Translation of Area of Rectangle = Length × Breadth : Conversations with a 9 year old : Rakhi Banerjee From Azim premji University At Right Angles_ Vol.5, No.2_July 2020

आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई X चौड़ाई

9 साल की एक बच्ची के साथ बातचीत

राखी बनर्जी

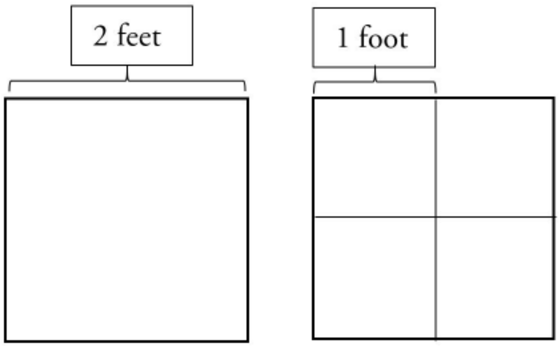
मुख्य शब्द : *मापन, इकाइयाँ, मानक, अमानक, क्षेत्रफल, परिमाप, सूत्र, गणितीय बातचीत*

प्राथमिक स्तर पर बच्चों को कई तरह के मापन सिखाए जाते हैं, जैसे लम्बाई, वज़न, आयतन, मुद्रा, समय और अन्त में क्षेत्रफल और परिमाप (परिमाप भी लम्बाई की माप है)। हालाँकि लम्बाई, वज़न और आयतन को पढ़ाने के लिए, विद्यार्थियों को मापन की अनौपचारिक/अमानक इकाइयों का एक्सपोजर देने का प्रयास किया जाता है। इस प्रकार हम किसी वस्तु को मापने के लिए क्या उपयोग कर सकते हैं, इस बात की कुछ अन्तर्निहित समझ बनना शुरू होती है, लेकिन मापन की अन्य अवधारणाएँ मानक इकाइयों, रूपान्तरणों और सूत्रों से शुरू होती हैं। यहाँ तक कि जब अमानक इकाइयों को पेश किया जाता है, तब भी शायद ही कभी उन सिद्धान्तों को स्पष्ट रूप से समझाने पर ज़ोर दिया जाता है जिनका मापन में नियमित रूप से पालन किया जाता है– जैसे कि किसी इकाई को चुनना और बिना किसी गैप या ओवरलैप के इसका बार-बार दोहराव करना। यह माना जा सकता है कि चूँकि बच्चे पहले से ही मापन के कुछ पहलुओं/आयामों के लिए अनौपचारिक/अमानक इकाइयों के बारे में जानते हैं, इसलिए वे समय और क्षेत्रफल सहित सभी प्रकार के मापन के लिए मानक इकाइयों के साथ काम करने हेतु तैयार होंगे। इसके अलावा, समय और क्षेत्रफल का मापन, सीखने और सिखाने के लिहाज़ से अधिक कठिन अवधारणाएँ हैं। बिना इस बात पर ध्यान केन्द्रित किए हुए कि समय और समय मापन का आशय क्या है, "समय" की अवधारणा को घड़ी पढ़ने (देखने) व समझने तक सीमित किया जाता है। इसी तरह से, क्षेत्रफल और परिमाप केवल सूत्रों से कहीं अधिक हैं। यह भी समझना होगा कि क्षेत्रफल और परिमाप क्या हैं, वे कैसे अलग हैं या कैसे एक-दूसरे के साथ जुड़े हैं। यह लेख मेरी 9 वर्षीय बेटी (एम) को क्षेत्रफल और परिमाप के बारे में सोचने की प्रक्रिया में जोड़ने हेतु किए गए मेरे प्रयास के बारे में है। मेरा उद्देश्य, बच्चों को इन अवधारणाओं को पढ़ाते समय आने वाली कुछ चुनौतियों का वर्णन करना, कुछ शैक्षणिक विचारों का सुझाव देना और साथ ही एक बच्चे की सोच की झलक देना है।

सन्दर्भ

यह प्रसंग हमारे परिवार के नवनिर्मित भवन में गृहप्रवेश और उसके कारपेट एरिया के बारे में चर्चा के साथ शुरू हुआ। जब घर के वयस्क कारपेट एरिया पर चर्चा कर रहे थे, तब एम ने हमसे पूछा कि वर्ग-फुट का मतलब क्या है? वह लम्बाई, वज़न, आयतन सहित मापन की

कुछ इकाइयों से अवगत थी। उसने हाल ही में सरल रेखीय (rectilinear) आकृति के परिमाप और गोलाकार आकृतियों की परिधि का अध्ययन किया था (जिसकी इकाई लम्बाई की इकाई के समान ही थी), लेकिन वह यह अनुमान नहीं लगा सकी थी कि "वर्ग-फुट" जैसी किसी इकाई का क्या मतलब हो सकता है।



चित्र-1 : टाइल्स और विभाजन की योजनाबद्ध आकृति

मैंने उसे समझाया कि फ़र्श पर प्रत्येक टाइल, प्रत्येक तरफ़ से 2 फुट लम्बी थी और पूरे टाइल (वर्ग) द्वारा घेरा गया स्थान 4 वर्ग फुट है। इसके अलावा, मैंने आगे यह भी कहा कि यदि हम वर्ग टाइल के 4 बराबर हिस्से बनाते हैं, ताकि प्रत्येक भाग एक वर्ग बना रहे (जिसका अर्थ है कि बराबर भागों को एक क्षैतिज रेखा और एक ऊर्ध्वाधर रेखा द्वारा बनाया जाना है, जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है), तब छोटे वर्ग का क्षेत्रफल 1 वर्ग फुट होगा। वास्तव में, मैंने "वर्ग-फुट" को एक वर्ग के क्षेत्रफल के रूप में परिभाषित किया जिसकी प्रत्येक भुजा 1 फुट थी। मैंने उससे कहा कि अगर वह घर के फ़र्श पर 1 फुट विमा के कुल वर्गों की गिनती कर ले, तो वह घर के कारपेट एरिया का पता लगा लेगी। पर हमारे पास ऐसा करने का समय नहीं था, इसलिए हम आगे बढ़ गए।

कुछ हफ़्ते बाद, स्कूल में उसे क्षेत्रफल की अवधारणा से परिचित कराया गया। वह समझ गई थी कि क्षेत्रफल, आकृति की सीमा के अन्दर का स्थान है। आयत और वर्ग केवल दो आकृतियाँ थीं, जिन्हें इस सन्दर्भ में पेश किया गया था। इसके साथ ही उन्होंने एक आयत और एक वर्ग के क्षेत्रफल को निकालने के सूत्र लिखे। इन दोनों को अलग-अलग रखा गया था, और उसे यक़ीन नहीं था कि आयत और वर्ग के बीच कोई सम्बन्ध है; जबकि उनमें से एक में आमने-सामने की भुजाएँ बराबर और समान्तर थी और दूसरे में सभी भुजाएँ बराबर थीं। विभिन्न अवसरों पर, मैंने उसे यह सोचने के लिए प्रेरित करने की कोशिश की है कि क्यों वर्ग भी एक आयत है, और परिमाप और क्षेत्रफल के सन्दर्भों में एक ही सूत्र का उपयोग क्यों किया जा सकता है। मैं यह देख पाने में उसकी मदद करने में बहुत सफल नहीं रही हूँ कि वर्ग आयत का एक विशेष रूप है जिसमें आयत के सभी गुण तो बने ही रहते हैं, साथ ही एक अतिरिक्त गुण भी होता है कि उसमें सभी भुजाएँ समान होती हैं। वह काउंटर तर्क करती है कि यदि वे एक ही थे, तो दोनों सन्दर्भों में दो अलग-अलग सूत्र क्यों थे। हालाँकि आने वाले वर्षों में, ज्यामिति के सन्दर्भ में, वर्ग व आयत और कई अन्य चतुर्भुजों के बीच सम्बन्ध का पता

लगाया जाएगा, फिर भी हम सूत्रों को आधार के रूप में उपयोग करके क्षेत्रफल और परिमाप जैसी अवधारणाओं के शिक्षण की सीमाओं को देखना शुरू करते हैं।

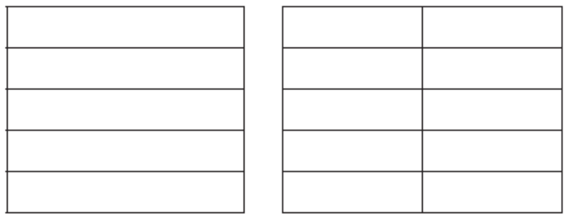
एक गणित शिक्षक होने के नाते, मैंने अपने काम को व्यवस्थित किया और एम को यह सिखाने का फ़ैसला किया कि इस तरह की सरल रेखीय आकृतियों का क्षेत्रफल और परिमाप क्या होता है। परिमाप का शिक्षण सरल था, क्योंकि वह समझती थी कि परिमाप "सीमा का कुल माप" है जिसे एक सरल रेखीय आकृति के लिए सभी भुजाओं की लम्बाई को जोड़कर पाया जा सकता है, और किसी गोल आकृति के मामले में, हम सीमा के चारों ओर एक धागा लगाकर, और फिर स्केल की मदद से इस धागे की लम्बाई का पता लगा सकते हैं। इसलिए, क्षेत्रफल ही वह अवधारणा थी, जिस पर मेरा ज़्यादा ध्यान था।

क्षेत्रफल मापन का परिचय

मैंने विभिन्न प्रकार की अमानक इकाइयों का उपयोग करके लम्बाई, वज़न और आयतन के मापन के पुनर्अभ्यास के साथ शुरुआत की। यह प्रयास उसने पहले स्कूल या घर पर किए थे। इससे हमें उन चीज़ों के लिए जिन्हें हम माप रहे थे मापन के कई प्रकार, इकाई के चुनाव और मापन में अन्तर्निहित सिद्धान्तों को देखने में मदद मिली। उदाहरण के लिए, जब हम लम्बाई को मापते हैं, तो हम निम्नलिखित अमानक इकाइयों में से किसी का उपयोग करते हैं : अंगुल, हाथ (कोहनी से बीच वाली उँगली के सिरे तक की दूरी), हाथ का पंजा, पैर का पंजा, काग़ज़ की पट्टी को बार-बार वस्तु के साथ रखना जब तक कि हम लम्बाई को नाप नहीं लेते। एम को याद था कि काग़ज़ की एक पट्टी को बिना अन्तराल छोड़े बार-बार इस्तेमाल करके किसी भी वस्तु को मापने के दौरान या तो वह पूरी तरह से वस्तु पर फिट आ जाती है या कभी-कभी माप (इस मामले में लम्बाई) की मात्रा निर्धारित करने के लिए कुछ उपायों जैसे कि पट्टी को लम्बाई के अनुसार अन्दर मोड़ने (एक पट्टी के भिन्नात्मक भाग) की आवश्यकता होती है। हमने इस कार्य को काफ़ी विस्तृत रूप में किया था। इसलिए उसे काग़ज़ का वह टुकड़ा स्पष्ट रूप से याद था जिसका उपयोग उसने अपने कमरे की अलग-अलग वस्तुओं जैसे बिस्तर, पढ़ने की मेज़, कुर्सी आदि को मापने के लिए किया था। वह पट्टी मोड़ने की इस प्रक्रिया को भिन्नों के साथ भी जोड़ सकती थी, इसलिए यह उसे पैमाने के विचार से परिचित कराने का एक अच्छा तरीक़ा था। कभी-कभी यह रहस्योद्घाटन उसकी आँखों में एक चमक और आश्चर्य पैदा करते और बतौर शिक्षक मैं इससे रोमांचित हो उठती। पर मेरा यह कहना नहीं है कि यह अन्तर्दृष्टि हमेशा उसके साथ रहती है।

अभ्यास का दोहराव यह समझने में उपयोगी था कि क्षेत्रफल भी आकृति की सीमा के अन्दर घेरे गए स्थान का मापन है और इसलिए हमें इसे मापने के लिए एक इकाई की पहचान करने की आवश्यकता है। अब अगला सवाल यह था कि यह इकाई क्या हो सकती है। एम ने कुछ दिन पहले ख़ाली घर के कारपेट एरिया के बारे में हमारे साथ हुई बातचीत को याद नहीं किया। उसने यह कहकर शुरुआत की कि हम काग़ज़ की पट्टियों का उपयोग एक इकाई के रूप में कर सकते हैं। पहली नज़र में उसके सुझाव से सहमत होते हुए, हमने चर्चा की कि काग़ज़ की

पट्टी कैसी दिखेगी। उसकी कल्पना में पट्टी की लम्बाई आयत के समान थी जो एक बड़े आयत (नीचे, चित्र 2 में दिखाया गया है) के भीतर दोहराया गया था। मैंने उससे पूछा : पट्टी का क्षेत्रफल क्या है? इस बात का अनुमान लगाते हुए कि मेरी आपत्ति पट्टी के आकार के लिए थी, उसने सुझाव दिया कि हम पट्टी को आधा कर सकते हैं। छोटी पट्टी के क्षेत्रफल के प्रश्न ने उसे परेशान कर दिया, क्योंकि उसे एहसास था कि पट्टी कितनी भी छोटी कर दी जाए, फिर भी हमें पट्टी के क्षेत्रफल को जानने की ज़रूरत है। और उसने कुछ समय के लिए इसे छोड़ दिया।



चित्र-2

क्षेत्रफल को मापने के लिए इकाई को चुनने की ओर बढ़ना

इससे पहले कि वह इस स्थिति से बाहर निकले, मैंने सुझाव दिया कि अगर हम आयत को भरने के लिए इन पट्टियों के बजाय रेखा का उपयोग करें, तब? उसने इस सुझाव को आसानी से स्वीकार कर लिया। अब उसने काग़ज़ की सबसे पतली सम्भावित पट्टी को पा लिया था। मैंने उससे पूछा कि अब हम क्षेत्रफल को कैसे निकालेंगे। उसने कहा, "प्रत्येक रेखाखण्ड की लम्बाई ज्ञात करें, और उसे रेखाओं की संख्या से गुणा करें!" यह शायद आयत के क्षेत्रफल के सूत्र, जो हम सीखते हैं, के सबसे क़रीब है और इस बात के लिए कि हम क्षेत्रफल को प्राप्त करने के लिए आयत की लम्बाई और चौड़ाई का गुणा क्यों करते हैं, शायद बच्चों के दिमाग़ में यह तर्क हो सकता है। पक्के तौर पर उसने यह महसूस किया कि यह एक चुनौतीपूर्ण काम था क्योंकि समान आकार के एक आयत के अन्दर की जगह को भरने के लिए बहुत सारी रेखाओं की आवश्यकता होगी। वस्तु की लम्बाई निकालने के लिए उसने जिस तरह काग़ज़ की पट्टी को दोहराया था, उससे वह इस बात से भलीभाँति परिचित थी कि उनके बीच कोई गैप नहीं होना चाहिए।

मेरे और मेरी बेटी दोनों के लिए, इस चर्चा और खोज में यह एक महत्त्वपूर्ण बिन्दु था। क्षेत्रफल की माप के लिए हम जिस वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं, उसे बिना किसी प्रमाण या तर्क के सही मान लिया जाता है। हमें मापन के लिए एक इकाई की पहचान और उसका निर्माण करने की आवश्यकता है। लेकिन इससे पहले कि हम ऐसा कर पाते, मुझे क्षेत्रफल को मापने के लिए इकाई के रूप में रेखाओं का उपयोग करने की अवैधता को दिखाना था। तो, मैंने उससे पूछा कि बताओ कि रेखा क्या है। उसने तुरन्त मुझे वह परिभाषा दी जो उसने स्कूल में सीखी थी– रेखा सीधी होती है, जो दोनों दिशाओं में अनिश्चित दूरी तक बढ़ाई जा सकती है। लेकिन इस

बारे में यूक्लिडियन का महत्त्वपूर्ण विचार यह है कि रेखा में कोई चौड़ाई नहीं होती है, लेकिन दुविधा यह है कि स्कूल में इतनी जल्दी केवल एक रैखिक विमा पर ज़ोर नहीं दिया जाता है। और इसलिए रेखा के ठोस प्रस्तुतीकरण (भौतिक अभिव्यक्ति) जो हम अपनी कॉपी में बनाते हैं और आदर्श रेखा की अवधारणा के बीच का परस्पर विरोधाभास स्पष्ट है। वे रेखाएँ जो हम अपनी पेंसिल/ पेन (चाहे वह कितने भी नुकीले हों) के साथ खींचते हैं, आवश्यक स्थान को भर सकती हैं, और कुछ चौड़ाई लिए होती हैं, क्योंकि ग्रेफाइट पेंसिल की नोक काग़ज़ की सतह को खरोंचती है, लेकिन "आदर्श" रेखा में ऐसा नहीं होगा। मेरे लिए इस पहलू को समझाए बिना आगे बढ़ने का कोई सम्भव तरीक़ा नहीं था। यह जानकर वह हैरान रह गई। इसी तरह मैंने उसे बताया कि एक "आदर्श" बिन्दु विमारहित होता है, उसमें कोई लम्बाई, कोई गहराई, कोई ऊँचाई नहीं होती है। लेकिन काग़ज़ पर पेन या पेंसिल की मदद से बनाए गए बिन्दु को देखने से ऐसा लगता है कि बिन्दु में यह सब होता है।

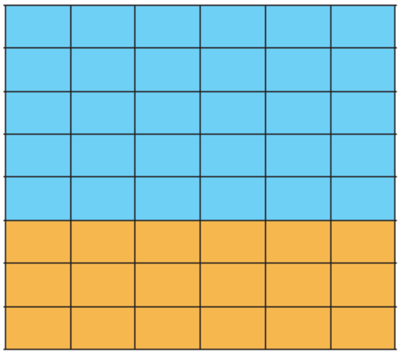
और फिर हम, यहाँ से आगे बढ़ते हुए इस बात पर चर्चा करने लगे कि क्या धागा, क्षेत्रफल के मापन की एक इकाई हो सकता है। इस बार उसने जल्दी ही कठिनाई का पता लगा लिया कि यह वास्तव में जगह तो भर देगा लेकिन हम धागे की मोटाई कैसे पता करेंगे। मैं उसे काग़ज़ की पट्टी वाले तरीक़े पर वापस ले आई, जो उसने शुरू में सुझाया था और हमें लगा कि यह एक बेहतर विकल्प है, सिवाय इस तथ्य के कि हमें पट्टी के क्षेत्रफल को खोजने के लिए किसी तरीक़े की आवश्यकता थी। लेकिन इस बीच, हम आयत के अन्दर पट्टियों को रख सकते थे और आयत के क्षेत्रफल को 10 आयत इकाइयों के रूप में बता सकते थे (जैसा कि ऊपर चित्र 2 में दिखाया गया है)। उस दिन हमारे बीच कुछ और बातचीत हुई, जो थोड़ी अजीब थी। जैसे, आयत के क्षेत्रफल को मापने के लिए हम कौन-कौन-सी आकृतियों को इसमें भर सकते हैं, परन्तु इस समझ के साथ कि हमें अन्ततः इन आकृतियों में से प्रत्येक के क्षेत्रफल को निकालना ही होगा। कुछ सामग्रियों जैसे छोटे दानों वाली धुली दालें, गोलाकार बटन, छोटे वर्ग और आयत को जमाकर मापन का काम करते हुए, उसने महसूस किया कि कुछ आकृतियों (वर्गों, आयतों) के दोहराव के साथ उनके बीच कोई स्थान नहीं छूटता है। जब वह क्षेत्रफल का मापन करने के लिए गोलाकार बटन का उपयोग करती थी, तब दो बटनों के बीच में कुछ ख़ाली स्थान छूट जाता था। यह स्थान तब भी छूट जाता था है जब दो बड़े गोलाकर बटनों के बीच में छूटे स्थान को भरने के लिए छोटे गोलाकार बटनों का इस्तेमाल किया जाए। दाल के दानों को बहुत पास-पास जमाया जा सकता है, परन्तु फिर भी उनके बीच में बहुत छोटे स्थान बच जाते हैं। इस बात को कहने के लिए यह एक अच्छा समय था कि आकृतियों को "टाइल" होना ही चाहिए, यह एक ऐसा विचार है जो हम स्पष्ट रूप से टेसीलेशन (tessellation – आकृतियों को एक-दूसरे के साथ इस तरह से जमाना कि उनके बीच में न तो कोई गैप रहे, न ही कोई ओवरलैप हो) में तलाशते हैं। वृत्तों को एक-दूसरे के साथ इस तरह सटाकर नहीं रखा जा सकता है कि उनके बीच में बिल्कुल जगह न बचे। इसी तरह से पंचभुज को भी तब तक सटाकर नहीं जमाया जा सकता है जब तक कि उनके बीच में हम विशिष्ट आयामों के साथ कुछ अन्य आकृतियों का उपयोग न करें। हम फुटपाथों पर टाइल्स की जमावट में ऐसे

कई उदाहरण देख सकते हैं। एम ने जल्दी से वर्ग टाइल्स के साथ बनाए गए एक नए फ़ुटपाथ को याद किया।

यह बातचीत हमें इस समझ की ओर ले गई कि सभी आकृतियों को क्षेत्रफल के मापन के लिए एक इकाई के रूप में इस्तेमाल नहीं किया जा सकता है। इसके लिए केवल आयत, वर्ग और समकोण त्रिभुज होने चाहिए (यदि दोनों समकोण त्रिभुज विषमभुज होंगे तो, उनमें से दो मिलकर एक आयत बनाएँगे और यदि वह समद्विबाहु होंगे, तो उनमें से दो मिलकर एक वर्ग बनाएँगे)। उस दिन के अन्त तक, हमने उन आकृतियों की पहचान कर ली थी, जो क्षेत्रफल मापन की एक इकाई के रूप में काम कर सकती हैं। मैंने एक बार फिर से उसका ध्यान कमरे के फ़र्श पर लगे वर्गाकार टाइल की तरफ आकर्षित किया। उसने यह देखने के लिए माप लिया कि 1 फ़ुट कितना होता है। टाइल 2 फ़ुट की भुजाओं वाला एक वर्ग था। अब हम टाइल को चार बराबर भागों में विभाजित करने की उसी समान स्थिति की ओर बढ़ रहे थे, जिसकी चर्चा पहले की गई थी। मैंने अब ऐसे ही पूछा, "1 फ़ुट की भुजा वाले छोटे वर्ग का क्षेत्रफल क्या है? " जवाब चकरा देने वाला था– "मुझे पता है कि सूत्र के साथ क्षेत्रफल को कैसे निकालना है, लेकिन यहाँ मैं कैसे ढूँढ़ूँ?" इस प्रश्न के जवाब के लिए उसे थोड़ा उकसाने और ठेलने पर उसने महसूस किया कि यहाँ भी सूत्र का उपयोग आसानी से किया जा सकता है। और यह भी कि हम स्कूल में जो कुछ भी सीखते हैं वह सिर्फ़ गणित की कॉपी में लिखने के लिए नहीं है, बल्कि बाहर की दुनिया के लिए भी है। इकाई लम्बाई वाले वर्ग के क्षेत्रफल को निकालने के बाद, उसने अचानक पूछा, "क्योंकि हम आकृति के अन्दर इकाई लम्बाई के वर्गों को जमा रहे हैं, क्या इसलिए हम क्षेत्रफल की इकाई को वर्ग-फ़ुट/वर्ग-सेंटीमीटर कहते हैं?" और उसने यह भी पता लगा लिया कि आकृति के अन्दर लगाए गए वर्गों की संख्या आकृति का क्षेत्रफल है। उस दिन उसे एक बड़े रहस्योद्घाटन का सामना करना पड़ा था, लेकिन क्षेत्रफल के इस सीखने को पूरा करने के लिए अब वर्गों के आस-पास अधिक ठोस बातचीत की आवश्यकता थी। यह सत्र आसानी से एक घण्टे से अधिक समय तक चलेगा।

इकाई वर्गों के साथ क्षेत्रफल और परिमाप के सूत्रों को जोड़ना

कुछ दिनों के बाद, मैंने समान आकार के छोटे वर्गाकार टाइलों से बने एक आयत के साथ बातचीत शुरू की। इस दौरान स्कूल में उसने आयतों और वर्गों के लिए क्षेत्रफल और परिमाप के लिए सूत्र लागू करने पर बहुत सारे अभ्यास प्रश्न किए थे। एक दृढ़ विश्वास यह भी था कि प्रश्न को हल करने से पहले सही सूत्र लिखना बहुत महत्त्वपूर्ण था। मैंने दो रंगों (नीले और नारंगी) की छोटी वर्गाकार टाइलों के साथ 6 × 8 आयाम के साथ एक आयत बनाया था, और उसका काम इस आयत के क्षेत्रफल और परिमाप (चित्र 3) को खोजना था।

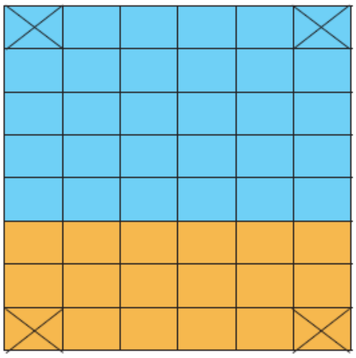


चित्र-3

अब तक स्कूल और घर पर कुछ काम के माध्यम से एम ने सीख लिया था कि क्षेत्रफल निकालने के लिए किसी को सिर्फ़ उस आकृति के अन्दर के वर्गों की संख्या गिनने की ज़रूरत है और परिमाप के लिए, उसे दी गई आकृति की भुजाओं की लम्बाइयों को जोड़ना होगा। हम वर्गों की भुजा को इकाई लम्बाई के रूप में उपयोग करने पर सहमत हुए थे और इसलिए हर वर्ग का क्षेत्रफल भी इकाई क्षेत्रफल था। उसने वर्गों की संख्या गिनकर आयत का क्षेत्रफल निकाल लिया जो कि, इस मामले में 48 वर्ग इकाई था। उसे वर्ग इकाई कहने में कुछ हिचकिचाहट थी और शायद वह इसे वर्ग मीटर, वर्ग सेंटीमीटर या वर्ग फुट के रूप में कहना पसन्द करेगी। मैंने यहाँ पर हस्तक्षेप किया और उसे बताया कि चूँकि हम वर्गों की सही लम्बाई नहीं जानते हैं, इसलिए हम इसे 1 इकाई कह सकते हैं, उसी तरह जैसे हमने लम्बाई मापने के लिए काग़ज़ की पट्टी को 1 इकाई के रूप में लिया था। वह अनिच्छा से सहमत हो गई। इसके बाद, उसने आयताकार सीमा में आए इकाई वर्गों की भुजाओं की गिनती करके परिमाप का पता लगाया। उसने ऐसा आयत की सीमा में प्रत्येक वर्ग को केवल एक बार गिनते हुए किया, जो कि 24 इकाइयाँ था।

यह समझने के बाद कि एम ने क्या किया है, मैंने उसे उन सूत्रों का उपयोग करने के लिए ज़ोर दिया जो उसने स्कूल में सीखे थे ताकि वह देखे कि क्या उसे यही क्षेत्रफल और परिमाप मिलेगा। उसने लम्बाई और चौड़ाई के साथ दिखाई देने वाले छोटे वर्गों के किनारों की गिनती करके आयत की लम्बाई और चौड़ाई का पता लगाया। उसने सही गिनती करते हुए इन्हें क्रमश: 6 और 8 पाया। आयत के क्षेत्रफल के सूत्र लम्बाई × चौड़ाई ($l \times b$) में इन मानों को रखने पर क्षेत्रफल 48 वर्ग इकाई आया। हालाँकि, इन मानों को परिमाप सूत्र में जो $2(l + b)$ था, रखने पर उसे परिमाप के रूप में 28 इकाइयाँ मिला। अब वह उलझन में थी। मैंने उसे इस बात का पता लगाने के काम के साथ छोड़ दिया कि परिमाप के दो परिणामों में से कौन-सा सही था। उसने एक बार फिर जाँच की कि क्या उसने आकृति की सीमा में वर्गों पर अपनी उँगलियों को धीरे-धीरे घुमाकर आयत की लम्बाई और चौड़ाई को सही ढंग से गिना है (चित्र 3 देखें)। फिर उसने धीरे-धीरे इसी काम को पुन: करके परिमाप की जाँच की ताकि वह विसंगति का कारण समझ सके। और निश्चित रूप से थोड़े समय में उसने पाया कि जब उसने सीमा में वर्गों के किनारों की गिनती करके परिमाप को खोजने का प्रयास किया था, तो वह कोने में स्थित वर्गों को केवल एक बार गिन रही थी। हालाँकि, आयत की लम्बाई और चौड़ाई का पता

लगाने के लिए कोने के प्रत्येक वर्ग को दो बार गिनना था एक बार लम्बाई की ओर, और दूसरी बार चौड़ाई की ओर। उसने इस समस्या को हल किया, यह दर्शाता है कि कोने के वर्गों को दो बार गिना जाएगा क्योंकि वह लम्बाई के साथ-साथ चौड़ाई में भी शामिल थे। (क्रॉस द्वारा चिह्नित कोने के वर्गों के लिए चित्र 4 देखें)।

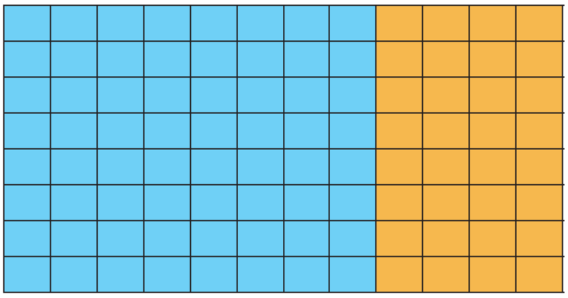


चित्र-4

मैं आगे यह देखना चाहती थी कि क्या अब वह आयत के क्षेत्रफल का पता लगाने के लिए एक आयत की लम्बाई और चौड़ाई को गुणा करने का कारण देख सकती है। यह आसान नहीं था। मैं उसे आयत में वर्गों की संख्या गिनने का कोई आसान तरीक़ा बताने के लिए प्रेरित करती रही। दुर्भाग्य से, उसने आयत को 6 छोटे वर्गों के 8 समूहों से बना नहीं देखा। उसे यह पहचानने में कुछ समय लगा कि वह वर्गों को 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 या 6 × 8 के रूप में सोच सकती है।

क्षेत्रफल और परिमाप के बीच सम्बन्धों की खोज

फिर हमने नीचे की ओर से कुछ वर्गों को हटाकर आयत को फिर से व्यवस्थित करने के बारे में सोचा। हमने प्रयत्न और त्रुटियों के ज़रिए ऐसा करना शुरू किया लेकिन इसमें बहुत समय लग रहा था और हम यह निश्चित नहीं कर पा रहे थे कि अलग आयाम वाले एक आयत बनाने के लिए हमें कितनी पंक्तियों को स्तम्भों में ले जाना है। आख़िरकार, हमें 48 के लिए कुछ गुणनखण्ड खोजने पड़े। हमने 12 × 4 को एक अच्छे विकल्प के रूप में पाया और नए आयत को नीचे (चित्र 5) दिए गए रूप में जमाया। एम ने एक बार फिर नए आयत के क्षेत्रफल और परिमाप को निकाला, परन्तु इस बार उसे उतनी दिक़्क़त नहीं हुई। अब क्षेत्रफल तो वही रहा था लेकिन परिमाप 32 इकाइयों में बदल गया था। वह देख सकती थी कि चूँकि हमने वर्गों की संख्या नहीं बदली है, केवल उन्हें फिर से जमाया है, इसलिए क्षेत्रफल में बदलाव नहीं होना चाहिए। लेकिन यह तथ्य, कि आयत के एक ही क्षेत्रफल के लिए उसका परिमाप बदल सकता है, हैरान कर देने वाला था। उसने यह भी सोचा कि परिमाप और क्षेत्रफल के बीच के अन्तर के लिए कुछ पैटर्न होना चाहिए, उसके दिमाग़ में शायद एक निश्चित अन्तर था, जिसे भी ग़लत ठहराया गया था।



चित्र-5

अब एक आकृति बनाने के लिए वर्गों को फिर से व्यवस्थित करने की उसकी बारी थी। क्षेत्रफल और परिमाप की नई विकसित होती समझ को देखते हुए, उसे अब छोटे वर्गों को एक आयत या वर्ग में पुनर्गठित करने के लिए विवश नहीं किया गया था। उसने एक अनियमित आकृति (चित्र 6 की तरह) बनाई, और उसने Y द्वारा चिह्नित एक वर्ग को हटाने का फ़ैसला किया। उसे यह स्पष्ट था कि क्षेत्रफल 1 इकाई कम हो गया था क्योंकि उसने एक वर्ग को हटा दिया था, लेकिन वह इस तथ्य से हैरान थी कि परिमाप वही 32 इकाइयाँ बना रहा। इसके अलावा, उसने X द्वारा चिह्नित एक और वर्ग को हटा दिया, इससे क्षेत्रफल एक इकाई और कम हो गया, लेकिन उसके आश्चर्य हुआ कि परिमाप एक बार फिर वही रहा। लेकिन इस बार, वह यह बताने में सक्षम थी कि यह क्यों हो रहा था। वह स्पष्ट रूप से बता पाई कि X को हटाने से जो दो भुजा-लम्बाई खोई थीं, उसकी पूर्ति उन दो नई भुजा-लम्बाइयों द्वारा की गई थी, जो कि X को हटाने के दौरान खुल गई थीं।

अन्त में

यह क्षेत्रफल और परिमाप से सम्बन्धित हमारी बातचीत का अन्त था। इस बातचीत के दौरान निर्मित उदाहरणों को देखने पर महसूस किया कि हमने एक समान क्षेत्रफल परन्तु अलग परिमाप वाले आयतों का निर्माण किया। साथ ही एक ही परिमाप परन्तु अलग-अलग क्षेत्रफल वाली अनियमित आकृतियों को भी बनाया। एम लम्बे समय तक इन कार्यों के साथ लगी रही और उसने बातचीत के दौरान उभरी चुनौतियों को हल करने की भरपूर कोशिश की।

हालाँकि, अभी भी बहुत सारी चीज़ें हैं जो शैक्षिक क्रम में और साथ ही साथ एम की समझ में भी स्पष्ट नहीं हैं जिनको विकसित करने का काम मैंने फ़िलहाल स्थगित कर दिया है। आयताकार पट्टी के विचार को मैंने गम्भीरता से क्यों नहीं लिया? मैंने उसे मापन के लिए आयतों के उपयोग करने से क्यों विचलित किया और इसके बजाय अपने ज्यामितीय विचारों को क्यों प्रस्तुत किया? यदि मैंने आयतों का उपयोग करके पूरे स्थान को भरा होता तो क्या होता? इकाई लम्बाई के वर्ग का उपयोग करके मैं क्या प्राप्त कर रही हूँ? तथ्य यह है कि हम सामान्यीकृत किए जा सकने वाले विचारों की तलाश कर रहे हैं, जो कि गणितीय सोच का एक मूल है। जब हम क्षेत्रफल के मापन के लिए इकाई वर्गों का उपयोग करते हैं, तो वर्ग का क्षेत्रफल अपने आप में 1 वर्ग-इकाई है, जो लम्बाई मापने के लिए 1 इकाई (या सेंटीमीटर या मीटर) की तरह है, जिसके अपने फ़ायदे हैं। हमें एक ऐसी इकाई खोजने की आवश्यकता है जो

हमें समन्वित रूप से आकृति की लम्बाई और चौड़ाई को मापने में मदद कर सके और 1 वर्ग-इकाई हमें ऐसा करने में मदद करती है, और एक आयताकार-इकाई हमें ऐसा करने में मदद नहीं करती है। हम अब इस इकाई का उपयोग विभिन्न प्रकार की आकृतियों के क्षेत्रफलों को मापने के लिए कर सकते हैं और यहाँ तक कि उन मामलों में भी जहाँ लम्बाइयाँ पूर्णांकों के साथ-साथ भिन्न भी हैं (इसके लिए हमें भिन्न और दशमलव के विचारों का उपयोग करने की आवश्यकता होगी)। मैं यह यक़ीन से नहीं कह सकती कि एम इसे समझती है, और मैंने उसे इसका पता लगाने के लिए पर्याप्त समय नहीं दिया। कुछ और दिनों के बाद मैंने उससे इस बारे में बात करने की कोशिश की। उसे दिखाया कि कैसे आयत का इस्तेमाल एक वर्ग को चिह्नित करने के लिए किया जा सकता है लेकिन इसने उसे ज़्यादा उत्साहित नहीं किया। इसलिए, मैं शायद इसे अगले साल तक के लिए स्थगित कर दूँगी।

राखी बनर्जी स्कूल ऑफ़ एजुकेशन, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में फैकल्टी हैं। वह एक गणित शिक्षक और शिक्षक-प्रशिक्षक रही हैं और उन्होंने स्कूलों और विश्वविद्यालयों में पढ़ाया है। उनकी रुचियों में प्राथमिक गणित की सामग्री की फिर से कल्पना करना, बच्चों की गणितीय सोच और तर्क क्षमता को बढ़ावा देना, कक्षा-कक्ष की पद्धतियों और ऐसा वातावरण जो बच्चों के सीखने का समर्थन करता है को बढ़ावा देने के लिए शिक्षकों की क्षमता को विकसित करना शामिल है। उनसे rakhi.banerjee@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही