Translation of *Cutting a Square into Equal Parts : Vinay Nair*_From_Azim Premji University At Right Angles_March,2019

कक्षा से

एक वर्ग को बराबर हिस्सों में बाँटना

विनय नायर

मुख्य शब्द : *वर्ग, सममिति, समानता, सर्वांगसमता, क्षेत्रफल, सामान्यीकरण*

पूर्व-अपेक्षाएँ

यह लेख एक ऐसी सरल गतिविधि की चर्चा करता है जिसे प्राथमिक, माध्यमिक और उच्च विद्यालय के विद्यार्थियों के साथ किया जा सकता है। इस लेख में जिस आकृति पर चर्चा की गई है वह 'वर्ग' है। विद्यार्थियों से यह अपेक्षा की जाती है कि वह वर्ग के मूलभूत गुणधर्मों से परिचित होंगे ही। इस लेख में रेखाओं के उपयोग पर भी चर्चा है। यहाँ तक कि अगर विद्यार्थी रेखा की परिभाषा के यूक्लिडियन विचार से परिचित नहीं हैं, तो भी शिक्षक द्वारा यह गतिविधि कराए जाने पर उन्हें इस विचार से रूबरू कराया सकता है। इसी प्रकार *बराबर, क्षेत्रफल, सर्वांगसमता, समरूप* आदि जैसे शब्दों को लेकर विद्यार्थियों की कुछ धारणा हो सकती है और यह गतिविधि गणितीय भाषा की दृढ़ता (rigour) को स्पष्ट करने के साथ-साथ पारिभाषिक शब्दों के बीच के सूक्ष्म अन्तर को स्पष्ट करने के लिए भी काफ़ी उपयोगी है।

एक अन्य महत्त्वपूर्ण पहलू यह है कि इस गतिविधि में शिक्षक के पास गणनीय, अगणनीय और अनन्त (इसका आशय अनन्त के विभिन्न प्रकारों से न होकर आम बातचीत में इस्तेमाल किए जाने वाले अनन्त के अर्थ से है) जैसी अवधारणाओं से विद्यार्थियों का परिचय कराने की गुंजाइश होती है। यह गतिविधि काफ़ी उपयोगी है क्योंकि अधिकांश मौक़ों पर विद्यार्थियों द्वारा इन शब्दों का मिला-जुला उपयोग किया जाता है।

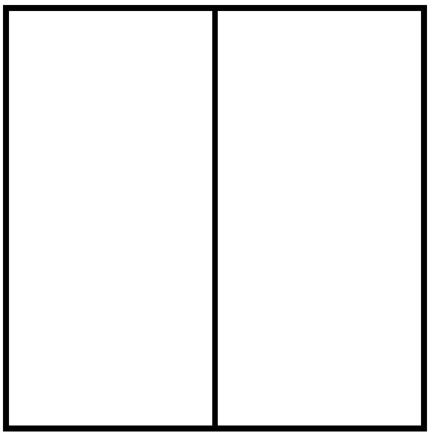
इस लेख के अन्त में दी गई एक तालिका में पाठक कई दफ़ा ***'क्यों'*** का उल्लेख देखेंगे। यही कारण है कि यह गतिविधि उच्च विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए भी उपयोगी है क्योंकि इसके ज़रिए वे इस बात का कारण बताने की बेहतर स्थिति में होंगे कि उन्हें क्यों लगता है कि रेखाओं की किसी ख़ास संख्या के लिए उनका उत्तर फलां-फलां है। अगर उन्हें कारण बताना है तो उन्हें कुछ अवधारणाओं की परिभाषाओं और स्वयंसिद्ध कथनों (Axioms) पर गहराई से विचार करना पड़ सकता है, जो कि वे विद्यालय स्तर के सवालों को हल करते समय नहीं करते हैं। प्राथमिक और माध्यमिक स्तर पर भी कारण पूछा जा सकता है (और पूछा जाना चाहिए), पर शायद इस उम्र में उन्हें स्वयंसिद्ध कथनों और स्वयंसिद्ध कथनों में परिवर्तन

कर गणितीय सिद्धान्त (प्रमेय) विकसित करने के विचार से परिचित नहीं कराया जा सकता है।

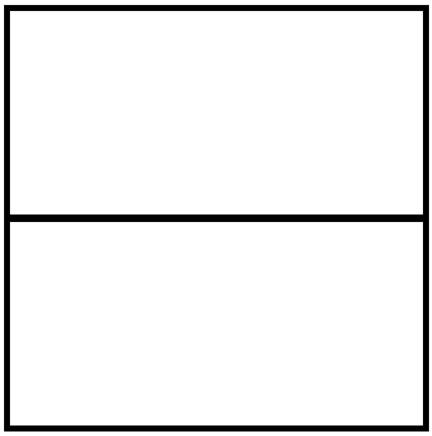
और अन्तिम बात जो पिछली बातों जितनी ही महत्त्वपूर्ण है कि इस गतिविधि को अन्य आकृतियों के साथ भी किया जा सकता है और विभिन्न आकृतियों के बीच एक तुलनात्मक अध्ययन भी किया जा सकता है।

"*एक रेखा का उपयोग करके आप एक वर्ग को कितने तरीक़ों से बराबर हिस्सों में बाँट सकते हैं?*" यह सवाल मैंने माध्यमिक विद्यालय के विद्यार्थियों से कई दफ़ा पूछा है। दिलचस्प बात यह है कि इस प्रश्न और इससे सम्बन्धित प्रश्नों के लिए हर बार मुझे नए उत्तर मिलते हैं। सबसे प्रचलित जवाब है– 'चार'। यह चार तरीक़े हैं :

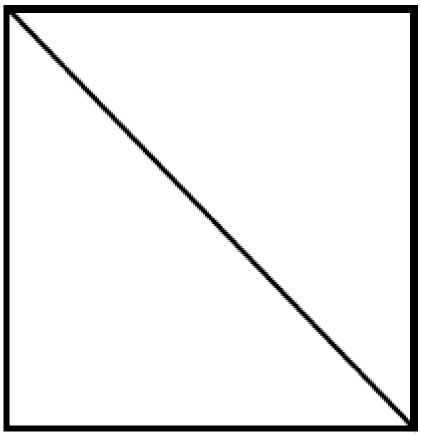
श्रेणी-I



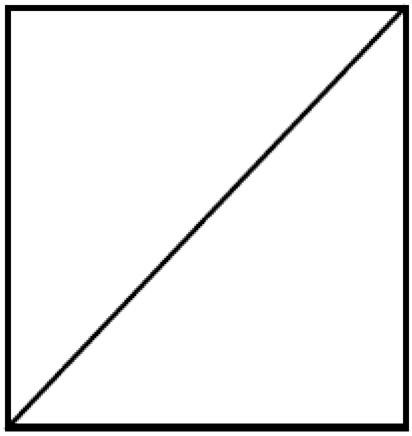
चित्र-1.1



चित्र-1.2



चित्र-1.3



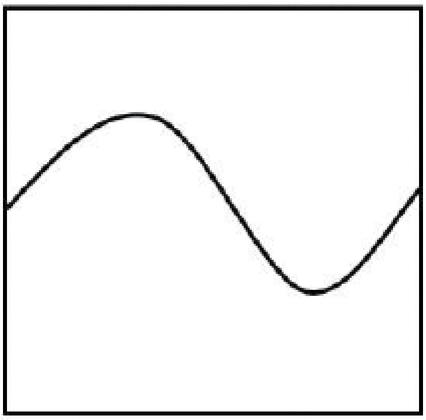
चित्र-1.4

मैं अनुमान लगाता हूँ कि अधिकांश लोग इन्हीं चार तरीक़ों के बारे में क्यों सोचते हैं, क्योंकि उन्होंने अपने जीवन में कुछ चीज़ें इसी तरह की होती हैं, जैसे कि काग़ज़ मोड़ना (एक आयताकार काग़ज़ से एक वर्ग की आकृति काटना), किताब खोलना और बन्द करना, चॉकलेट या केक काटना, चटाई या चादर की तह लगाना आदि। आप ऐसी कई स्थितियों के बारे में

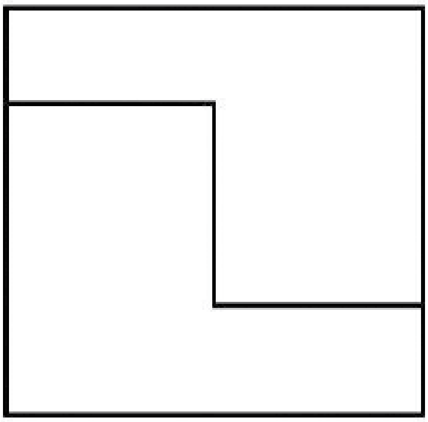
सोच सकते हैं जिनमें ऐसी तह (folding) लगाई गई होंगी।

कुछ विद्यार्थी कुछ अलग-से हल बतलाते हैं, जैसे कि :

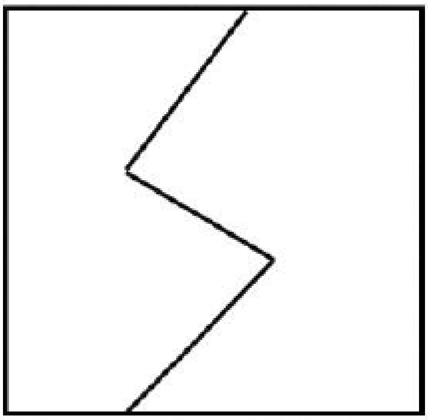
श्रेणी-II



चित्र-2.1



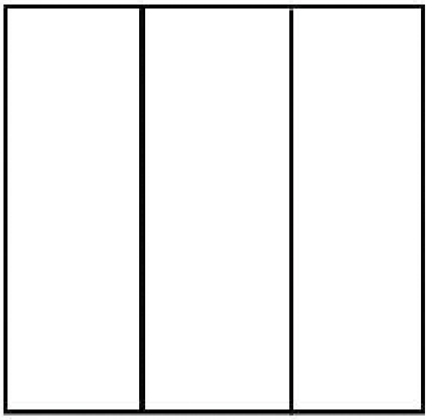
चित्र-2.2



चित्र-2.3

आश्चर्य की बात है कि बड़े बच्चे, जिन्हें सोचने के तरीक़ों (Thinking patterns) द्वारा शिक्षित किया गया है, ऐसे हल नहीं सुझाते हैं। और वयस्कों को ऐसे डिज़ाइन बनाते हमने शायद ही कभी देखा है। जब विद्यार्थी ऐसे डिज़ाइन बनाते हैं, तो एक शिक्षक होने के नाते आप यह कहने के लिए प्रवृत्त हो सकते हैं कि यह *ग़लत* उत्तर हैं, क्योंकि प्रश्न में यह बात स्पष्ट है कि हमें एक ***रेखा*** का उपयोग करना चाहिए, और वह रेखा हमेशा ***सीधी*** होनी चाहिए। पर, किसी विद्यार्थी की रचनात्मकता को समाप्त करने का यह एक अच्छा तरीक़ा है। इसके विपरीत, जब हम विद्यार्थियों से *रेखा* की उनकी समझ के बारे में पूछते हैं, तो जिन विद्यार्थियों ने इन रेखाओं को बनाया है वे इन विभाजकों को भी रेखा ही समझते हैं। शायद इसलिए क्योंकि उन्होंने किसी टिकट खिड़की के बाहर लगी कतारों को इसी प्रकार की आकृतियों के रूप में देखा होगा, जिसे हम बोलचाल की भाषा में *लाइन* (रेखा) कहते हैं।

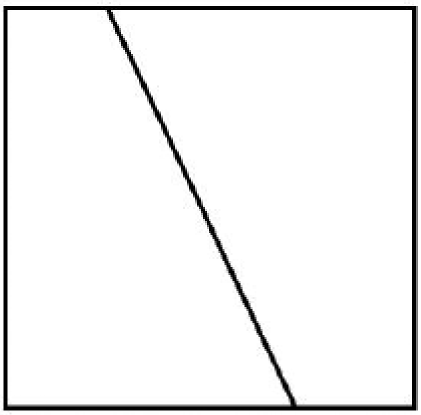
कक्षा के अधिकांश विद्यार्थी श्रेणी-II में किए गए विभाजन को स्वीकार नहीं करते। शिक्षकों के लिए यह एक मौक़ा है कि वे कक्षा में इस बात पर चर्चा करें कि *'रेखा क्या है?'*, कई विद्यार्थियों से मैंने *सीधी रेखा* की एक मज़ेदार परिभाषा सुनी है– *"सीधी रेखा वह रेखा है जो कभी मुड़ती नहीं है।"* अगर हम किसी रेखा को परिभाषित करने के सन्दर्भ में गणितीय दृढ़ता को छोड़ सकते, तो शायद हम यह परिभाषा स्वीकार कर सकते हैं। आमतौर पर इस स्तर पर अधिकांश बच्चे इस बात से सहमत होते हैं कि अगर हम श्रेणी-I पर विचार करें तो एक रेखा का उपयोग करके किसी वर्ग को बराबर हिस्सों में बाँटने के चार तरीक़े हैं और अगर हम श्रेणी-II पर विचार करें तो इसके अनन्त[1] तरीक़े हैं। इस पड़ाव पर, मैंने उन्हें बतलाया कि श्रेणी-I में भी विभाजन के चार से अधिक तरीक़े हैं और उन्हें बाक़ी के और तरीक़े ज्ञात करने की चुनौती दी। फिर, मैंने कुछ विद्यार्थियों को यह चित्र बनाते पाया :



चित्र-2.4

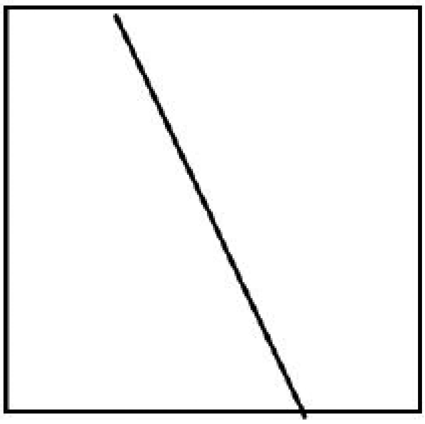
जब मैंने उन्हें प्रश्न को दुबारा पढ़ने को कहा, तो मुझे पता चला कि उन्होंने प्रश्न में उल्लेखित वाक्यांश 'एक *रेखा'* (a line) को 'सिर्फ़ एक रेखा (one line) ' समझ लिया था। जब यह स्पष्ट हुआ तो उन्होंने अपना उत्तर वापिस ले लिया। हालाँकि, फिर भी कोई-न-कोई विद्यार्थी ज़रूर होता है, जो नीचे चित्र में दिखाए अनुसार सोचता है :

श्रेणी-III

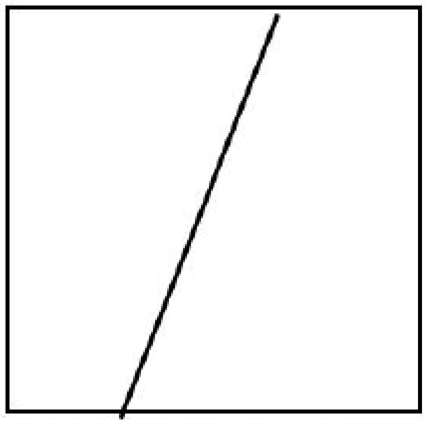


चित्र-3.1

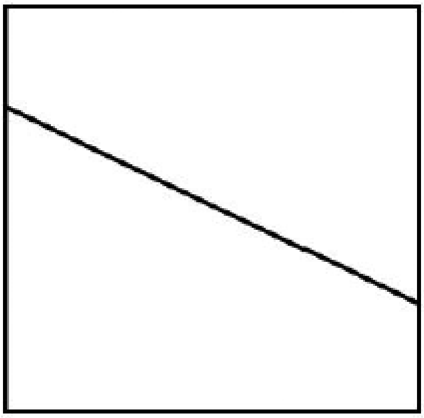
जब आप विद्यार्थियों से पूछते हैं कि क्या दर्शाए गए हिस्से बराबर हैं, तो सामान्यत: वे असमंजस में पड़ जाते हैं। अधिकांश 'हामी' भरते हैं तो कई 'न' में जवाब देते हैं। असहमत होने वालों से जब इसका कारण पूछा जाता है, तो उनमें से अधिकांश का कहना होता है कि 'हिस्से बराबर नहीं लगते (दिखते) हैं'। हाल ही में मुझे एक विद्यार्थी द्वारा एक रोचक जवाब मिला– *'यह बराबर कैसे हो सकते हैं यदि यह सममित नहीं हैं?'*, (सममिति से उस विद्यार्थी का आशय परावर्तीय सममिति से था)। तो मैंने फिर कक्षा से पूछा कि उन्हें क्या लगता है क्या यह सही है कि अगर दो हिस्सों को बराबर होना है तो उन्हें परावर्तीय सममित होना चाहिए? कुछ देर की चर्चा के बाद, उनमें से कुछ विद्यार्थियों ने कुछ विरोधाभासी उदाहरण सुझाए जहाँ दो चीज़ें बराबर तो थीं पर परावर्तीय सममित नहीं थीं। इस प्रकार वर्ग को बराबर हिस्सों में विभाजित करने की इस नई श्रेणी को उत्तर में शामिल कर लिया गया। लेकिन फिर भी कुछ विद्यार्थी ऐसे थे, जो इस बात को लेकर आश्वस्त होना चाहते थे कि दोनों हिस्से बराबर हैं। इसलिए उन्हें एक वर्ग बनाने और उसकी किसी भुजा के एक बिन्दु से एक रेखा इस प्रकार खींचने को कहा गया कि जब वह रेखा विपरीत भुजा से मिले तो कोने से प्रारम्भिक बिन्दु की दूरी और विपरीत कोने से अन्तिम बिन्दु की दूरी बराबर हो। अब जो दो आकृतियाँ बनी थीं, बच्चों को उनकी सारी भुजाओं और कोणों को मापना था या फिर दोनों आकृतियों को काटकर यह जाँचना था कि वे एक-दूसरे के ऊपर एकदम ठीक बैठती हैं कि नहीं। फिर भी यह सवाल तो बना रहा कि ऐसी कितनी सम्भावनाएँ हैं? अधिकांश ने कहा '*दो*', फिर कहा *'चार'*।



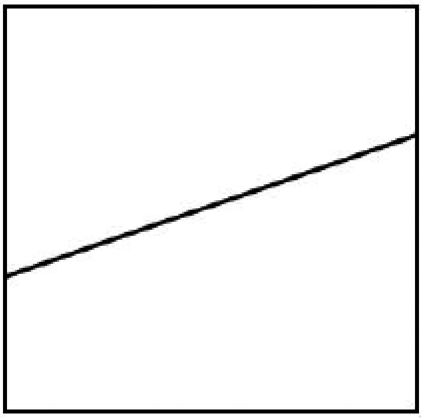
चित्र-3.1



चित्र-3.2



चित्र-3.3



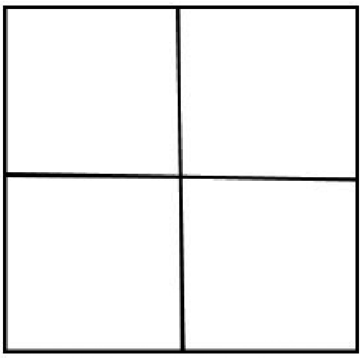
चित्र-3.4

लेकिन, थोड़ी ही देर में किसी ने कहा कि इसके और भी तरीक़े हो सकते हैं, क्योंकि वर्ग की भुजाओं पर विभाजक के स्थान को परिवर्तित किया जा सकता है यानी कि कोनों से विभाजक की दूरी को परिवर्तित किया जा सकता है। और ऐसा करने पर भी इसे बराबर हिस्सों में बाँटा जा सकता है। इस प्रकार कक्षा इस बात पर सहमत होती है कि किसी वर्ग को एक रेखा द्वारा **बहुत सारे** तरीक़ों से बराबर हिस्सों में विभाजित किया जा सकता है।

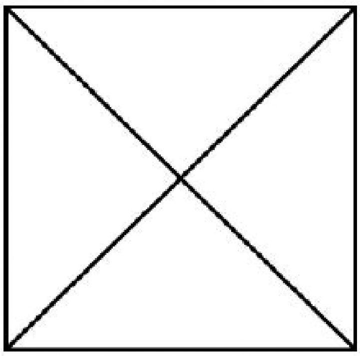
दो रेखाओं द्वारा किसी वर्ग को बराबर हिस्सों में बाँटना

इसके बाद अगला प्रश्न आता है कि *"आप दो रेखाओं की सहायता से किसी वर्ग को बराबर हिस्सों में कितने तरीक़ों से बाँट सकते हैं?"* इसके दो जवाब प्राप्त होते हैं :

श्रेणी-IV

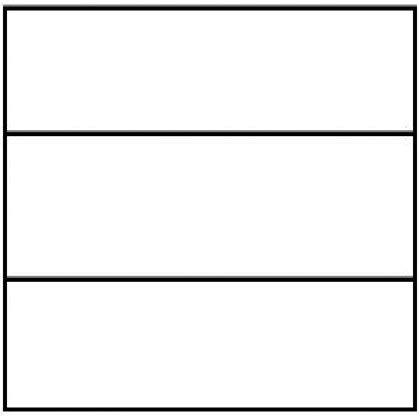


चित्र-4.1

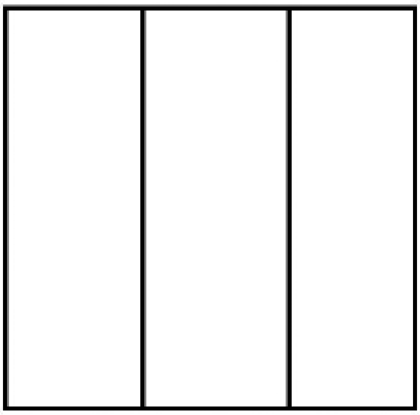


चित्र-4.2

श्रेणी-V



चित्र-5.1



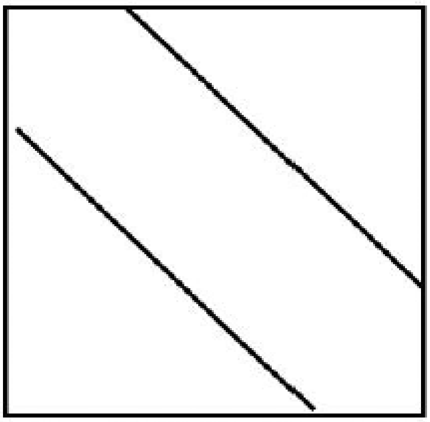
चित्र-5.2

अधिकांश मामलों में, विद्यार्थी या तो श्रेणी-IV का चित्र बनाते हैं या श्रेणी-V का, पर दोनों नहीं। यह एक रोचक अवलोकन है। स्वाभाविक रूप से अगला सवाल आता है- *“दो रेखाओं द्वारा किसी वर्ग को चार बराबर हिस्सों या तीन बराबर हिस्सों में बाँटने के कितने तरीक़े हैं?”* विद्यार्थी इस पर तुरन्त सोच-विचार शुरू कर देते हैं।

अगर आपने ग़ौर किया होगा तो पिछले प्रश्न तक हमने कभी भी बराबर हिस्सों की उस संख्या का ज़िक्र नहीं किया जिसमें विद्यार्थियों को वर्ग को विभाजित करना था। हर दफ़ा यही कहा कि ‘वर्ग को बराबर हिस्सों में विभाजित करिए’। क्यों? जब हम विद्यार्थियों को बराबर हिस्सों की संख्या नहीं बतलाते हैं, तब हम उनके सोचने पर कोई प्रतिबन्ध या शर्त नहीं थोपते हैं। यह उन्हें कल्पना करने की आज़ादी देता है जो गणित के ज़रिए रचनात्मकता पैदा करने के लिए बेहद ज़रूरी है।

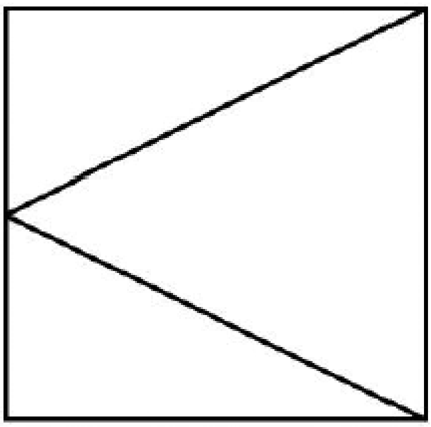
आइए, सवाल पर वापस आते हैं। अपनी खोजबीन के बाद अधिकांश विद्यार्थी कहते हैं कि श्रेणी-IV और श्रेणी-V में विभाजन के केवल दो-दो तरीक़े हैं। हालाँकि 30-35 विद्यार्थियों की कक्षा में हमेशा ही दो-तीन ऐसे विद्यार्थी रहते हैं, जो नीचे दिए गए चित्र बनाते हैं और कहते हैं कि उन्होंने एक नया तरीक़ा खोजा है।

श्रेणी-VI (a)



चित्र-6.1

श्रेणी-VI (b)



चित्र-6.2

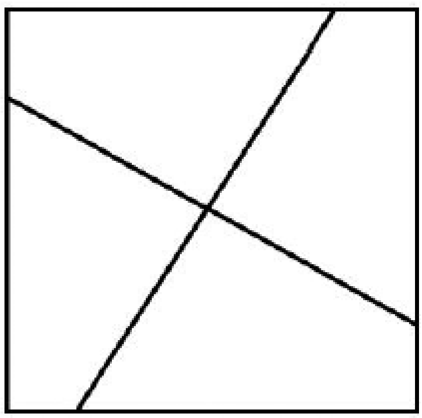
(आगे पढ़ने से पहले, यह सोचने की कोशिश कीजिए कि विद्यार्थी इन्हें बराबर हिस्से क्यों कहते हैं। ध्यान दीजिए कि चित्र-6.1 और 6.2 में भले ही विद्यार्थियों ने दोनों रेखाखण्डों की लम्बाई स्पष्ट रूप से नहीं बताई, पर वे यह मानकर चलते हैं कि प्रत्येक वर्ग में रेखाखण्डों की लम्बाई बराबर है। साथ ही वे यह भी मानकर चलते हैं कि चित्र-6.1 में प्राप्त हुए त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज हैं और चित्र-6.2 में जो रेखाखण्ड हैं, वे वर्ग की भुजा के मध्य बिन्दु पर मिलते हैं।)

जी हाँ, श्रेणी-VI (a) में वे ऐसा इसलिए सोचते हैं क्योंकि उन्होंने '*बराबर*' का आशय *बराबर मात्रा* या *बराबर क्षेत्रफल* को माना है। वे पूरी तरह ग़लत भी नहीं हैं क्योंकि 'बराबर' शब्द काफ़ी अस्पष्ट है। कई महत्त्वपूर्ण मुद्दों पर बात करने के लिए यह एक उचित मौक़ा है। शुरुआत यह पूछकर की जा सकती है कि आप 'बराबर' से क्या समझते हैं? जिन्हें श्रेणी-VI का अपना उत्तर सही लगता है, वे कहते हैं 'बराबर' का मतलब है 'बराबर मात्रा'। अन्य विद्यार्थी कहते हैं 'बराबर' का मतलब है 'समान आकृति एवं माप'। कक्षा इस निष्कर्ष पर पहुँचती है कि *'बराबर'* को हम कैसे परिभाषित करते हैं, इस आधार पर श्रेणी-VI को स्वीकार या अस्वीकार किया जा सकता है। हम बराबर की *'समान आकृति एवं माप'*[2] वाली परिभाषा के आधार पर आगे बढ़ते हैं।

जिन विद्यार्थियों को श्रेणी-VI (b) के भाग बराबर लगते हैं उन्हें वह बराबर इसलिए लगते हैं क्योंकि तीनों भाग त्रिभुज हैं, और वे त्रिभुजों की आकृतियों के बीच की असमानता पर ग़ौर नहीं कर पाते हैं। आमतौर पर, इन विद्यार्थियों को यह समझने में थोड़ा समय लगता है कि समकोण त्रिभुज समद्विबाहु त्रिभुज की माप का आधा होते हैं।

आगे, हम विद्यार्थियों से पूछते हैं कि क्या श्रेणी-IV में वर्ग को विभाजित करने के और भी तरीक़े हो सकते हैं? अधिकांश विद्यार्थी और तरीक़े नहीं बता पाते हैं, पर कक्षा में हमेशा ही एक या दो ऐसे विद्यार्थी होते हैं जो यह तरीक़ा अपनाते हैं :

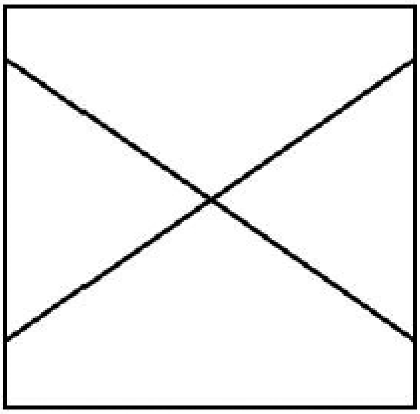
श्रेणी-VII



चित्र-7.1

अधिकांश बच्चों के लिए यह देखना आसान नहीं होता कि चारों हिस्से समान आकृति एवं माप के हो सकते हैं। जिन्होंने छोटी उम्र से आकृतियों और पैटर्न का नज़दीक से अवलोकन करने में अच्छा-ख़ासा समय व्यतीत किया होगा, वही यह पहचान पाते हैं कि चारों भाग समान हो सकते हैं। दूसरे बच्चों से इन आकृतियों को काटकर (यह निर्देशित करने के बाद कि रेखाओं को किस प्रकार खींचना है ताकि चारों भाग बराबर हो सकें) जाँचने के लिए कहा जा सकता है। उच्च विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए, यह *सिद्ध करने* से सम्बन्धित एक अच्छा सवाल हो सकता है। कुछ बच्चे यह भी ग़ौर कर सकते हैं कि अगर चारों हिस्सों को बराबर होना है, तो रेखाओं को एक-दूसरे पर लम्ब होना होगा (ऐसा क्यों?[3])। एक बार फिर विद्यार्थियों से पूछा जाता है कि कितनी सम्भावनाएँ हैं, तो उनका जवाब होता है– **बहुत सारी** (**क्यों?**)। कुछ विद्यार्थियों को यह भी लगने लगता है कि इसका उत्तर हमेशा '**बहुत सारे**' होता है और वे कहते हैं कि एक वर्ग को दो रेखाओं द्वारा तीन बराबर हिस्सों में विभाजित करने के **बहुत सारे** तरीक़े होते हैं। हालाँकि, कुछ विद्यार्थी इस पर अपनी असहमति प्रकट करते हैं, पर वे इस असहमति का कारण बताने में असक्षम होते हैं। हम इस सवाल की खोजबीन पाठकों पर छोड़ते हैं–सिद्ध करें या खण्डन करें कि किसी वर्ग को दो रेखाओं की सहायता से चार सर्वांगसम हिस्सों में विभाजित करने के अनन्त तरीक़े होते हैं।

कुछ विद्यार्थी ऐसा चित्र भी बनाते हैं :

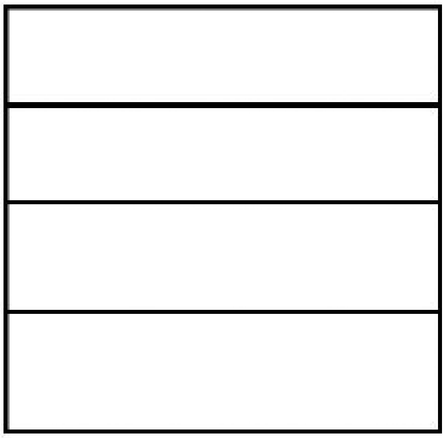


चित्र-7.2

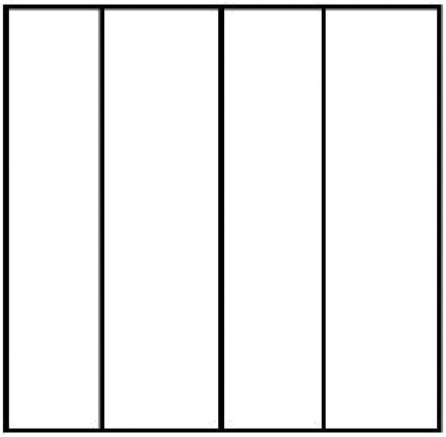
ऐसी स्थितियों में हमें *बराबर के समान आकृति एवं माप* वाले अर्थ को दोहराना होगा। फिर भी कुछ विद्यार्थी इन चार हिस्सों को समान आकृति और माप वाले ही समझते हैं। ऐसे नज़रिए वाले विद्यार्थियों से यह कहना चाहिए कि वे चारों हिस्सों का अवलोकन करें और देखें कि किस प्रकार की आकृतियाँ बनी हैं? आमतौर पर कक्षा में ऐसे विद्यार्थियों की संख्या कम ही होती है, पर तथ्य यह है कि वे चारों आकृतियों को बराबर हिस्सों के रूप में देखते हैं, यह बात शायद शिक्षक ने सोची भी नहीं होगी।

तीन रेखाओं द्वारा एक वर्ग को बराबर हिस्सों में बाँटना

अगला सवाल जिसकी खोजबीन विद्यार्थी करते हैं, वह है– “*एक वर्ग को तीन रेखाओं द्वारा बराबर हिस्सों में कितने तरीक़ों से बाँटा जा सकता है?*” अधिकांश विद्यार्थी यह दो तरीक़े सुझाते हैं :

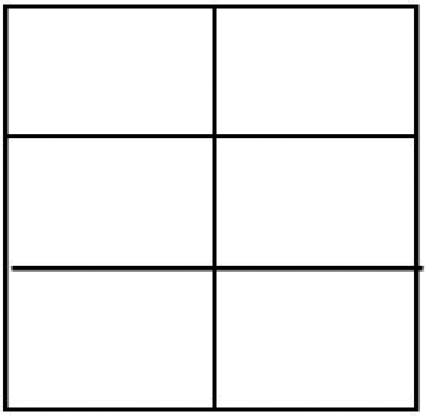


चित्र-8.1



चित्र-8.2

कुछ बच्चे यह ग़ौर करते हैं कि तीन रेखाओं द्वारा वर्ग को छह बराबर हिस्सों में विभाजित किया जा सकता है :



चित्र-8.3

इस पड़ाव पर जब हम विद्यार्थियों से पूछते हैं कि ‘अब आप किन सवालों की खोजबीन करना चाहेंगे?’, तो वे कहते हैं, “एक वर्ग को तीन रेखाओं द्वारा छह बराबर हिस्सों और तीन रेखाओं द्वारा चार बराबर हिस्सों में विभाजित करने के कितने तरीक़े हैं?” बिना शिक्षक के निर्देश के ही विद्यार्थी दोनों प्रश्नों की खोजबीन शुरू कर देते हैं। जब वे अपना जवाब बतलाते हैं, तो शिक्षक फिर से पूछते हैं, “आप ऐसा क्यों सोचते हैं?” यह प्रश्न शिक्षक और विद्यार्थी दोनों के लिए ही काफ़ी महत्त्वपूर्ण है। शिक्षकों के लिए यह इसलिए महत्त्वपूर्ण है क्योंकि विद्यार्थियों की सोचने की प्रक्रिया को समझने के लिए यह एक अच्छा मौक़ा है। विद्यार्थियों के लिए यह इसलिए महत्त्वपूर्ण है क्योंकि पूछे गए ‘*क्यों*’ के कारण वे विवेचन (reasoning) करना शुरू करते हैं।

अगर आप यह सवाल किसी कक्षा में पूछते हैं, तो यह सम्भव है कि विद्यार्थियों द्वारा और भी अधिक हल सुझाए जाएँ और उनमें से कई जवाब ग़लत हों। उनके जवाब को 'ग़लत' या सही कहने की बजाए, उनसे पूछने की कोशिश कीजिए कि *उन्हें अपना जवाब सही क्यों लगता है?*

इस खोजबीन को आगे बढ़ाया जा सकता है और विद्यार्थियों से निम्नानुसार एक तालिका बनाने को कहा जा सकता है। साथ ही आप उन्हें रेखाओं की संख्या और बराबर हिस्सों की संख्या को परिवर्तित करके खोजबीन करने को भी कह सकते हैं।

आकृति	**रेखाओं की संख्या**	**बराबर हिस्सों की संख्या**	**विभाजन के कितने तरीक़े हो सकते हैं?**
वर्ग	1	2	बहुत सारे (क्यों?)
वर्ग	2	3	दो (क्यों?)
वर्ग	2	4	बहुत सारे (क्यों?)
वर्ग	3	4	बहुत सारे (हाँ, यह सही है। पर कैसे?)
वर्ग	3	5	कितने तरीक़े हैं? क्यों? (क्या आप सिद्ध कर सकते हैं?)
वर्ग	3	6	कितने तरीक़े हैं? क्यों?
वर्ग	4	8	कितने तरीक़े हैं? क्यों?
वर्ग	5	8	कितने तरीक़े हैं? क्यों? (इसका एक हल है)
वर्ग	6	8	कितने तरीक़े हैं? क्यों? (इसके 1 से ज़्यादा उत्तर हैं)
वर्ग	7	8	कितने तरीक़े हैं? क्यों?

अगली दिलचस्प गतिविधि हो सकती है किसी वर्ग को दूसरी आकृतियों में बदलना, जैसे कि वृत्त या आयत या समबाहु त्रिभुज और इस पर आधारित एक तालिका बनाना। ग़ौर कीजिए कि रेखाओं की और बराबर हिस्सों की किसी ख़ास संख्या के लिए विभाजन करने के तरीक़ों की संख्या अब भी पहले जितनी ही रहती है या नहीं। क्या हम अवलोकन के आधार पर कुछ सामान्यीकरण कर सकते हैं और इसके बाद यदि सम्भव हो तो कोई तार्किक सामान्यीकरण कर सकते हैं? क्या हम पता (और सिद्ध) कर सकते हैं कि किसी आकृति में दी गई x रेखाओं के लिए y बराबर हिस्से नहीं किए जा सकते हैं? यह खोजबीन अन्तहीन है।

सीखने के प्रतिफल

1. विद्यार्थी आकृतियों का ज़्यादा ध्यानपूर्वक अवलोकन करना शुरू करते हैं।

2. उच्च विद्यालय की ज्यामिती में 'सर्वांगसमता' की अवधारणा से विद्यार्थियों को परिचित करवाने के पहले ही 'सर्वांगसमता' की विस्तृत समझ विकसित की जा सकती है।
3. विवेचन तथा अवलोकन कौशल बेहतर होते हैं।
4. अवलोकन के आधार पर सामान्यीकरण करने और दावा करने की क्षमता विकसित करने का प्रयास होता है।
5. सवाल हल करने के पूर्व शब्दों (जैसे *बराबर*) को समझने और *परिभाषित* करने की महत्ता का आभास होता है।

उच्च विद्यालय के विद्यार्थियों के लिए खोजबीन सम्बन्धित अन्य सवाल

1. प्रत्येक 'क्यों' के लिए 'प्रमाण' लिखने की कोशिश करें।
2. एक वर्ग को हम तीन रेखाओं की सहायता से अधिक से अधिक 7 हिस्सों में विभाजित कर सकते हैं। क्या वर्ग को सात बराबर क्षेत्रफल वाले हिस्सों में विभाजित करना सम्भव है? क्या हम अपने उत्तर को सही साबित कर सकते हैं?
3. अगर n रेखाएँ खींची जाएँ, तो वर्ग और अन्य आकृतियों में कितने बराबर हिस्से बनाए जा सकते हैं?

शिक्षकों के लिए :

1. मैंने देखा है कि माध्यमिक स्तर पर 'अनन्त' शब्द का उपयोग करने वाले अधिकांश विद्यार्थी इसके अर्थ को लेकर भ्रमित होते हैं और वे इसे 'अनगिनत' या 'बहुत बड़ी संख्या' या 'सबसे बड़ी संख्या' समझते हैं। इसलिए, मैंने उनके साथ एक नए शब्द 'बहुत सारे' का प्रयोग किया है। इस लेख में मैंने 'बहुत सारे' शब्द का उपयोग 'अनन्त' के लिए किया है क्योंकि माध्यमिक स्तर के अधिकांश विद्यार्थियों को 'अनन्त' शब्द की स्पष्ट समझ नहीं होगी।
2. हम 'सर्वांगसमता' शब्द का उपयोग इसलिए नहीं करते हैं क्योंकि इस शब्दावली से विद्यार्थी परिचित नहीं रहते हैं। लेकिन 'समान आकृति और समान माप' ऐसी शब्दावली है जिसे माध्यमिक स्तर के विद्यार्थी पढ़कर समझ सकते हैं।
3. लेख में जहाँ कहीं भी 'क्यों' पूछा गया है, पाठक उसे एक प्रश्न के तौर लें और देखें कि क्या वे गणितीय दृढ़ता के साथ उसे सिद्ध कर सकते हैं।

....

विनय नायर 'रेजिंग अ मैथमेटिसियन फ़ाउण्डेशन' के सह-संस्थापक हैं। वह भारत के विभिन्न हिस्सों में प्राचीन भारतीय गणित और गणित में खोजबीन सम्बन्धी अधिगम के कई ऑनलाइन और ऑफ़लाइन कार्यक्रम संचालित करते हैं। वह स्कूली विद्यार्थियों के बीच एक शोधार्थी जैसी मानसिकता स्थापित करना चाहते हैं। उनसे vinay@sovm.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र **पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही