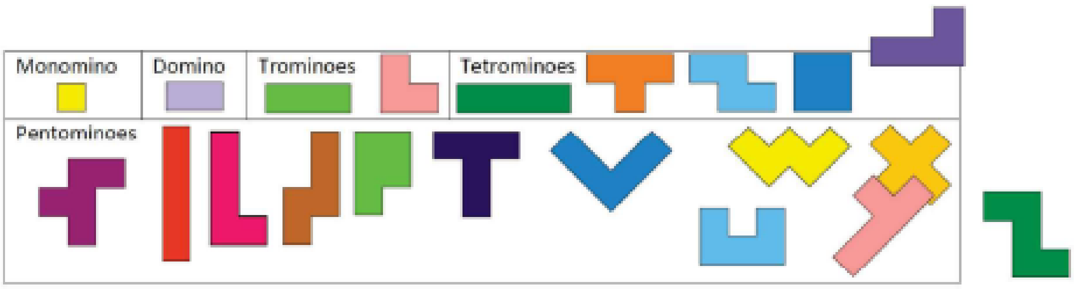
Translation of 'Polyominoes' - Revisited : Swati Sircar_From Azim premji University At Right Angles_ March,2018

पॉलीओमिनो - एक बार फिर से

स्वाती सरकार

लो फ्लोर हाई सीलिंग शृंखला के अन्तर्गत, *एट राइट एंगल*, वॉल्यूम 4, अंक 1 में प्रकाशित हमारे पहले लेख 'पेंटोमिनोस के साथ खोजबीन' में हमने आगमन विधि (Induction Method) द्वारा यह सिद्ध किया था कि हर पॉलीओमिनो में भुजाओं की कुल संख्या हमेशा एक सम संख्या होती है। यह विभिन्न मामलों और उप-मामलों पर विचार करने वाला एक लम्बा दृश्य प्रमाण (visual proof) था। यहाँ पर उसी परिणाम को सिद्ध करने का एक छोटा प्रमाण दिया गया है, जो भारतीय सांख्यिकी संस्थान में गणित के स्नातक विद्यार्थियों के साथ हुई चर्चा से उभरा।



कोई भी पॉलीओमिनो समान आकार के वर्गों से बना होता है। इसलिए पॉलीओमिनो के प्रत्येक आन्तरिक कोण को समकोण का विषम गुणज (odd multiple) होना चाहिए, यानी, या तो 90° या 270°। इसका मतलब यह है कि हम हमेशा किसी भी पॉलीओमिनो को कार्तीय तल (Cartesian Plane) पर इस प्रकार रख सकते हैं कि उसकी भुजाएँ, अक्षों के समानान्तर हों। हम x-अक्ष के समानान्तर भुजाओं को 'क्षैतिज' और y-अक्ष के समानान्तर भुजाओं को 'ऊर्ध्वाधर' के रूप में सन्दर्भित करेंगे। इसलिए क्षैतिज और ऊर्ध्वाधर भुजाओं को बारी-बारी से होना चाहिए, यानी कि, लगातार दो क्षैतिज भुजाओं के बीच एक ऊर्ध्वाधर भुजा होनी चाहिए, और इसी तरह से इसका विपरीत भी होना चाहिए। चूँकि पॉलीओमिनो, बन्द वक्रों वाले बहुभुज (polygon) ही हैं तो क्षैतिज भुजाओं की संख्या को ऊर्ध्वाधर भुजाओं की संख्या के बराबर होना चाहिए। इसलिए यदि किसी भी पॉलीओमिनो में k क्षैतिज भुजाएँ हैं, तो उसमें k ऊर्ध्वाधर भुजाएँ भी होनी चाहिए, जो इसे $2k$-भुज ($2k$-gon) बनाती हैं, यानी कि, एक ऐसा बहुभुज जिसकी भुजाओं की कुल संख्या एक सम संख्या हो।

छेदों वाले पॉलीओमिनो के लिए भी यह तर्क लागू होता है। एक छेद वाले एक n-ओमिनो को एक $(n + m)$-ओमिनो के रूप में सोचा जा सकता है, जिसमें से एक m-ओमिनो निकाला गया है, कुछ $m<n$ के लिए, जहाँ $(n + m)$-ओमिनो और m-ओमिनो बिना छेद वाले हैं और उनमें क्रमश: $2k$ और $2l$ भुजाएँ हैं। तब इस n-ओमिनो के लिए भुजाओं की संख्या, $(n + m)$-ओमिनो और m-ओमिनो की भुजाओं की संख्या का योग है। अर्थात, एक छेद वाले n-ओमिनो के लिए भुजाओं की संख्या = $2k + 2l = 2(k + l)$, जो एक सम संख्या है। इसी तर्क को कई छेद वाले पॉलीओमिनो के लिए बढ़ाया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी
अनुवाद पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही