15 गणित में पुनरावृत्ति और अभ्यास का महत्वः एक दृष्टिकोण

उमा हरिकुमार

ओलम्पिक खेलों के दौरान स्केटिंग रिंक के ऊपर तैरती हुई मानवाकृति, चीनी कलाबाजों का जोश, पंडित रविशंकर के सितार या उस्ताद बिस्मिल्ला खान की शहनाई से धाराओं की भाँति निकलती सुरीली धुनें – ये सभी चीजें आपको सम्मोहित कर देती हैं। इन सभी के बीच कुछ साझी बात है जिसने इन्हें सफलता की चोटी पर पहुँचाया– वह है, प्रतिभा एवं अभ्यास।

लेकिन यह कहने के बाद सवाल उठता है कि क्या सतत पुनरावृत्ति और अभ्यास को गणित के पढ़ने–पढ़ाने की प्रक्रिया का हिस्सा होना चाहिए?

गणित यानी संख्याओं से खेलना। हम जितना ज्यादा संख्याओं से और वे क्या निरूपित करती हैं, इस बात से परिचित होते जाते हैं, उतना ही हमारे लिए उनके बीच मौजूद सम्बन्धों को देखना आसान होता जाता है। इसलिए, यह आवश्यक है कि बच्चे गिनना सीखें और किसी समूह में मौजूद चीजों की संख्या को या तो गिनकर या फिर नियमित संरचनाओं का निरीक्षण करके पहचान सकें। गणित में यह एक ऐसी समझ है जिसे सामान्यतः संख्या– बोध कहा जाता है। इस बात पर आम राय है कि इसमें संख्या नामों, मूल्यों और सम्बन्धों की जानकारी शामिल रहती है। संख्या बोध रखने वाले बच्चे विभिन्न संख्याओं के मूल्यों के तुलनात्मक अंतरों को पहचान लेते हैं और उन्हें इसकी भी समझ होती है कि इन अन्तरों को कैसे निरूपित किया जा सकता है। संख्या बोध से एक स्वतःसिद्ध गणितीय तथ्य और एक अभिकलन विधि, दोनों को अर्थ मिलता है। दोनों ही अपने विषयों के ढाँचा–निर्माण के महत्वपूर्ण अंग हैं। गर्स्टन और कार्ड अभिकलन में संख्या बोध के महत्व की तुलना मोटे तौर पर पढ़ने में बुनियादी ध्वनियों के बोध की जरूरत से करते हैं (गर्स्टन एण्ड कार्ड, 1999)। विद्यार्थियों के लिए ऊँचे दर्जे के गणितीय कौशल हासिल करने के लिए बुनियादी गणितीय तथ्यों को तत्काल स्मरण कर पाने की क्षमता जरूरी है। गारनैट ऐसी विधियों या रणनीतियों के सामान्य अनुक्रम का वर्णन करते हैं जो संख्या बोध पर निर्भर करती हैं और अन्ततः तत्काल स्मरण की क्षमता तक ले जाती हैं (गारनैट, 1992)। पॉल हाल्मॉस ने भी कहा था कि, ''गणित सीखने का एकमात्र रास्ता है गणित करना।''

''संज्ञानात्मक मनोवैज्ञानिकों ने यह तथ्य खोज निकाला है कि मनुष्यों के द्वारा प्रश्नों को हल करने के लिए जिस एकाग्रता और स्मृति का इस्तेमाल किया जा सकता है उनकी निश्चित सीमाएँ होती हैं। इन सीमाओं की बाधा से पार पाने का एक रास्ता यह है कि किसी दिए जाने वाले काम के कुछ खास अंशों को दिन–प्रतिदिन के कार्य का हिस्सा बना लिया जाए और उन्हें इतना ज्यादा अच्छे से सीख लिया जाए कि वे स्वतः होने लगें।'' (व्हाइटहर्स्ट, 2003)

शोध से प्राप्त हुई ऊपर बताई गई इन सभी जानकारियों का गणित के लिए क्या अर्थ है?

इससे वाकई बहुत मदद मिलेगी यदि प्रश्न हल करने के अन्तर्गत की जानेवाली कुछ छोटी प्रक्रियाओं, खासतौर पर बुनियादी तथ्यों से जुड़ी हुई प्रक्रियाओं, को इस सीमा तक विकसित कर लिया जाए कि वे खुद–ब–खुद की जाने लगें। यदि किसी विद्यार्थी को हमेशा पहले बुनियादी तथ्यों के उत्तरों की संगणना करना पड़ती है तो गणित की ज्यादा जटिल अवधारणाओं पर लगा सकने के लिए उसके पास उतनी चिन्तन क्षमता नहीं बचती, जितनी उस विद्यार्थी के पास रहती है जो बुनियादी तथ्यों के उत्तर, बिना कोई प्रयास किए, झट स्मृति से निकाल सकता है। उदाहरण के लिए, यदि कई अंकों की संख्या में भाग देने के सवाल करने में किसी छात्र को घटाने के लिए लगातार अपनी उँगलिओं का इस्तेमाल करना पड़ता है, या भाग की प्रक्रिया के दौरान उसे पहाड़े याद नहीं आते, तो इनके लिए ध्यान और याददाश्त लगाने के कारण, भाग के सवाल के ज्यादा बड़े उद्देश्य की ओर हर कदम पर ध्यान देकर आगे बढ़ने की उसकी क्षमता घट जाती है। परिणाम यह होता है कि बच्चा अक्सर कई अंकों के भाग में निहित अवधारणाओं को पकड़ने में असफल रहता है।

बुनियादी तथ्यों को तत्परता से स्मरण कर पाने की क्षमता विकसित न होने से गणित के उच्च–स्तरीय कौशलों –जैसे कि कई अंकों की संख्याओं का जोड़, घटाना, लम्बे भाग तथा भिन्न संख्या – के विकास में बड़ी अड़चन आ सकती है। इस क्षमता के अभाव में गणित की कक्षा में होने वाली चर्चा में भाग लेने में, सफलतापूर्वक गणित के सवाल हल करने में, और यहाँ तक कि दैनिक जीवन के लिए आवश्यक कौशलों के विकास में बाधा पड़ सकती है। इस सबके अलावा बच्चे में आत्मविश्वास की कमी पैदा हो सकती है और वह अपने साथियों के उपहास का पात्र बन सकता है। गणितीय तथ्यों का तत्परता से स्मरण कर पाने की क्षमता गणितीय उपलब्धियों की परीक्षाओं में अच्छा प्रदर्शन करने

में भी बहुत मददगार हो सकती है। संज्ञानात्मक विज्ञान के अध्ययन भी निरन्तर अभ्यास के महत्व की पुष्टि करते हैं क्योंकि इससे अभिकलन की स्वतः होने वाली प्रक्रिया विकसित होती है, उपयोगी तथ्यों के याद आने की गति तेज हो जाती है, सवालों को पहचानने में कम समय लगता है और दूसरों का हस्तक्षेप भी घट जाता है (क्लैप, बोचेज़, ट्रैबर्ट एवं लोगन, 1991; पिरौली एवं ऐंडरसन, 1985, थॉर्नडाइक, 1921)।

सवालों को हल करने की किसी विधि को सीखना तो मुख्य रूप से याद रखने और अभ्यास करने की बात है, पर किसी विधि के प्रयोजन और तार्किक आधार को समझना याददाश्त और अभ्यास की बात नहीं है। किसी विधि के चरणों को कारगर ढंग से सिखाने के लिए केवल उन चरणों के प्रभावकारी प्रदर्शन और अभ्यास के तरीके ईजाद करने की जरूरत होती है। लेकिन प्रभावी ढंग से किसी विधि का अभिप्राय और तर्काधार सिखाना कहीं ज्यादा कठिन काम है क्योंकि इसके लिए विद्यार्थियों की समझ और तार्किक सोच को विकसित करना पड़ता है। इसके लिए अन्तर्दृष्टि और लचीलेपन की जरूरत होती है। किसी चीज की समझ और उसका उपयोग कभी–कभी बिलकुल अलग बातें होती हैं। जैसे हो सकता है कि कोई गुणा करने की प्रक्रिया समझता हो, पर तेजी से और सरलता से गुणा करने में सक्षम होना बड़ी और अलग बात है। दूसरी ओर, कई लोग गुणन की प्रक्रिया को बहुत अच्छे से समझे बिना ही गुणा कर लेते हैं क्योंकि उन्हें इसकी कोई विधि सिखाई गई है जिसका उन्होंने बार–बार अभ्यास किया है। कई अन्य लोगों ने गुणन की प्रक्रिया को अवधारणात्मक दृष्टि से समझना तो सीखा होता है लेकिन उन्होंने वास्तविक संख्याओं का गुणा करने का पर्याप्त अभ्यास नहीं किया होता जिसके कारण वे बिना कैलकुलेटर के कारगर ढंग से गुणा नहीं कर पाते। अतः गणित के कई पहलुओं में समझ और अभ्यास, दोनों ही महत्वपूर्ण हैं।

- सीखने की प्रक्रिया के सिद्धान्तों की दृष्टि से, गणित के शिक्षण में शिक्षक कम से कम चार भिन्न–भिन्न पद्धतियों का उपयोग करते हैं?
- कौशल पद्धतिः इसमें गणित के प्रक्रियात्मक ज्ञान पर ध्यान केन्द्रित रहता है।
- अवधारणात्मक पद्धतिः इसमें अर्थपूर्ण ढंग से तथ्यों, नियमों, सूत्रों और प्रक्रियाओं पर ध्यान केन्द्रित रहता है।
- सवालों को हल करने की पद्धतिः इसमें गणितीय सोच के विकास पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है।
- गवेषणात्मक पद्धतिः इसमें गणितीय जाँच–पड़ताल करने के लिए आवश्यक तथ्यों, नियमों, सूत्रों, विधियों को अर्थपूर्वक
- याद रखने और गणितीय सोच के महत्व को समझने पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है।

उपरोक्त सभी पद्धतियों में किसी न किसी प्रकार का अभ्यास आवश्यक होता है।

किसी बात की पुनरावृत्ति का अभ्यास रोचक बन सकता है, यदि शिक्षक में उसी बात को विविध प्रकार से समझाने की सूझबूझ हो। संख्या 5 का परिमाण 5 कंकड़ों, कंचों से दर्शाया जा सकता है। इसी अवधारणा का अभ्यास 5 बार ताली बजाकर, 5 बार पैर पटककर, या कोई ऐसा खेल खेलकर जिसमें बच्चों को 5–5 के समूहों में बाँटना हो, करवाया जा सकता है। यहाँ पुनराभ्यास का अर्थ 5 को दस बार लिखने से बहुत अलग है।

> *''कक्षा 8 में ऐसा हुआ कि मुझे हीरो का सूत्र, s(s-a)(s-b)(s-c), पढ़ाना था। हमने इसके लिए एक गाना बनाया: ''सुन, सुन मेरी आशा, सुन मेरी भाषा, सुन मेरी चम्पा रे'', जिसमें ''सुन'' दर्शाता था; 'आशा, भाषा और चम्पा' क्रमशः a,b,c को दर्शाते थे, और 'मेरी' घटाने के चिन्ह का सूचक था। कक्षा ने जमकर इसका मजा लिया। बच्चे अपना स्थान छोड़कर आगे आ गए और नाचने लगे। कक्षा के खत्म होने तक हर बच्चा यह सूत्र सीख गया था।''*

पुनरावृत्ति और अभ्यास कब बेतुका हो जाता है और उसका सीखने की प्रक्रिया पर कोई प्रभाव होता नहीं दिखताः

किसी के लिए ऐसी किसी चीज का अभ्यास करना जिसे वह न तो करना जानता है और न समझता है, बेकार लगता है और असफल हो जाता है। किसी ऐसी चीज का अभ्यास करने से जिसमें अनुमान और त्रुटि की पद्धति से सुधार नहीं होता, परिपूर्ण योग्यता हासिल नहीं होती। किसी बच्चे के किसी सवाल को हल न कर पाने के पीछे कई कारण हो सकते हैं। उसके सामने ऐसी बातें बार–बार दोहराने से जिन्हें वह समझता हो, या ऐसी बातों को सिर्फ दोहराने भर से जिन्हें उसने पहली बार सुना हो पर जिन्हें वह समझता न हो, उसे कोई मदद मिलने वाली नहीं है। जब तक परेशानी पैदा करने वाले खास पहलू को पहचानकर

स्पष्ट नहीं किया जाता, तब तक विद्यार्थियों की जरूरतों का समाधान नहीं हो सकता।

पुनरावृत्ति और अभ्यास कब कारगर प्रतीत होते हैं?

- सीखने वाले के लिए पुनरावृत्ति और अभ्यास रोचक और आनन्दपूर्ण होना जरूरी है।
- यह तभी कारगर होगा जब उस चीज की स्पष्ट समझ हो जिसका अभ्यास किया जा रहा हो।
- सीखने–सिखाने की प्रक्रिया में इनका व्यवस्थित ढंग से समावेश किया जाना चाहिए।
- दोहराए जाने वाले अभ्यास के लिए टैक्नोलॉजी (यांत्रिकी) एक महत्वपूर्ण उपकरण होती है।

क्या केवल पुनरावृत्ति और अभ्यास से सीखने की प्रक्रिया विकसित हो सकती है?

कई अध्ययनों से पता चलता है कि ठोस परिणाम प्राप्त करने के लिए पुनरावृत्ति और अभ्यास के साथ समय–समय पर पुनरावलोकन भी किया जाना जरूरी है। एक अध्ययन में ग्रे ने पाया कि जिन बच्चों ने अंकगणित के नियमों के शिक्षक द्वारा मूल प्रस्तुतिकरण के बाद पहले और सातवें दिन उनका पुनरावलोकन किया, उन्होंने इन नियमों को उन बच्चों की तुलना में ज्यादा अच्छे से सीखा जिन्होंने प्रस्तुतिकरण के बाद पहले और दूसरे दिन उनका पुनरावलोकन किया। जहाँ अधिकांश पाठ्यपुस्तकें अध्यायों के अन्त में पुनरावलोकन को शामिल करती हैं, वहीं शोध से पता चलता है कि पुनरावलोकन का, ''शिक्षण कार्यक्रम में व्यवस्थित ढंग से नियोजित करके समावेश किया जाना चाहिए।''

विद्यार्थियों को पर्याप्त पुनरावृत्ति और अभ्यास न कराए जाने के फलस्वरूप वे अक्सर किसी कक्षा में पढ़ाए गए टॉपिक में पारंगत नहीं हो पाते। उन्हें सम्बन्धित अवधारणा का थोड़ा बहुत ज्ञान तो हासिल हो जाता है पर वे उस पर अधिकार प्राप्त नहीं कर पाते ''. *...यह ऐसी प्रक्रिया है जिसे हर उस व्यक्ति ने देखा होता है जो गणित पढ़ाता है: विद्यार्थियों को हमेशा वह सब पढ़ाया जाना पड़ता है जो उन्हें पिछले पाठ्यक्रम में सीख लिया होना चाहिए था। (हालाँकि हम, अर्थात शिक्षकगण, निश्चय ही इसके अपवाद थे, और परिणामस्वरूप हमें अपने विद्यार्थियों की कमियाँ समझने में कठिनाई होती है)। एक औसत विद्यार्थी अंकगणित की कक्षा में सचमुच में भिन्नों को जोड़ना नहीं सीख पाता, लेकिन बाद में जब वह बीजगणित के एक पाठ्यक्रम से पार हो जाता है तब तक वह सांखिक भिन्नों को समझने में सक्षम हो जाता है। वह बीजगणित के पाठ्यक्रम के दौरान बीजगणित नहीं सीख पाता। इसे वह अवकलन गणित (कैलकुलस) पढ़ने के दौरान सीखता है जब उसे बीजगणित का उपयोग करने की मजबूरी होती है। ना ही वह अवकलन की कक्षा में अवकलन सीखता है, परन्तु जब आगे चलकर वह अवकलित समीकरणों (डिफ्रैन्शियल इक्वेशन्स) पर पहुँचता है तो उनसे गुजर चुकने पर हो सकता है कि प्रारम्भिक अवकलन गणित पर उसकी खासी अच्छी पकड़ बन जाए। ऐसा ही पाठ्यक्रमों की सभी सीढ़ियाँ चढ़ने के दौरान होता है। जाहिर है कि सबसे उच्च स्तरीय पाठ्यक्रम तो उसे पढ़ाने के द्वारा ही सीखा जाता है। इसकी वजह सिर्फ यह नहीं होती कि पिछले शिक्षक ने अपना काम, 'बहुत खराब ढंग से' किया होगा। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि हर नए टॉपिक का पर्याप्त अभ्यास करने के लिए समय नहीं होता, और यदि होता भी तो ऐसा करना असहनीय रूप से नीरस होता है।''*

–राल्फ पी. बोएस

पुनरावृत्ति और अभ्यास गणित के सीखने–सिखाने की प्रक्रिया का स्वाभाविक अंग होने चाहिए। एक रचनाशील शिक्षक इसे गणित शिक्षण के चित्रपट में इस तरह बुन देगा कि एक सुन्दर संरचना निर्मित हो जाएगी। तब पुनरावृत्ति की प्रक्रिया सीखने के आनन्द को नष्ट नहीं करेगी, बल्कि सीखने वाले को उत्साहित करके उसे और अधिक खोजने के लिए उकसाएगी। अतः हम अभ्यास और ऊब के बजाय अभ्यास और रोमांच को लक्ष्य बनाकर चलें!

उमा हरिकुमार *पिछले 25 वर्षों से गणित की शिक्षक रही हैं। उन्होंने सोफिया हाईस्कूल, बंगलौर तथा विभिन्न केन्द्रीय विद्यालयों में पढ़ाया है। वे 2003 में अज़ीम प्रेमजी फाउण्डेशन की सदस्य बनीं और वर्तमान में वे इसके अकादमिक एवं पैडागॉजी समूह की सलाहकार हैं। उनसे* umaharikumar@yahoo.com *पर सम्पर्क किया जा सकता है।*