Translation of Justification of 90° Angle Construction Procedure : Arddhendu Shekhar Dash
From Azim premji University At Right Angles_March, 2020

90° के कोण की रचना की कार्यविधि की प्रामाणिकता

अरधेन्दु शेखर दाश

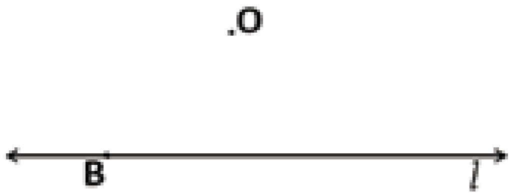
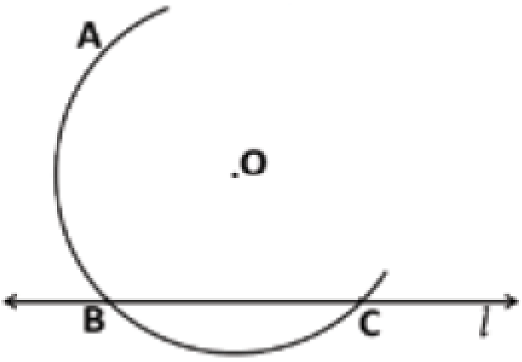
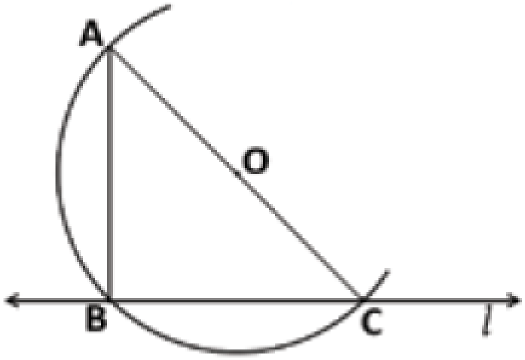
मुख्य शब्द : *ज्यामितिय रचना, कोण, प्रामाणिकता, विकल्प*

ज्यामिति में ज्यामितिय रचना सबसे दिलचस्प हिस्सों में से एक है और हममें से अधिकांश परकार और स्केल का उपयोग करके ज्यामितिय आकृतियाँ बनाना पसन्द करते हैं। हम ज्यामितिय आकृतियों की रचना को पूरा करने के लिए नियत विधियों को अपनाते हैं। यह विधियाँ आकृतियों के गुणों और विभिन्न ज्यामितिय आकृतियों के बीच सम्बन्ध के आधार पर कुछ न्यायसंगत तर्क का पालन करती हैं। परन्तु, हमारा अधिकांश अनुभव ज्यामितिय आकृतियों की रचना में दो प्रमुख चुनौतियों को सामने लाता है। पहला हम नियत विधियों की प्रामाणिकता को समझे बिना इन विधियों का उपयोग करते रहते हैं और दूसरा हम एक ही ज्यामितिय आकृति की रचना के लिए अलग-अलग तरीक़ों की पड़ताल नहीं करते हैं। इसलिए, कक्षा-शिक्षण के दौरान इन दो प्रमुख चुनौतियों का ध्यान रखना आवश्यक है।

यदि हम अपने पाठ्यक्रम को याद करें, तो आमतौर पर हम कक्षा 6 से परकार और स्केल से ज्यामितिय रचना शुरू करते हैं। कुछ ज्यामितिय रचनाओं के पीछे के निगमनात्मक (deductive) या स्वयंसिद्ध (axiomatic) तथ्य आधारित तर्क इस स्तर पर समझना बच्चों के लिए मुश्किल हो सकते हैं। इसलिए हमें इस स्तर पर बच्चों को प्रामाणिकता समझाने के लिए सत्यापन (Verification) का उपयोग करना चाहिए।

इस लेख में, हम एक समकोण की रचना और उसकी प्रामाणिकता की दो विधियों की पड़ताल करेंगे।

विधि 1 (90° के कोण की रचना)

चरण 1 : एक रेखा l खींचो और उसपर बिन्दु B को चिह्नित करो।  **चित्र -** 1	**चरण 2 :** रेखा l से बाहर एक और बिन्दु O चिह्नित करें।  **चित्र -** 2
चरण 3 : परकार की नोक को बिन्दु को O पर रखें और एक चाप (Arc) खींचें जो B से होकर गुज़रता हो। इसे आगे बढ़ाएँ, जो रेखा l को बिन्दु C पर फिर से काटे।  **चित्र - 3**	**चरण 4 :** बिन्दु C से रेखाखण्ड बनाओ जो बिन्दु O से होते हुए इस चाप को बिन्दु A पर काटे। AB को मिलाओ।  **चित्र - 4**

टीप : यहाँ हमने चाप शब्द का उपयोग एक वृत्त की परिधि के भाग के रूप में किया है।

तो, कोण ABC का माप क्या है?

सवाल यह है कि क्या यह 90° है। यदि हाँ, तो हम इसे कैसे प्रामाणित करेंगे?

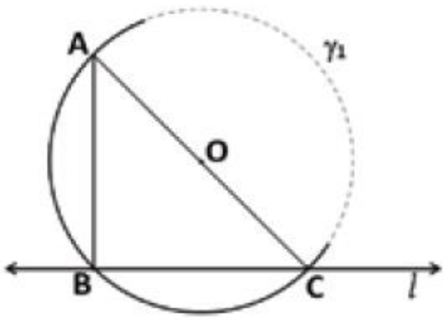
बच्चों की समझ के स्तर के आधार पर, इसे प्रमाणित करने का एक तरीक़ा यह हो सकता है कि चाँदे का उपयोग करके कोण को माप लें। ध्यान दें कि कोण को मापने के लिए चाँदे का उपयोग केवल अनुमानित मान दे सकता है। परन्तु, हम इसे तार्किक रूप से कैसे प्रामाणित करेंगे?

प्रमाण 1 : एक रेखा l दी गई है। केन्द्र O वाले वृत्त γ_1 पर A, B और C, तीन अलग-अलग बिन्दु हैं। AC वृत्त का एक व्यास है। हमें यह सिद्ध करना है कि $\angle$ABC एक समकोण (Right Angle) है।

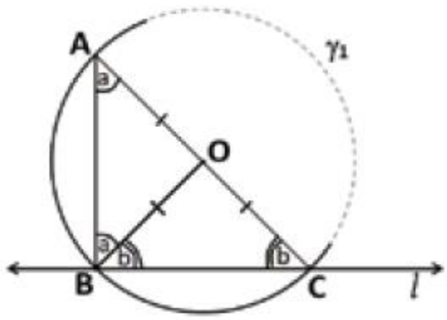
BO को मिलाओ। यहाँ OA, OB और OC वृत्त γ_1 की त्रिज्या हैं।

त्रिभुज AOB में, AO = BO,

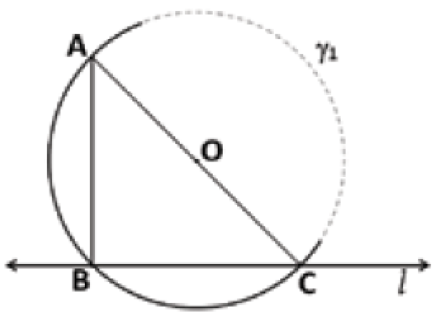
इसलिए, त्रिभुज AOB एक समद्विबाहु त्रिभुज (Isosceles Triangle) होगा।



चित्र - 5



चित्र - 6



चित्र - 7

तब, $\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{ABO}$ (समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)।

माना कि $\angle \mathrm{OAB} = \angle \mathrm{ABO} = \mathrm{a}$

इसी तरह, BOC एक समद्विबाहु त्रिभुज होगा क्योंकि BO = CO

तब, $\angle OBC = \angle BCO$ (समद्विबाहु त्रिभुज की बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)।

माना कि $\angle \mathrm{OBC} = \angle \mathrm{BCO} = \mathrm{b}$

चूँकि ABC एक त्रिभुज है, इसलिए इसके अन्त:कोणों (Interior Angles) का योग दो समकोणों के बराबर होगा।

$\angle CBA + \angle ABC + \angle BCA = 180^o$

$\angle CBA + (\angle ABO + \angle OBC) + \angle BCA = 180^o$

(*क्योंकि* $\angle ABC = \angle ABO + \angle OBC$)

$a + a + b + b = 180^o$

$2a + 2b = 180^o$

$2(a + b) = 180^o$

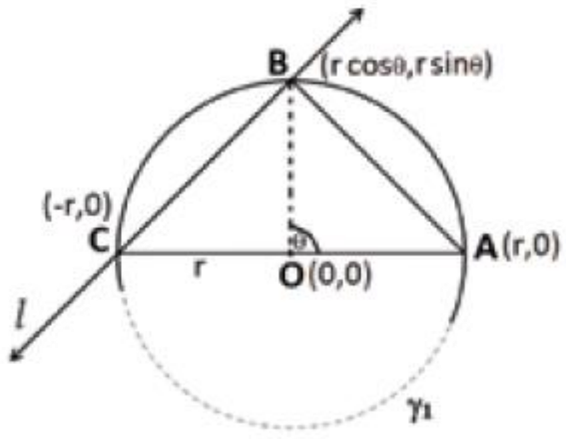
$a + b = 90^o$

यानी, $\angle ABC = 90^o$

इस प्रकार, हमने सिद्ध किया कि $\angle ABC$ एक समकोण है।

प्रमाण 2 : एक रेखा l दी गई है। केन्द्र O वाले वृत्त γ_1 पर A, B और C, तीन अलग-अलग बिन्दु हैं। AC वृत्त का एक व्यास है। हमें यह सिद्ध करना है कि $\angle ABC$ एक समकोण है।

यहाँ, निर्देशांकों की कल्पना करने में सरलता के लिए, चित्र - 7 को घुमाकर चित्र - 8 में बदला गया है।



चित्र - 8

माना O के निर्देशांक (0,0) हैं, r वृत्त की त्रिज्या है और CA, X-अक्ष पर है (जैसा कि चित्र - 8 में है); इसलिए A के निर्देशांक (r, 0) और C के निर्देशांक (-r, 0) होंगे। B त्रिज्या r के वृत्त पर एक बिन्दु है और OB, धनात्मक X-अक्ष पर एक कोण θ बनाता है। ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति (Polar Coordinates System) का उपयोग करके बिन्दु B के निर्देशांक $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ होंगे। निर्देशांक $(r\cos\theta, r\sin\theta)$ में बिन्दु A के लिए θ का मान 0^o और बिन्दु C के लिए θ का मान 180^o रखकर, हम ध्रुवीय निर्देशांक पद्धति का उपयोग करके बिन्दु A और C के निर्देशांक भी खोज सकते हैं।

तब AB की ढलान $= \dfrac{r\ \sin\theta}{r\ \cos\theta - r}$

तब BC की ढलान $= \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta + r}$

$\angle ABC$ एक समकोण है, यह सिद्ध करने का एक तरीक़ा यह दिखाना हो सकता है कि AB, BC पर लम्बवत (Perpendicular) है। यह तब सम्भव है, जब हम यह दिखा सकें कि दोनों रेखाओं के ढलानों का गुणनफल -1 है।

(AB की ढलान) . (BC की ढलान)

$$= \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta - r} \cdot \frac{r \sin\theta}{r \cos\theta + r}$$

$$= \frac{r^2 \sin^2\theta}{r^2 \cos^2\theta - r^2}$$

$$= \frac{r^2 \sin^2\theta}{r^2 (\cos^2\theta - 1)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta - 1}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{-\sin^2\theta} = -1$$

इस प्रकार AB, BC पर लम्बवत है। इससे सिद्ध होता है कि $\angle ABC$ एक समकोण है।

यह रचना थेल्स के प्रमेय पर आधारित है जिसके अनुसार : यदि A, B, और C एक वृत्त पर अलग-अलग बिन्दु हैं जिसमें रेखाखण्ड AC एक व्यास है, तब $\angle ABC$ एक समकोण होगा। या सामान्य भाषा में हम कहेंगे कि अर्धवृत्त का कोण समकोण होता है।

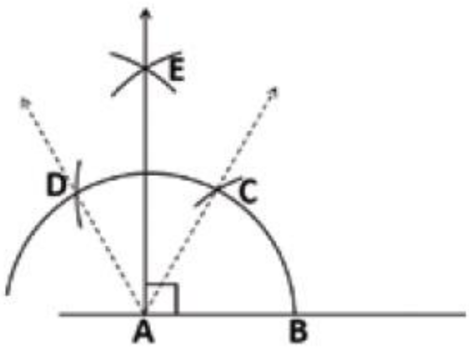
विधि 2 (90° के कोण की रचना)

एक समकोण (90°) की रचना की यह विधि अधिकांश राज्यों और एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकों में आमतौर पर दी जाती है। इस रचना में दो अवधारणाएँ शामिल हैं (जैसा चित्र - 9 में दिखाया है) – 60° के कोण (या 60° के गुणज) और कोण के समद्विभाजक (Bisector) की रचना। यहाँ पर 60° के कोण का समद्विभाजक दिया है। जैसा कि चित्र - 9 में दिखाया है, $\angle CAB = 60^o$ और $\angle EAC = 30^o$

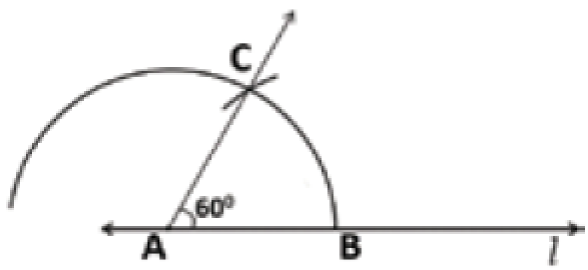
EA कोण $\angle DAC$ का कोणार्धक है।

अत:, $\angle EAB = \angle CAB + \angle EAC$

$= 60^o + 30^o = 90^o$



चित्र - 9



चित्र - 10

यह प्रमाणित करने के लिए कि $\angle EAB$, 90^{o} है, हमें (i) 60^{o} के कोण की रचना और (ii) एक कोण के इस समद्‌विभाजन को प्रमाणित करना होगा।

60^{o} के कोण की रचना

चरण 1 : एक रेखा l खींचें और उसपर बिन्दु A को चिह्नित करें।

चरण 2 : परकार की नोक को बिन्दु को A पर रखें और उपयुक्त त्रिज्या का एक चाप बनाएँ जो रेखा l को बिन्दु B पर काटता हो।

चरण 3 : परकार की चौड़ाई को अपरिवर्तित रखते हुए, इसकी नोक को बिन्दु B पर रखें और एक चाप खींचें जो बिन्दु C पर पिछले चाप को काटता हो।

चरण 4 : एक किरण AC खींचिए। इस प्रकार $\angle CAB, 60^{o}$ का होगा (देखें चित्र 10)।

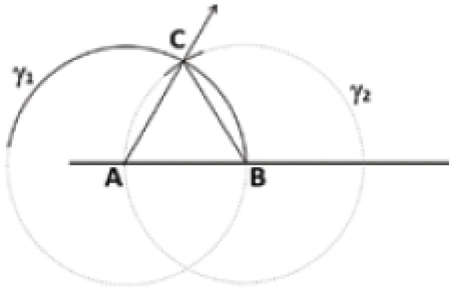
प्रमाण : हमें यह सिद्‌ध करना है कि $\angle CAB, 60^{o}$ का है। चित्र - 11 में दिखाए अनुसार CB को जोड़ें। 60^{o} के कोण की रचना के चरणों में, हम चाप की त्रिज्या को नहीं बदलते हैं। इसलिए वृत γ_1 और γ_2 की त्रिज्या समान है और दोनों वृतों के केन्द्र, AB के अन्तिम सिरों पर स्थित हैं, और AB दोनों वृतों की त्रिज्या है।

वृत γ_1 में AB = AC क्योंकि वे वृत की त्रिज्या हैं,

वृत γ_2 में, BA = BC क्योंकि वे वृत की त्रिज्या हैं,

इसलिए, AB = BC = AC

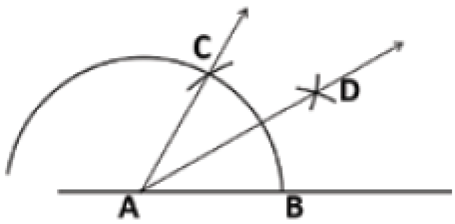
इसलिए, त्रिभुज ABC एक समबाहु त्रिभुज है। चूँकि अन्त:कोणों का योग 180^o होता है और सभी कोण समान हैं, तो प्रत्येक कोण 60^o के बराबर होगा।



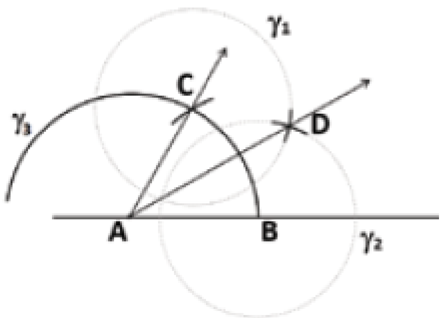
चित्र - 11

कोण के समद्विभाजक की रचना

एक कोण CAB दिया हुआ है, मान लें कि हम कोण को समद्विभाजित करना चाहते हैं। B को केन्द्र मानते हुए एक चाप खींचें जिसकी त्रिज्या BC की लम्बाई के आधे से अधिक है। C को केन्द्र मानते हुए इसी त्रिज्या वाला एक और चाप खींचें। माना कि यह दोनों चाप D पर एक-दूसरे को काटते हैं (जैसा कि चित्र-14 में दिखाया है)। A से D तक एक किरण AD खींचें, यह किरण AD कोण CAB को समद्विभाजित करती है।



चित्र - 12



चित्र - 13

प्रमाण : चित्र 14 में, AB = AC क्योंकि यह वृत्त γ_3 की त्रिज्या है। CD = BD जैसा कि हमने चाप γ_1 और γ_2 के लिए समान त्रिज्या चुनी थी।

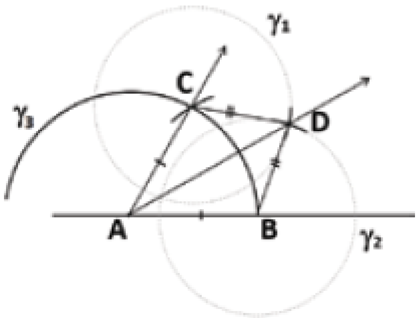
हमें यह सिद्ध करना है कि किरण AD कोण CAB का समद्विभाजक है,

अब त्रिभुज ACD और त्रिभुज ABD पर विचार करें।

AC = AB

CD = BD

AD उभयनिष्ठ है



चित्र - 14

इसलिए, भुजा-भुजा-भुजा गुण के अनुसार, त्रिभुज ACD और त्रिभुज ABD सर्वांगसम होंगे।

अतः $\angle CAD = \angle DAB$

अत: AD कोण $\angle CAB$ का समद्विभाजक है।

अरधेन्दु शेखर दाश अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन में स्रोत व्यक्ति हैं। उन्होंने उत्कल विश्वविद्यालय, वाणी विहार, भुवनेश्वर से गणित में एमएससी किया है। वे गणित से जुड़े मुद्दों पर शिक्षकों के साथ मिलकर काम कर रहे हैं और अवधारणात्मक समझ के साथ-साथ गणित सीखने-सिखाने के तरीक़ों को ध्यान में रखते हुए कार्यशालाओं का संचालन करते हैं। वे 8 वर्षों से अधिक समय से बच्चों के साथ गणित में काम कर रहे हैं और इस हेतु तकनीकी संसाधनों की खोज और डिज़ाइन करने में उनकी गहरी रुचि है। वे छत्तीसगढ़ राज्य के लिए मुक्त व दूरस्थ शिक्षण के लिए पाठ्यचर्या निर्माण और पाठ्यपुस्तक लेखन की प्रक्रिया से भी जुड़े हुए हैं। उनसे arddhendu@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण** : सन्दीप दिवाकर
कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन** : राजेश उत्साही