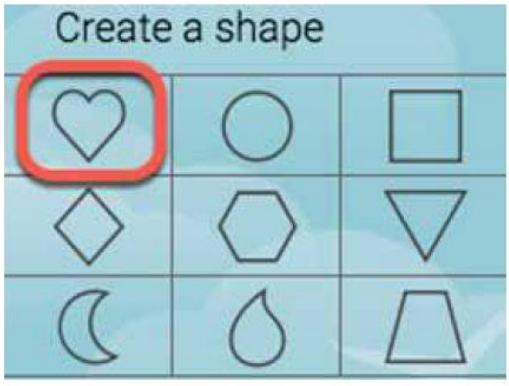
चित्र-9



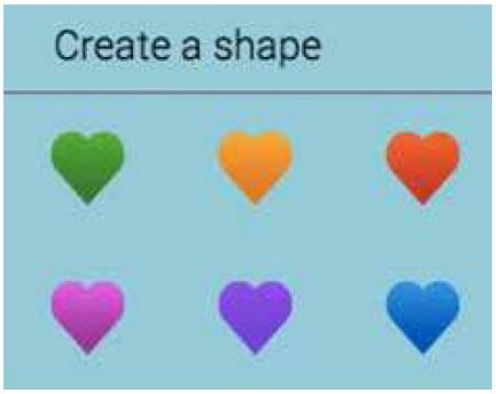
चित्र-10

अब, जब आपने सॉल्वमी मोबाइल्स (SolveMe Mobiles) के 'प्ले' फीचर का अनुभव कर लिया है, तो चलिए 'बिल्ड' (Build) विकल्प की छानबीन करते हैं। इस विकल्प से आप और आपके विद्यार्थी पज़ल बना सकते हैं। मोबाइल पज़ल्स बनाना प्रतिलोम सोच (Reverse thinking) के लिए एक अच्छी गतिविधि है। बेहतर होगा कि आप अपना अकाउंट बना लें ताकि आपके द्वारा बनाए गए पज़ल्स वहाँ 'सेव' (Save) हो सकें। सेव करने पर आप इनका प्रयोग कभी भी कर सकते हैं। तेरह वर्ष से कम उम्र के बच्चे भी बिना किसी ईमेल आईडी के अपना अकाउंट बना सकते हैं।

ख़ुद का मोबाइल पज़ल बनाने के लिए, पहले एक आकृति (**चित्र-11**) चुनें और फिर उसका रंग चुनें (**चित्र-12**)।



चित्र-11



चित्र-12

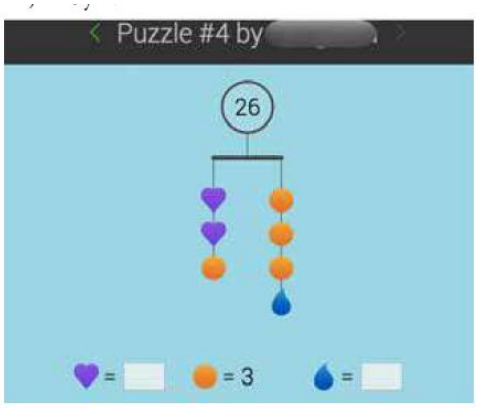
फिर, चयनित आकृतियों के लिए वज़न (मान) निर्धारित करें और स्पेयर पार्ट्स के डिब्बे (Spare Parts bin) से उस आकृति और किसी अन्य बीम को ड्रैग (Drag) कर मुख्य स्क्रीन पर लाएँ। अगर आप संकेत देना चाहते हैं, तो कुल वज़न को दर्शाने के लिए एक वृत्त को भी ड्रैग कर सकते हैं (**चित्र-13**)।

चित्र-13

अब विचार करें कि पज़ल हल करने वाले को कौन-से संकेत बताने हैं? और कौन-से वज़न आप छुपाने वाले हैं? (पज़ल बनाने के लिए आपको कम से कम एक वज़न तो छुपाना ही होगा।) वज़नों को छुपाने के लिए टॉगल (Toggle) बटन का उपयोग करें और अनचाही आकृतियों को हटाने के लिए छोटे 'x' का उपयोग करें।

उदाहरण के लिए, चित्र-13 का पज़ल मोबाइल के कुल वज़न (26) और नारंगी वृत्त के वज़न (3) को दर्शाता है। बैंगनी दिल और नीली बूँदों के वज़न छुपे हुए हैं, ताकि पज़ल को हल करने वाले इसे ज्ञात कर सकें।

और अन्त में, आप अपने पज़ल को सेव कर सकते हैं और खेल सकते हैं (**चित्र-14**)। साथ ही इसे शेयर (share) भी कर सकते हैं।



चित्र-14

पज़ल के मेन्यू में 'माई सेव्ड पज़ल्स' (My Saved Puzzles) में आप अपने बनाए हुए पज़ल्स को देख सकते हैं।

कक्षा में : शिक्षक कुल वज़न के तौर पर कोई भी एक संख्या दे सकते हैं और विद्यार्थियों को ख़ुद का मोबाइल पज़ल बनाने को कह सकते हैं। वेबसाइट पर पज़ल बनाने से पहले बच्चे समूह में या फिर अकेले ही किसी काग़ज़ पर पज़ल बनाकर देख सकते हैं और दूसरे बच्चों को अपने मोबाइल पज़ल हल करने के लिए बोल सकते हैं।

उम्मीद है कि यह लेख विद्यार्थियों के लिए समीकरणों को हल करने से सम्बन्धित कुछ रोचक कार्य डिज़ाइन करने में शिक्षकों को सहायक सिद्ध होगा। हालाँकि, मोबाइल पज़ल की यह विधि समीकरणों को हल करने की प्रचलित प्रक्रियात्मक विधि को बदलने के लिए नहीं है, पर पक्के तौर पर इसे विद्यार्थियों को प्रोत्साहित करने के लिए एक गतिविधि के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है। विद्यार्थियों को मोबाइल का चित्र बनाने के लिए और फिर आकृतियों का वज़न निर्धारित करने को कहा जा सकता है, और इस तरह उन्हें समीकरणों के निर्माण की ओर अग्रसर किया जा सकता है। कक्षा में ऐसी प्रतियोगिताओं का भी आयोजन करवाया जा सकता है, जहाँ विद्यार्थी बहु-स्तरीय और विभिन्न मानों वाले वज़न/आकृतियों का उपयोग कर मोबाइल पज़ल बनाएँ और कक्षा को अपनी रचनाओं (पज़ल्स) को हल करने की चुनौती दें।

संगीता गुलाटी संस्कृति विद्यालय, नई दिल्ली में गणित विभाग की प्रमुख हैं। वह पिछले अट्ठाईस वर्षों से कक्षा ग्यारहवीं और बारहवीं के विद्यार्थियों को गणित पढ़ा रही हैं। वे गणित सीखने-सिखाने में तकनीक के उपयोग की खोजबीन में सक्रिय रूप से शामिल रही हैं। 'शिक्षण के नवाचार में आईसीटी के उपयोग हेतु राष्ट्रीय पुरस्कार, 2016', 'गूगल एजुकेशन सर्टिफ़ाइड इनोवेटर-2014' और 2011 में प्रतिष्ठित फुलब्राइट डिस्टिंगविस्ड टीचिंग अवार्ड से संगीता को नवाज़ा गया है। उन्होंने भारत भर में व्यावसायिक विकास और प्रौद्योगिकी उन्मुखीकरण से जुड़े कई कार्यक्रमों में योगदान दिया है। एनसीईआरटी के साथ स्रोत व्यक्ति के रूप में आईसीटी पाठ्यचर्या और ई-लर्निंग को विकसित करते हुए, उन्होंने केन्द्रीय शैक्षिक प्रौद्योगिकी संस्थान (सीआईईटी), एनसीईआरटी के साथ कक्षा ग्यारहवीं और बारहवीं के लिए वीडियो पाठ्यसामग्री विकसित की है। वे जिओजेब्रा, डेस्मोस, गूगल एप और ऑनलाइन संसाधनों से सम्बन्धित

कार्यशालाएँ आयोजित करती हैं। उनकी वेबसाइट Tech+Math का लिंक www.tinyurl.com/SGulati92 है। उनसे sangeetagulati92@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र
पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही