Translation of *Understanding Leaners' Thinking through an Analysis of Eroors : Shikha Takker* From Azim premji University At Right Angles_July 2019

त्रुटियों के विश्लेषण के माध्यम से विद्यार्थियों की सोच को समझना

शिखा टेक्कर

मुख्य शब्द : *त्रुटियाँ, ग़लत धारणाएँ, विश्लेषण, लापरवाह ग़लतियाँ, संज्ञान, ज़ूमिंग इन*

एट राइट एंगल्स, नवम्बर 2018 अंक के 'कक्षा से' सेक्शन में प्रोफ़ेसर हृदय कान्त दीवान ने अंकगणित में होने वाली त्रुटियों की व्याख्या के बारे में लिखा था। उनका पेपर अंकगणित करते समय विद्यार्थियों द्वारा की गई त्रुटियों को सूचीबद्ध करता है। लेखक का दावा है कि शिक्षकों द्वारा दिए गए एल्गोरिदम (वे इन्हें 'त्वरित सुधार' कहते हैं) विद्यार्थियों की त्रुटियों में योगदान करते हैं और उन्हें अवधारणात्मक समझ से दूर करते हैं। उनका कहना है कि यह त्रुटियाँ विद्यार्थियों द्वारा किए गए अति-सामान्यीकरण का परिणाम हो सकती हैं। उनका यह भी कहना है कि यह "आवश्यक उत्तर प्राप्त करने के लिए शॉर्टकट के रूप में विद्यार्थियों को बताई जाती हैं।" अन्त में वे एक अपील करते हैं कि शिक्षकों को ऐसे टास्क तैयार करने चाहिए, जो विद्यार्थियों को अवधारणात्मक समझ हासिल करने में मदद करें।

यह पेपर प्रोफ़ेसर दीवान द्वारा गणित में त्रुटियों को पहचानने और उनसे निपटने की आवश्यकता पर किए गए तर्कों पर प्रतिक्रिया है। विद्यार्थियों की सोच तक पहुँचने के रास्ते के रूप में त्रुटियों का विश्लेषण करने की उनकी भावना को विस्तार देते हुए, परन्तु त्रुटियों से निपटने के लिए अधिक परिष्कृत और सूक्ष्म समझ की माँग करते हुए, मेरा तर्क है कि :

(अ) यह महत्त्वपूर्ण है कि विद्यार्थियों द्वारा की गई त्रुटियों को एकरूप (homogenise) नहीं किया जाए। यह त्रुटियाँ विद्यार्थी द्वारा 'मौजूदा ज्ञान और संसाधनों' के आधार पर 'नई जानकारी' की समझ बनाने के उनके प्रयास की ओर इशारा कर सकती हैं। त्रुटियों का विश्लेषण करने की प्रक्रिया विद्यार्थी की विचार-प्रक्रियाओं को समझने और अवधारणा से उप-अवधारणा(ओं) तक की ग़लत धारणाओं (जिनसे वह जूझ रहा/रही होगी) को सीमित करने में मदद करती है। मैं अपने तर्क की पुष्टि करने के लिए गणित की कक्षाओं पर अपने शोध से प्राप्त साक्ष्यों के साथ-साथ अन्य शोध-साहित्य से प्राप्त डेटा का उपयोग करूँगी।

(ब) त्रुटियों के विश्लेषण की प्रक्रिया में उनके गणितीय स्रोत की पहचान करना और किसी विषय (topic) के क्षेत्र में उनकी सही स्थिति का पता लगाना महत्त्वपूर्ण होता है। जहाँ यह

विद्यार्थी की सोच को समझने के लिए आगे 'ज़ूमिंग इन'[1] में मदद करता है, वहीं कोई त्रुटि किसी विद्यार्थी के आगे सीखने को कैसे प्रभावित कर सकती है–इसे समझने के लिए 'ज़ूमिंग आउट' करना भी उतना ही महत्त्वपूर्ण होता है।

(स) जब शिक्षकों से बच्चों की अवधारणात्मक समझ को मज़बूत करने वाले टास्क तैयार करने की अपेक्षा की जाती है, तब यह महत्त्वपूर्ण हो जाता है कि उन्हें विद्यार्थियों के इन उत्तरों (त्रुटियों, स्पष्टीकरण, वैकल्पिक तरीक़ों) के पीछे छिपे गणित को सामने लाने के लिए आवश्यक सहायता प्रदान की जाए। शिक्षकों की मदद करने का एक तरीक़ा यह है कि शिक्षकों की परेशानी को समझने के लिए हम सहभागी पद्धति का उपयोग करें और उनके साथ मिलकर एक बेहतर शिक्षण-विधि की *दिशा* में शैक्षणिक प्रयोगों का संचालन करें।

इन तर्कों में से हरेक पर चर्चा करते हुए हम यह भी समझेंगे कि 'विद्यार्थियों की त्रुटियों' या 'ग़लत धारणाओं' से हमारा क्या तात्पर्य है।

त्रुटियों की एकरूपता को हटाना (De-homogenisation)

मैं प्राथमिक विद्यालय के गणित पढ़ाने के अपने शुरुआती वर्षों में विद्यार्थियों की सभी ग़लतियों को 'लापरवाह ग़लतियों' के रूप में वर्गीकृत किया करती थी। फिर उस समय के सहकर्मियों और बाद में एक शोधकर्ता के रूप में विभिन्न राज्यों एवं विभिन्न कक्षा-स्तर के शिक्षकों के साथ बातचीत के दौरान मैंने महसूस किया कि यह काफ़ी हद तक एक आम विचार है। इस विचार के साथ यह विश्वास जुड़ा है कि गणित में उत्तर या तो सही होंगे या ग़लत। यह धारणा इस समझ पर टिकी हुई है कि यह ग़लत उत्तर विद्यार्थियों की लापरवाह ग़लतियों से निकलते हैं। लेकिन सभी विद्यार्थियों की त्रुटियाँ एक ही तरह की नहीं होती हैं। आइए हम इस पर आगे चर्चा करने के लिए त्रुटियों का एक समूह लेते हैं (**चित्र-1** देखें)।

(अ) 256 और 319 को जोड़ें। उत्तर : 265 + 319 584	(ब) 7 का सबसे छोटा गुणज क्या है? उत्तर : 14

चित्र-1 : त्रुटियों या लापरवाह ग़लतियों के उदाहरण

इन दो उत्तरों में हम क्या नोटिस करते हैं? पहले उत्तर (अ) में विद्यार्थी ने 256 के बजाय 265 जोड़ा है, हालाँकि जोड़ सही है। ऐसा उत्तर काफ़ी आम है और इस तरह के उत्तर के साथ शिक्षक अक्सर इस दुविधा में पड़ जाते हैं कि वे 'पूरे नम्बर' दें या नहीं। दुविधा इस बात से पैदा होती है कि यह पूछे गए प्रश्न का ग़लत उत्तर है, जबकि विद्यार्थी उस अवधारणा को जानता है जिसका परीक्षण किया जा रहा है। दूसरे उत्तर (ब) में यह स्पष्ट नहीं है कि वह

[1] मैडलीन लैम्पर्ट (2001) अपने अध्यापन के विशिष्ट पहलुओं जैसे कि किसी सवाल के लिए एक विद्यार्थी द्वारा दिए गए उत्तरों का विश्लेषण करने के लिए 'ज़ूमिंग इन' वाक्यांश का उपयोग करती हैं।

विद्यार्थी 'सबसे छोटे गुणज' को नहीं समझता है या फिर उसने 'सबसे छोटा' शब्द को नज़रअन्दाज़ कर दिया और 7 का जो भी पहला गुणज उसके दिमाग़ में आया उसे लिख दिया। वह विद्यार्थी निश्चित रूप से समझता है कि 14,7 का एक गुणज है। आपको क्या लगता है, ऐसी त्रुटियों का स्रोत क्या होता है? यह त्रुटियाँ सवाल को आधा-अधूरा पढ़ने, दी गई जानकारी के कुछ हिस्से (हिस्सों) को अनदेखा करने, संख्याओं को ग़लत पढ़ने इत्यादि का परिणाम हो सकती हैं। रायन एंड विलियम्स (2007) कहते हैं कि इस तरह की त्रुटियाँ तथ्यों को ग़लत याद करने, संज्ञानात्मक अधिभार[2] (cognitive overload) या निष्कर्ष निकालने की जल्दबाज़ी से पैदा हो सकती हैं। इसके अलावा हम सभी जानते हैं कि यह त्रुटियाँ परीक्षाओं के दौरान सवाल हल करने की चिन्ता या प्रदर्शन के दबाव के कारण पैदा हो सकती हैं। वयस्कों की तरह विद्यार्थी भी किसी सवाल को हल करते समय यह त्रुटियाँ (या ग़लतियाँ या चूक) करते हैं। स्पष्ट रूप से ऐसी त्रुटियों का विद्यार्थी की उम्र से कोई सम्बन्ध नहीं होता है। दूसरे शब्दों में, वे सीखने वाले के विकास-स्तर के लिए अज्ञेय हैं। इस तरह की त्रुटियाँ, जिन्हें अक्सर 'लापरवाह ग़लतियों" के रूप में वर्गीकृत किया जाता है, विद्यार्थियों की समझ की कमी या सोच के ग़लत तरीक़ों (या ग़लत धारणाओं) के लिए पर्याप्त सबूत प्रदान करती नहीं लगतीं। कारण यह है कि इस तरह की त्रुटियाँ हमें यह पूछने के लिए मजबूर करती हैं कि यदि विद्यार्थी ने सवाल पर पूरा ध्यान दिया होता और उस पर सही करने का दबाव नहीं डाला गया होता, तब भी क्या उस विद्यार्थी ने इसी तरह से जवाब दिया होता।

अब हम त्रुटियों के एक अलग समूह को देखते हैं (**चित्र-2** देखें)। देखें कि क्या आप इन त्रुटियों को पहचानते हैं?

$\begin{array}{r} 127 \\ +\ 534 \\ \hline 6511 \end{array}$	$\begin{array}{r} 727 \\ -\ 534 \\ \hline 213 \end{array}$	$\underline{2} = 3 + 5$	$0.5 \times 10 = \underline{0.50}$	$(a+b)^2 = a^2 + b^2$
(अ) कक्षा 3, पूर्ण संख्याओं का जोड़	(ब) कक्षा 3-4, पूर्ण संख्याओं को घटाना	(स) कक्षा 2-5, जोड़/घटाने के वाक्य	(द) कक्षा 6, दशमलव संख्याएँ	(इ) कक्षा 5-6, प्रारम्भिक बीजगणित

चित्र-2 : विद्यार्थियों द्वारा की गई त्रुटियाँ

विद्यार्थी त्रुटि (अ) तब करते हैं जब उन्हें यह समझ में नहीं आता कि जोड़ के किसी सवाल में हासिल की अवधारणा को कैसे इस्तेमाल करते हैं। कामी एंड डोमिनिक (1997) का कहना है कि विद्यार्थी इस तरह की त्रुटियाँ तब करते हैं जब उन्हें पता नहीं होता है कि योग में 'हासिल' की संख्या को कहाँ लिखा जाता है। त्रुटि (अ) के समान ही घटाने की त्रुटि (ब) भी है। इसमें विद्यार्थी संख्या में अंकों के स्थान की परवाह किए बग़ैर बड़े अंकों में से छोटे अंकों को घटाते हैं। त्रुटि (स) विद्यार्थियों के बड़े समूह में आमतौर पर देखने को मिली है। यह उन

[2] संज्ञानात्मक अधिभार वह मानसिक आवश्यकता है जो सीखने के किसी टास्क द्वारा शिक्षार्थी पर पड़ती है।

विद्यार्थियों में आम है जो बीजगणित सीखना शुरू कर रहे हैं या कभी-कभी यह बाद तक बनी रहती है (फॉकनर, लेवी और कार्पेंटर, 1999)। त्रुटि (द) मेरे कक्षा-शोध के दौरान कक्षा 5 और 6 के विद्यार्थियों के बीच सामने आई। त्रुटि (इ) में विद्यार्थियों को समझ नहीं आता कि दी गई बीजीय सर्वसमिका का प्रसारण कैसे किया जाए।

भारत और अन्य जगहों पर गणित के शिक्षकों और शोधकर्ताओं ने इन त्रुटियों को पहचाना है। शोध बताते हैं कि यह त्रुटियाँ किसी विषय को सीखने में एक विशिष्ट विकासात्मक अवस्था में दिखाई देती हैं। यह व्यवस्थित त्रुटियाँ अक्सर विद्यार्थियों के सुदृढ़ विचारों या जिसे हम 'ग़लतधारणा'[3] कहते हैं, की ओर संकेत करती हैं। इस तरह की ग़लतफ़हमियाँ तब तक बनी रहती हैं जब तक कि उन्हें सुधारने के लिए एक सोचा-समझा शैक्षणिक प्रयास नहीं किया जाता है (सरवाड़ी और शाहरिल, 2004)। विद्यार्थियों की त्रुटियों के बारे में अपनी समझ को देखते हुए आइए हम एक टास्क करते हैं (**चित्र-3** देखें)।

टास्क 1 : उन त्रुटियों की सूची बनाएँ जिन्हें आपने गणित को सीखते या सिखाते समय देखा या किया था। देखें कि क्या आप उन्हें 'लापरवाह ग़लतियों' और 'व्यवस्थित त्रुटियों' में वर्गीकृत करने में सक्षम हैं।

चित्र-3 : त्रुटियों को वर्गीकृत करने का टास्क

ज़ूमिंग इन

बतौर शिक्षक हम अक्सर यह मानते हैं कि सभी त्रुटियाँ विद्यार्थी द्वारा ध्यान न देने या अभ्यास की कमी (विशेषकर गणित के मामले में) का परिणाम हैं। त्रुटियों का प्रारम्भिक विश्लेषण हमें यह समझने में मदद कर सकता है कि यह वास्तव में नई जानकारी की समझ बनाने के प्रयास में विद्यार्थियों द्वारा किए गए कुछ तार्किक विस्तार (logical extension) हो सकते हैं। आइए हम **चित्र-2** में सूचीबद्ध त्रुटियों का थोड़ा और ध्यान-से अध्ययन करें। त्रुटियाँ (अ) और (ब) उच्च स्थानीय मानों का पुनर्समूहन (regrouping) करने में विद्यार्थी की कठिनाई का परिणाम हैं। उत्तर (अ) में विद्यार्थी को 1 दहाई को योज्य (addend) की अन्य दहाई के साथ जोड़ना मुश्किल लगता है। विद्यार्थी अंकों को अलग-अलग मानता है और 1 व 5, 2 व 3, 7 व 4 को अलग-अलग जोड़ता है। यह इंगित करता है कि एक संख्या के अंकों को अलग किया जाता है और केवल योज्य के बीच सम्बन्ध पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है। बतौर शिक्षक हम यह अनुमान लगा सकते हैं कि इस तरह की सोच वाला विद्यार्थी जोड़ के उन सवालों को हल करने में सक्षम होगा, जिनमें हासिल की आवश्यकता नहीं होती है। हासिल वाले जोड़ के सवालों में समान स्थानीय मान के अंकों को जोड़ने के बाद पुनर्समूहन की समझ महत्त्वपूर्ण हो जाती है और इस पर ध्यान देने की आवश्यकता है। अब हम उत्तर (ब) पर विचार करते हैं। यहाँ विद्यार्थी 3 में से 2 घटाता है, यह समझे बिना कि वियोज्य (minuend) को वियोजक (subtrahend) में से घटाया जाना चाहिए। (अ) के समान यहाँ भी अंकों को अलग-

[3] ग़लत धारणा का अर्थ है कि एक नियम या एल्गोरिद्म के किसी विशेष विचार या विषय के बारे में विद्यार्थी की अवधारणा, गणित में इसके स्वीकृत अर्थ और समझ से अलग हो (बारम्बी एवं अन्य, 2009 गोस्वामी, 2018 से उद्धृत)।

अलग माना जाता है और घटाते समय अगले उच्च स्थानीय मान पर विचार नहीं किया जाता है। आपको क्या लगता है कि कौन-सा सवाल यह विद्यार्थी सही तरीक़े से हल कर पाएगा? जोड़ और घटाने की संक्रिया के लिए हमें किसी संख्या के स्थानीय मानों और विभिन्न संख्याओं में स्थानीय मान के बीच सम्बन्ध को देखने की आवश्यकता होती है। इनमें से किसी भी एक पर ध्यान न देने से विद्यार्थियों को ख़ासी कठिनाइयाँ आ सकती हैं। एनसीईआरटी (2010) द्वारा प्रकाशित टीचर्स मेन्युअल (पृष्ठ 34) में इस बात पर विस्तृत चर्चा की गई है कि यह त्रुटियाँ मानक एल्गोरिदम का पालन करने में विद्यार्थियों को होने वाली कठिनाइयों से कैसे जुड़ती हैं।

हालाँकि (स) जोड़ की समस्या लगती है, हमने पाया है कि कक्षा 2-5 के विद्यार्थियों का एक बड़ा समूह यह त्रुटि करता है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि इस उत्तर के पीछे विद्यार्थी की क्या सोच हो सकती है? यहाँ विद्यार्थी 2 के बाद के बराबर के चिह्न को नज़रअन्दाज़ करता प्रतीत होता है और समीकरण को 2 + 3 = 5 के रूप में (ग़लत) पढ़ता है। इसका कारण शायद वह तरीक़ा हो सकता है जिसमें सामान्यत: जोड़ या घटाने के सवाल प्रस्तुत किए जाते हैं। किसी सामान्य संख्यात्मक समीकरण को जब क्षैतिज रूप से लिखा जाता है, तो उसमें संक्रियक (operator) समीकरण के बाईं ओर दिखाई देते हैं और अन्तिम उत्तर (एक संख्या) बराबर के चिह्न के दाईं ओर दिखाई देता है। जो विद्यार्थी इस सवाल में रिक्त स्थान में 2 भरते हैं, वे $a + b = \_\_ + d$ प्रकार के सवालों के उत्तर भी इसी तरह देते हैं। यहाँ विद्यार्थियों ने a और b का योग लिखकर रिक्त स्थान को भरा। उदाहरण के लिए, संख्यात्मक समीकरण 6 + 7 = __ + 8 के लिए कुछ विद्यार्थियों ने '+ 8' को अनदेखा करके रिक्त स्थान को 13 से भर दिया। यह ध्यान देना दिलचस्प होगा कि ये विद्यार्थी इन्हीं सवालों को सही ढंग से हल करने में सक्षम हो सकते हैं यदि यह मानक प्रारूप में दिए जाएँ, जैसे कि $a + b = \_\_$ । इस तरह की सोच वाले विद्यार्थियों को 'बराबर' को 'सन्तुलित' (जहाँ दोनों तरफ़ दो व्यंजक बराबर होते हैं) के रूप में समझना मुश्किल लगता है। 'बराबर' की अधिक सम्बन्धपरक समझ विकसित करना प्रारम्भिक बीजगणितीय सोच को विकसित करने में विद्यार्थियों की मदद करता है (अधिक जानकारी के लिए ठक्कर, कान्हेरे, नाइक और सुब्रमण्यम, 2013 देखें)।

उत्तर (द) कक्षा 5 और 6 के विद्यार्थियों के बीच पाया गया, जब उन्हें एक दशमलव संख्या को 10 और उसकी घात के साथ गुणा करने के लिए कहा गया। हम इस उत्तर पर अगले भाग में थोड़ा और विस्तार से चर्चा करेंगे। अन्तिम उत्तर (इ) बीजगणितीय सर्वसमिका का प्रसारण है, जिसमें पद का समग्र रूप से वर्ग करने की जगह कोष्ठक पर ध्यान केन्द्रित करके वर्ग किया गया है। दूसरे शब्दों में, विद्यार्थी $(a + b)\ c = (ac + bc)$ में जिस तरह से कोष्ठक खोला जाता है उस समझ का विस्तार पद $(a + b)^2$ के लिए करते दिखते हैं।

ज़ूमिंग इन और ज़ूमिंग आउट

हम इस क्षेत्र के शोध-साहित्य के हमारे ज्ञान और विद्यार्थियों के साथ काम करने के हमारे अनुभव के आधार पर इन त्रुटियों के बारे में कुछ व्याख्या कर सकते हैं। विद्यार्थियों के सोचने

के तरीक़ों के बारे में यह ज्ञान विद्यार्थियों के तर्क को सुनने के हमारे प्रयासों से विकसित होता है। विद्यार्थियों की सोच के बारे में अपने ज्ञान के आधार पर क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि विद्यार्थियों ने इस विशेष तरीक़े से त्रुटि द (**चित्र-2** देखें) का जवाब क्यों दिया होगा?

विद्यार्थियों के विचारों की जाँच-पड़ताल करना और अपनी सोच को स्पष्ट रूप से व्यक्त करने में उनकी मदद करना यह समझने का एक महत्त्वपूर्ण साधन है कि विद्यार्थी किसी प्रश्न का उत्तर किसी विशेष तरीक़े से क्यों देते हैं। आइए देखें कि विद्यार्थियों द्वारा त्रुटि (द) के लिए दिए गए कारणों से हम क्या समझते हैं (**चित्र-4** देखें)।

सुमित	पाँच गुणा दस पचास होता है। तो हम पहले पचास लिखते हैं। यहाँ एक [दशमलव] बिन्दु है [0.5, में 5 से पहले लगे बिन्दु की ओर इशारा करते हुए] इसलिए यह यहाँ है [0.50 में लगे बिन्दु की ओर इशारा करते हुए]।
गरिमा	0.5 गुणा 1 बराबर 0.5 होता है और 10 का मतलब अन्त में एक शून्य लगाना है। इसलिए उत्तर 0.50 है।
रौशनी	पाँच धांय पचास होता है। और शून्य व दशमलव बिन्दु वहीं पर हैं, जहाँ पहले से थे।
जॉली	5 *x* 10 = 5 + 0 = 50 0.5 *x* 10 = 0.50

चित्र-4 : त्रुटि (द) के कारण

आपने इन विद्यार्थियों के स्पष्टीकरण के बारे में क्या देखा? क्या इन स्पष्टीकरणों में कोई समानता है? *या* आपको लगता है कि यह सभी अलग-अलग स्पष्टीकरण हैं?

सबसे पहले, हम देखते हैं कि यद्यपि इन सभी विद्यार्थियों ने 0.50 उत्तर दिया था, परन्तु इस उत्तर पर पहुँचने के उनके कारण और उनके सोचने के तरीक़े अलग-अलग हैं। सुमित और रौशनी ने 5 के पहाड़े का उपयोग किया है। सुमित को लगता है कि 0.5 में 5 से पहले वाले दशमलव बिन्दु की स्थिति को उत्तर में वैसे ही रखा जाना चाहिए। रौशनी शून्य और बिन्दु की स्थिति को बरक़रार रखती है। दोनों पहले 5 के पहाड़े के अपने ज्ञान का उपयोग करते हैं और फिर तय करते हैं दशमलव बिन्दु कहाँ रखा जाए। गरिमा दशमलव संख्या 0.5 को पूर्ण संख्या 1 के साथ गुणा करने से शुरुआत करती है और फिर शून्य की आवश्यक संख्या 'लगाकर' दस की घात के साथ गुणा करने के नियम का पालन करती है। जॉली 5 और 10 को गुणा करता है, लेकिन स्पष्ट है कि वह 'शून्य लगाने' को 'दस से गुणे' के रूप में समझ रहा है। फिर वह गुणे का उत्तर निकालता है।

दूसरी बात किसी भी विद्यार्थी ने नहीं सोचा कि इसका उत्तर .50 [दशमलव पाँच शून्य] है; उन्होंने शून्य को पहले और अन्तिम स्थान पर बरक़रार रखा है। इसलिए जब इन विद्यार्थियों से पूछा गया कि क्या दशमलव पाँच शून्य [.50] सही उत्तर है, तो उनकी प्रतिक्रियाएँ अलग-अलग थीं। जहाँ सुमित किसी निष्कर्ष पर नहीं पहुँच पाया था और संशय में था, वहीं गरिमा,

रोशनी और जॉली को यक़ीन था कि .50 सही जवाब नहीं था। दूसरे शब्दों में, उन्हें 0.50 और .50 की समानता पर सन्देह था। बेशक, अगला सवाल यह होगा कि क्या उन्हें लगता है कि दशमलव पाँच [.5] या शून्य दशमलव पाँच [0.5] सही उत्तर होगा। आपका क्या अनुमान है?

यह स्पष्टीकरण हमें विद्यार्थियों की सोच या उनके सीखने के बारे में क्या बताते हैं? हम देखते हैं कि विद्यार्थियों ने दशमलव संख्या 0.5 को 5 की तरह ही समझा और फिर अन्तिम गुणनफल लिखते समय दशमलव बिन्दु को लगाया। ऐसा लगता है कि उन्हें पता था कि पूर्ण संख्या का गुणा 10 के साथ कैसे किया जाता है; इस मामले में पाँच गुना दस पचास है। वे संक्रिया (इसे दशमलव संख्याओं को पूर्ण संख्याएँ मानकर किया गया है) करने के बाद गुणनफल में किसी स्थान पर दशमलव बिन्दु रखने की परम्परा को भी जानते हैं। जबकि उनका पूर्व ज्ञान उन्हें इन निर्णयों को सही ढंग से करने में मदद करता है, वे गुणनफल में दशमलव बिन्दु की सही जगह की पहचान करने में असमर्थ होते हैं। तो फिर हम पूछते हैं– यह त्रुटि कहाँ से पैदा हो सकती है?

पूर्ण संख्याओं को सीखते समय विद्यार्थियों को पढ़ाया जाता है कि दस की घातों से गुणा का मतलब है 'शून्यों को लगाना'[4], यानी गुणनफल के बाद उतने शून्य लगाना जितनी कि 10 की घात है। इसका मतलब है कि 5 गुणा 100 को 5 गुणा 1 में तोड़ा जाता है तो 5 आता है और फिर 100 के दो शून्यों को ध्यान में रखते हुए उन्हें उत्तर में 'लगा' दिया जाता है, जो उत्तर 500 देता है। तो स्पष्ट है कि विद्यार्थियों ने दशमलव संख्या 0.5 को पूर्ण संख्या 5 की तरह मानते समय इस समझ का उपयोग किया है। क्या 'दशमलव बिन्दु के स्थान' की समझ को भी पूर्ण संख्याओं के उनके ज्ञान के साथ जोड़ा जा सकता है? जबकि 10 की घातों से गुणा करने पर 'शून्य लगाने' की व्याख्या काफ़ी आम है, फिर भी कोई भी शिक्षक कभी भी विद्यार्थियों को गुणनफल में दशमलव बिन्दु और दशमलव बिन्दु से पहले के शून्य की स्थिति को वैसा रखने को नहीं कहेगा, जैसा कि वह गुण्य (multiplicand) में थी। स्पष्ट रूप से, विद्यार्थी शून्य और दशमलव बिन्दु की स्थिति तय करने में अपनी पूर्ण संख्या की समझ को दशमलव संख्या तक विस्तारित कर रहे हैं। वे दस की घातों के साथ एक दशमलव संख्या के गुणनफल को खोजने के लिए दस की घातों के साथ एक पूर्ण संख्या को गुणा करने के अपने पूर्व ज्ञान का उपयोग करने की कोशिश कर रहे हैं। ज़रूरी नहीं है कि इस तरह का तर्क सिखाया जाता हो, बल्कि यह नए ज्ञान की समझ बनाने के लिए विद्यार्थियों द्वारा किया गया पूर्व समझ का एक विस्तार है। शिक्षण का यह उदाहरण इस बात का संकेत है कि बतौर शिक्षक और शिक्षाविद हमें विद्यार्थियों द्वारा किए जाने वाले ऐसे विस्तारों से परिचित होना चाहिए। भले ही ऐसे विस्तार दशमलव संख्या के गुणा सिखाने के तरीक़े का प्रत्यक्ष परिणाम न हों, पर हम पाते हैं कि विद्यार्थी भिन्न, पूर्णांकों और बीजगणितीय सर्वसमिकाओं के साथ काम करते हुए पूर्ण संख्याओं के अपने ज्ञान का उपयोग करते हैं।

[4] 'शून्य लगाना' एक सामान्य वाक्यांश है जिसका उपयोग 10 की घात या गुणजों के साथ गुणा करने पर गुणनफल में शून्य का हिसाब रखने के लिए किया जाता है। यह वाक्यांश शून्य को लगाने के काम को ठीक-से नहीं समझाता है, लेकिन अक्सर इसका सही ढंग से उपयोग किया जाता है।

शिक्षक क्या कर सकते हैं?

बतौर शिक्षक सबसे पहले हमें विद्यार्थियों द्वारा की जाने वाली त्रुटियों को पहचानने और उनके बीच अन्तर करने में सक्षम होना चाहिए। सौभाग्य से, शिक्षक इस खोज में अकेले नहीं हैं। विद्यार्थियों की त्रुटियों और उनकी सोच पर उपलब्ध शोध-साहित्य हमें ऐसी त्रुटियों का पता लगाने और यह समझने में मदद करता है कि इस तरह के उत्तरों के पीछे कौन-सी सम्भावित ग़लत धारणाएँ हो सकती हैं। इसके अलावा, इन त्रुटियों को कक्षाओं में चर्चा के अवसरों के रूप में माना जा सकता है। हम ऐसे सवाल (या टास्क) तैयार कर सकते हैं, जो इन ग़लत धारणाओं के मूल कारणों पर स्पष्ट रूप से काम करते हों। रायन एंड विलियम्स (2007) के अनुसार, "यह [त्रुटियाँ] विद्यार्थियों द्वारा बनाई जा रही अवधारणात्मक संरचनाओं में झाँकने की एक खिड़की पेश करती हैं और इसलिए यह उपयुक्त हस्तक्षेप सुझा सकती हैं।"

ऐसी ग़लत धारणाओं को दूर करने में विद्यार्थियों की मदद करने के लिए हम टास्क को कैसे डिज़ाइन करते हैं? ऐसे टास्क का उद्देश्य क्या हो सकता है/सकते हैं? क्या इसका उद्देश्य होगा (अ) विद्यार्थियों को सही उत्तर बताकर उनकी ग़लती को सुधारना और उन्हें अभ्यास के लिए और सवाल देना? या (ब) एक ऐसा टास्क तैयार करना, जो इस कारण को ध्यान में रखकर तैयार किया गया हो कि कोई ख़ास त्रुटि क्यों हुई और फिर पर्याप्त गणितीय औचित्य बताकर इसे हल करने की चुनौती देना? डिज़ाइन किए गए टास्क इस आधार पर अलग-अलग होंगे कि हम किस उद्देश्य को आगे बढ़ाना चाहते हैं। यदि हम (अ) को चुनते हैं, तो हम विद्यार्थियों द्वारा की गई ऐसी ग़लतियों की बुनियादी समझ से बचेंगे। हम उन्हें 'बता रहे होंगे' कि क्या नहीं करना है और चूँकि हमारे पास 'आज्ञा देने का अधिकार' है, इसलिए विद्यार्थी इन सुधारों को स्वीकार करेंगे। हालाँकि यह दृष्टिकोण कुछ विद्यार्थियों को अपनी ग़लतियों को सुधारने में मदद कर सकता है, लेकिन यह इस तरह के उत्तरों के पीछे की सोच या बुनियादी अवधारणाओं पर ध्यान नहीं देता है। दूसरी ओर, यदि हम इन ग़लत धारणाओं को दूर करने का निर्णय लेते हैं (मार्ग (ब) चुनते हैं), तो हम ऐसे विभिन्न उदाहरणों के बारे में सोचना शुरू कर सकते हैं जिसमें विद्यार्थी अपने पूर्व ज्ञान[5] के आधार पर इस तरह का अति-सामान्यीकरण करते हैं। शिक्षकों के रूप में, हमारे लिए यह पहचानना उपयोगी होगा कि विद्यार्थियों को दिए जाने वाले आम स्पष्टीकरण के 'प्रति-उदाहरण' या विद्यार्थियों द्वारा किए जाने वाले (ग़लत)

[5] गणित के विभिन्न विषयों को सीखने में विद्यार्थियों द्वारा की गई सभी त्रुटियों की एक विस्तृत सूची बनाना मुश्किल है। प्रधान और मावलंकर (1994) ने माध्यमिक स्तर के गणित में विद्यार्थियों की त्रुटियों के एक संकलन के ज़रिए इस दिशा में प्रयास किया था। हालाँकि समय के साथ शिक्षक और शोधकर्ताओं के रूप में हम एक संग्रह बना सकते हैं, जिसमें विद्यार्थियों द्वारा की गई आम त्रुटियों, उनके सम्भावित स्रोत और उनसे निपटने के सम्भावित तरीक़े शामिल हों। ज्ञान का यह सतत विकासशील कोष नए शिक्षकों के लिए एक संसाधन के रूप में उपलब्ध होगा और अनुभवी शिक्षकों द्वारा इसे निरन्तर परिष्कृत किया जा सकता है।

सामान्यीकरण[6] क्या हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में, अनुभवसिद्ध नियम (rule of) ऐसे उदाहरणों की तलाश करना हो सकता है जहाँ कोई स्पष्टीकरण या सामान्यीकरण काम करता है और जहाँ यह काम नहीं करता। उदाहरण के लिए, **चित्र-2** में त्रुटि (द) में पूर्ण संख्याओं के साथ काम करने का नियम दशमलव संख्याओं के साथ हमेशा काम नहीं करता है। इसके प्रति-उदाहरण क्या हो सकते हैं? ख़ैर, हम इसकी एक तालिका बना सकते हैं कि दशमलव संख्याओं को सीखने के लिए कब पूर्ण संख्या की सोच का विस्तार होता है (समर्थन करने वाले उदाहरण) और कब इसका विस्तार नहीं होता है (प्रति-उदाहरण)। इस तरह के अभ्यास से हमें यह जानने में मदद मिलेगी कि पूर्ण संख्या से बने सामान्यीकरण का विस्तार दशमलव के अन्य उप-विषयों में और पूर्णांक, भिन्न या बीजगणित जैसे विषयों में भी त्रुटि का कारण बन सकता है। इस अभ्यास को हम कैसे शुरू कर सकते हैं इस पर एक संक्षिप्त विवरण इस प्रकार है :

(अ) कौन-सी संख्या बड़ी है यह पता करने के लिए संख्या के अंकों की तुलना करने के स्पष्टीकरण पर विचार करें। यह स्पष्टीकरण पूर्ण संख्याओं की तुलना करने के लिए काम करता है। इसे ऐसे मामले में दशमलव संख्याओं की तुलना के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है जब संख्याएँ 14.3 और 2.9 के प्रकार की हों। जबकि यह 1.436 और 1.9 की तुलना के लिए काम नहीं करती है। तो, बाद वाला उदाहरण इस तरह के तर्क के लिए एक प्रति-उदाहरण के रूप में काम कर सकता है।

(ब) इसी तरह एक स्पष्टीकरण है कि एक बड़ी संख्या को एक छोटी संख्या में से नहीं घटाया जा सकता है। यह स्पष्टीकरण पूर्ण संख्याओं के समूह के लिए काम करता है, लेकिन पूर्णांकों के लिए नहीं। छोटी संख्या में से बड़ी संख्या को घटाने से ऋणात्मक पूर्णांक बनते हैं। इसी तरह हम इस आम व्याख्या के प्रति-उदाहरणों के बारे में सोच सकते हैं कि गुणा हमेशा उस संख्या को बढ़ाता है, जिसे गुणा किया जा रहा है।

(स) दो भिन्नों को जोड़ते समय विद्यार्थी सामान्यीकरण करके अंश और हर को आपस में जोड़ देते हैं। उदाहरण के लिए,

$$\frac{7}{8}+\frac{5}{4}=\frac{12}{12}$$

(प्रोफ़ेसर दीवान के पेपर में इस तरह का एक उदाहरण सूचीबद्ध किया गया है) को यह दिखाते हुए काउंटर किया जा सकता है कि कैसे

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\neq\frac{2}{4}$$

(या 1⁄2 या 50% या 0.5), बल्कि 1 पूर्ण बनता है।

[6] चीनी और अमेरिकी शिक्षकों के ज्ञान के अपने अध्ययन के एक उदाहरण में लिपिंग मा (2010) बताती हैं कि कैसे कुछ शिक्षक ऐसे स्पष्टीकरण देते हैं जो एक विद्यार्थी के इस सामान्यीकरण कि 'यदि एक बन्द आकृति का परिमाप बढ़ता है, तो इसका क्षेत्रफल भी बढ़ता है' को चुनौती देते हैं।

(द) बीजगणित में, $7s + 5s = 12s$ लेकिन $7s + 5r \neq 12sr$ (इस त्रुटि के विवरण के लिए सुब्रमण्यम, 2018 को देखें)।

समापन टीप

इस लेख में मैंने तर्क दिया है कि विद्यार्थियों की सभी त्रुटियों को 'लापरवाह ग़लतियों' या 'अति-सामान्यीकरण' के रूप में व्यवस्थित नहीं करना महत्त्वपूर्ण है। हम इन त्रुटियों को यह समझने के लिए वर्गीकृत कर सकते हैं कि (अ) इनका गणितीय स्रोत क्या है और (ब) ऐसे उत्तरों के पीछे विद्यार्थी की क्या सोच हो सकती है। इससे हमें कक्षा में इन त्रुटियों से निपटने के लिए उचित हस्तक्षेप करने में मदद मिलेगी। विद्यार्थियों की त्रुटियों को समझने का प्रयास करने का यह मार्ग आसान नहीं है। हालाँकि, हमारे पास (अ) विद्यार्थियों के मौखिक और लिखित उत्तरों पर ग़ौर करने वाले अनुभवी शिक्षकों का ज्ञान है और (ब) विद्यार्थियों की ग़लत धारणाओं पर शोध-साहित्य है। यह संसाधन विद्यार्थियों के सोचने के गणितीय तरीक़ों के बारे में गहन ज्ञान विकसित करने में हमारी मदद कर सकते हैं। एक ऐसा ज्ञान आधार विकसित करना, जिसमें गणित के विशिष्ट विषयों में विद्यार्थियों की व्यवस्थित ग़लतियों को पहचानना और उनका विवरण रखना शामिल हो और अवधारणात्मक समझ देने वाले उपयुक्त टास्क तैयार करना आगे बढ़ने का सम्भावित तरीक़ा हो सकता है।

सन्दर्भ :

1. Dewan, H. (*2018).* Interpretation of Errors in Arithmetic. At Right Angles, *7(3)*, Azim Premji University, Bengaluru.

2. Falkner, K. P., Levi, L. & Carpenter, T. (*1999).* Children's Understanding of Equality: A Foundation for Algebra. Teaching Children Mathematics, *6*, pp.*56-60.* Accessed from http://ncisla.wceruw.org/publications/articles/AlgebraNCTM.pdf

3. Goswami, R. (*2018).* Misconceptions in Fractions. At Right Angles, *7(1)*, Azim Premji University, Bengaluru.

4. Kammi, C. & Dominick, A. (*1997).* To Teach Or Not To Teach Algorithms. Journal of Mathematical Behaviour, *16(1)*, pp. *51-61.*

5. Lampert, M. (*2001).* Teaching Problems and Problems of Teaching. Yale University Press. New Haven & London.

6. Ma, L. (*2010).* Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Routledge.

7. NCERT (*2010).* Mathematics — Teachers' Training Manual: For Classes *1* and *2.* National Council of Educational Research and Training, New Delhi.

8. Pradhan, H. C. & Mavalankar, A. (1994). Compendium of Errors in Middle School Mathematics. Homi Bhabha Centre for Science Education, Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai.

9. Sarwadi, H.R.H. & Shahrill, M. (2014). Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. Mathematics Education Trends and Research, pp. 1-10.

10. Subramaniam, K. (2018). The 'Conjoining' Error in School Algebra. At Right Angles, 7(1), Azim Premji University, Bengaluru.

11. Takker, S., Kanhere, A., Naik, S. & Subramaniam, K. (2013). From Relational Reasoning to Generalisation Through Tasks On Number Sentences. In Nagarjuna, G., Jamakhandi, A. & Sam, E. (Eds.) Proceedings of epiSTEME 5: International Conference to Review Research in Science, Technology and Mathematics Education, (pp.336-342) organised by HBCSE, Margao, India: Cinnamonteal.

आभार

मैं होमी भाभा सेंटर फॉर साइंस एजुकेशन, मुम्बई की सुश्री जयश्री सुब्रमण्यन और टाटा इंस्टिट्यूट ऑफ़ सोशल साइंसेज़, हैदराबाद के डॉ. रितेश खुन्यकारी को उनके इनपुट्स के लिए धन्यवाद देना चाहती हूँ, जिनसे इस लेख को परिष्कृत करने में मदद मिली।

शिखा टेक्कर होमी भाभा सेंटर फॉर साइंस एजुकेशन, टीआईएफआर, मुम्बई से गणित-शिक्षा में पीएचडी कर रही हैं। उनका डॉक्टरेट शोध, शिक्षकों के अभ्यास के सन्दर्भों में उन्हें सहयोग करके ‘विद्यार्थियों की गणितीय सोच’ के बारे में उनका ज्ञान विकसित करने पर है। इससे पहले उन्होंने प्राथमिक विद्यालय में गणित-शिक्षक के रूप में काम किया है। उनसे shikha@hbcse.tifr.res.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग :** कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही