Translation of Area of Dynamic Geometry Software_A Conjecture Making Tool : Jonaki Ghosh_From Azim premji University At Right Angles_ Vol.5, No.2_July 2020

गतिशील ज्यामिति सॉफ्टवेयर :

अनुमान लगाने का एक साधन

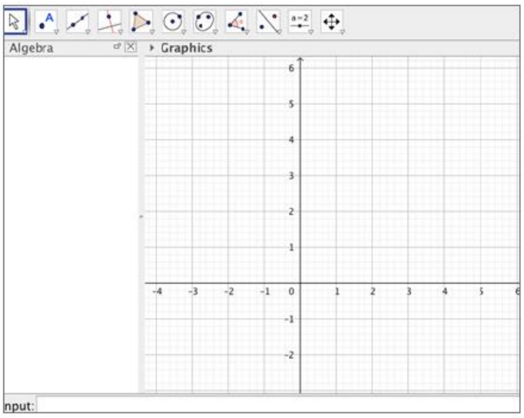
जोनाकी घोष

डिजिटल प्रौद्योगिकियों ने गणित सीखने-सिखाने के लिए कई सम्भावनाएँ प्रदान की हैं और यह गणित-शिक्षा में अनुसन्धान का एक प्रमुख क्षेत्र बन गया है। डिजिटल उपकरणों की एक विशेष कक्षा, जिसे गतिशील ज्यामिति सॉफ्टवेयर (Dynamic Geometry Software – DGS) के रूप में जाना जाता है, गणितीय अवधारणाओं की एक दृश्य-गतिशील (visual-dynamic) तरीक़े से पड़ताल करने की अनुमति देती है। एक DGS में, ज्यामितीय आकृतियों या आरेखों को ड्रैग किया जा सकता है और उनमें बदलाव किया जा सकता है और इस तरह उन्हें गतिशील बनाया जाता है। इन आकृतियों की 'गतिशीलता' बच्चों को स्थिर आकृतियों (जिनका अनुभव वे आमतौर पर किसी पारम्परिक ज्यामिति कक्षा में करते हैं) से बहुत अलग तरीक़े से गणितीय गुणधर्मों का अनुभव करने का अवसर प्रदान करती है। इस लेख में हम उदाहरण सहित समझाएँगे कि कैसे माध्यमिक स्कूल के बच्चों ने एक खुले स्रोत (open source) DGS, जियोजेब्रा, का उपयोग करते हुए त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग गुणधर्म (angle sum property : जो कि एक बुनियादी ज्यामितीय विचार है) का अनुभव किया। गतिशील ज्यामिति सॉफ्टवेयर को गतिशील ज्यामिति एनवायरनमेंट (DGE) भी कहा जाता है।

जियोजेब्रा के साथ शुरुआत करना

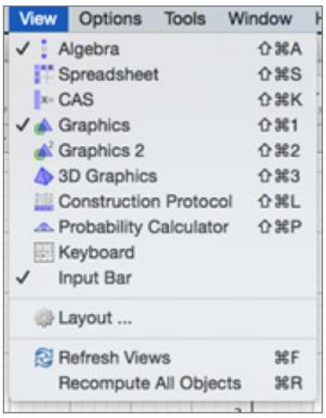
जियोजेब्रा उपयोगकर्ता को कई प्रस्तुतीकरणों का उपयोग करके गणितीय अवधारणाओं की पड़ताल करने में सक्षम बनाता है। इस लेख को पढ़कर आपको इस सॉफ्टवेयर को डाउनलोड करने और एक्सप्लोर करने की इच्छा हो सकती है। इस बात को ध्यान में रखते हुए सॉफ्टवेयर को डाउनलोड करने का तरीक़ा लेख के अन्त में दिया गया है।

जैसे ही जियोजेब्रा में कोई नई फाइल खोली जाती है, यह एक ग्राफिक व्यू, एक बीजगणित व्यू और विंडो के नीचे की ओर एक इनपुट बार प्रदान करता है (चित्र-1)।

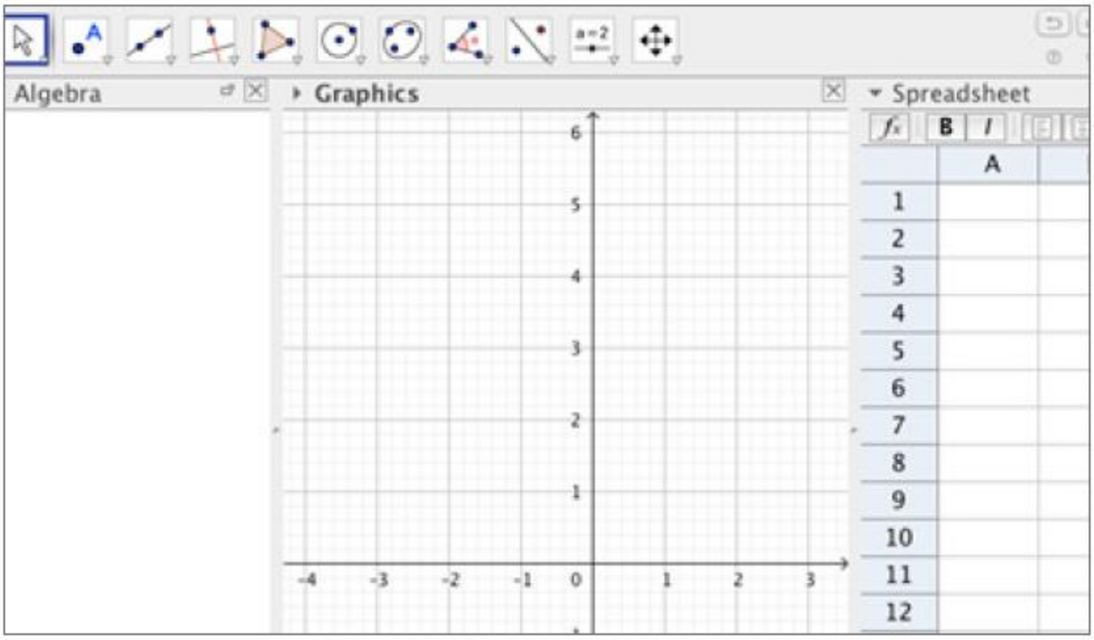


चित्र-1 : जियोजेब्रा की एक नई फाइल में ग्राफिक व्यू, एक बीजगणित व्यू और एक इनपुट बार

टूलबार पर व्यू विकल्प का उपयोग करके अन्य व्यू तक पहुँचा जा सकता है (चित्र-2 देखें)। उदाहरण के लिए, व्यू विकल्प से स्प्रैडशीट का चयन करके आप कोई स्प्रैडशीट भी ला सकते हैं (चित्र-3 देखें)। ज्यामितीय, प्रतीकात्मक और संख्यात्मक रूप से किसी आकृति के गुणधर्मों की पड़ताल करने के लिए ग्राफ़िक्स व्यू, बीजगणित व्यू और स्प्रैडशीट व्यू का एक साथ उपयोग किया जा सकता है।



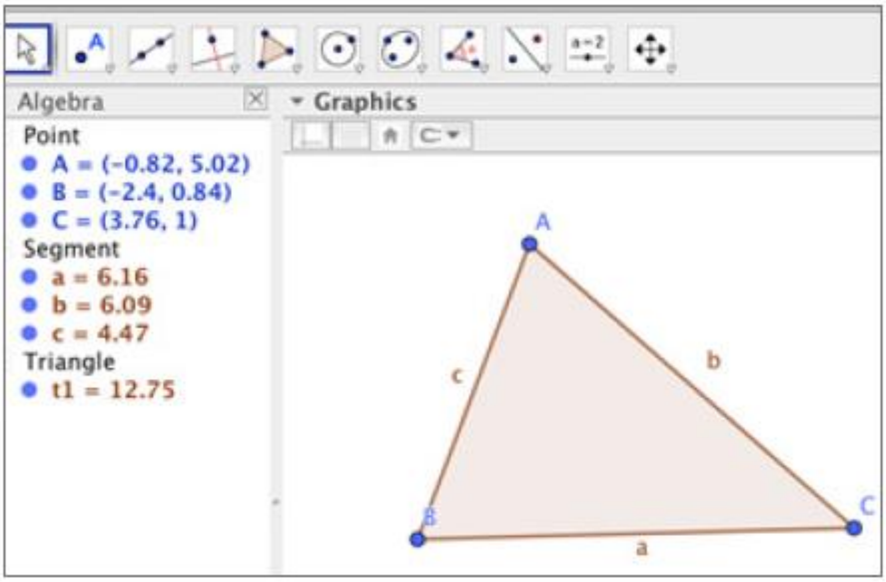
चित्र-2 : व्यू विकल्प उपयोगकर्ता को कई अलग-अलग व्यू को चुनने को मौक़ा देता है।



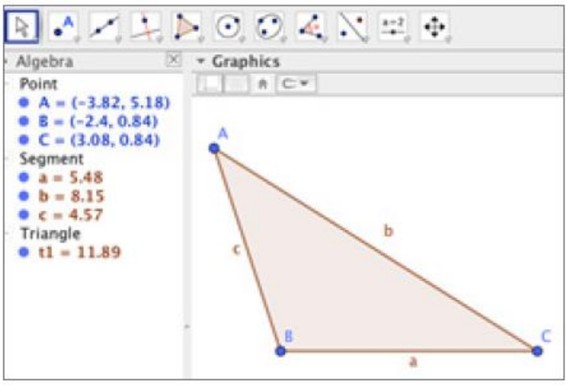
चित्र-3 : जियोजेब्रा की एक नई फाइल में ग्राफ़िक्स व्यू, बीजगणित व्यू और स्प्रैडशीट व्यू

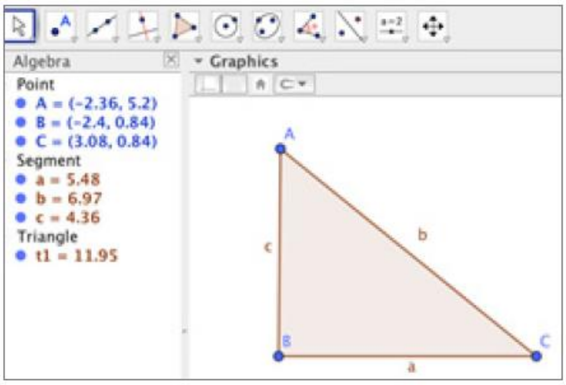
इसे बेहतर ढंग से समझने के लिए आइए जियोजेब्रा टूलबार के **पॉलीगॉन टूल** का उपयोग करके ग्राफ़िक्स व्यू में एक त्रिभुज बनाएँ, जैसा कि चित्र-4 में दिखाया गया है। (ऐसा करने के लिए, टूलबार से पॉलीगॉन आइकन चुनें और ग्राफ़िक्स व्यू पर क्लिक करें। जियोजेब्रा A के रूप में पहला बिन्दु चिह्नित करेगा। त्रिभुज बनाने की प्रक्रिया को आगे बढ़ाने के लिए दो अन्य स्थानों पर क्लिक करें। इन्हें बिन्दु B और C के रूप में चिह्नित किया जाएगा। त्रिभुज को पूरा करने के लिए, बिन्दु A पर वापस जाएँ और उस पर फिर से क्लिक करें। यह त्रिभुज ABC को पूरा करता है।) जियोजेब्रा तुरन्त बीजगणित व्यू में शीर्षों के निर्देशांक A, B, C, भुजाओं की लम्बाइयाँ *a*, *b*, *c* और त्रिभुज के क्षेत्रफल (जिसे t1 के रूप में दर्शाया गया है) को प्रदर्शित करता है। यह इस बात को दोहराता है कि त्रिभुज एक द्वि-आयामी समतल आकृति है, तल में बना एक बहुभुज क्षेत्र है। यह एक ऐसा पहलू है जिसे ब्लैकबोर्ड पर चॉक का उपयोग करके आकृतियों को चित्रित करते समय अक्सर उपेक्षित किया जाता है।

किसी एक शीर्ष, मान लीजिए कि A, को चुनने और उसे ग्राफ़िक्स व्यू पर ड्रैग करने से त्रिभुज के बारे में भिन्न-भिन्न अनुभव होंगे, जबकि बीजगणित व्यू में इसका माप बदलता जाएगा। चित्र-5, ड्रैग करके बनाए गए एक अधिक कोण त्रिभुज के साथ-साथ (लगभग) समकोण त्रिभुज को दर्शाता है।



चित्र-4 : पॉलीगॉन टूल का उपयोग करके बनाया गया एक त्रिभुज, जिसके भागों को बीजगणित व्यू में नामित और वर्णित किया गया है।





चित्र-5 : शीर्ष A को ड्रैग करके प्राप्त हुए त्रिभुज के भिन्न-भिन्न रूप

ड्रैगिंग एक उपकरण के रूप में

ड्रैगिंग फीचर शायद DGS का सबसे प्रभावशाली पहलू है। जियोजेब्रा में एक आकृति के कुछ हिस्सों को ड्रैग करते समय, बीजगणित व्यू के साथ-साथ ग्राफ़िक्स व्यू से पता चलता है कि आकृति के कुछ गुणधर्म बदलते हैं, जबकि कुछ अपरिवर्तित (invariant) रहते हैं।

ल्यूंग (2012) के अनुसार,

> "DGE की एक प्रमुख विशेषता ड्रैगिंग गतिविधियों से एक साथ उत्पन्न होने वाली विविधताओं के बीच ज्यामितीय अपरिवर्तनशीलताओं को दृश्य रूप में दर्शाने की इसकी क्षमता है... गतिशील छवि की विविधताओं को उन गुणधर्मों के विपरीत समझा जाता है जो उसी समय पर अपरिवर्तनीय रहते हैं।" (p2)

यह समझने में सक्षम होना कि क्या बदलता है और क्या अपरिवर्तनीय रहता है, एक गणितीय अवधारणा या गुणधर्म को अनुभव करने की कुंजी है। ज्यामितीय अन्वेषण करते समय बच्चों

को अनुमान लगाने में सक्षम बनाने के लिए इस महत्त्वपूर्ण विशेषता का फ़ायदा उठाया जा सकता है।

ल्यूंग (2003) बताते हैं :

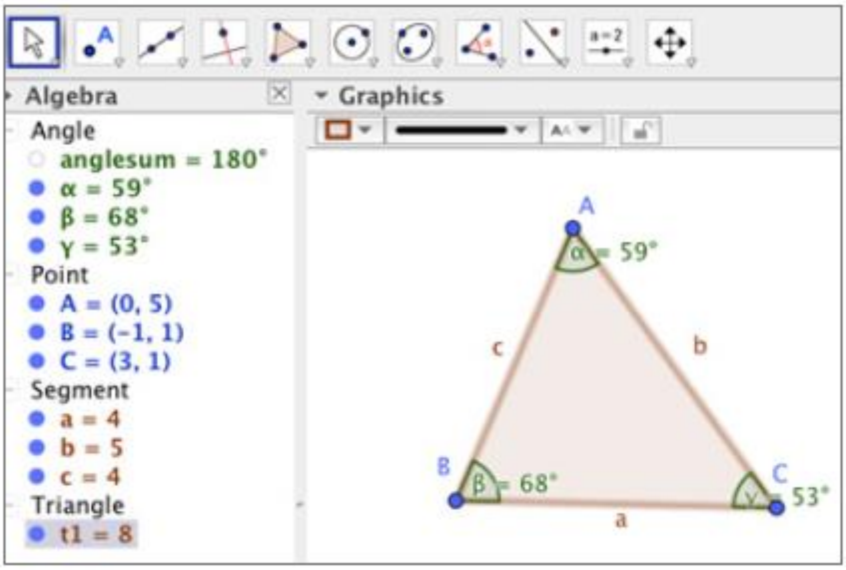
> “.....गणितीय गतिविधियों या तर्क में संलग्न होने पर, आप अक्सर ‘मानसिक एनीमेशन’ के द्वारा अमूर्त अवधारणाओं को समझने की कोशिश करते हैं। मानसिक एनीमेशन से आशय है अपरिवर्तनीय या बदलने वाले गुणधर्मों के पैटर्न को ‘देखने’ की उम्मीद में वैचारिक वस्तुओं के रूपान्तरों की मानसिक कल्पना करना।” (p1)

इस पहलू को स्पष्ट करने के लिए आइए देखें कि कैसे कक्षा छह के बच्चों ने जियोजेब्रा में ड्रैगिंग फीचर का उपयोग करके त्रिभुज के अन्त:कोणों के योग गुणधर्म को समझा। नई दिल्ली के एक स्कूल में कक्षा छह के पैंतीस बच्चों को उनके पाठ्यक्रम में शामिल ज्यामितीय अवधारणाओं की पड़ताल करने के लिए एक उपकरण के रूप में जियोजेब्रा से परिचित कराया जा रहा था। शिक्षक ने उन्हें त्रिभुजों के बारे में पढ़ाया तो यह तथ्य सिद्ध करके बताया था कि त्रिभुज के तीनों अन्त:कोणों का योग 180° होता है। इसे एक गतिविधि के माध्यम से किया गया था। विद्यार्थियों को दिए गए विभिन्न त्रिभुजों के तीनों कोणों को (चाँदे के उपयोग से) मापकर उनका योग प्राप्त करना था। इस गतिविधि ने कुछ भ्रम पैदा किया, क्योंकि कुछ बच्चों के कोणों के माप पूर्ण संख्या में नहीं निकले थे, पर कोणों का योग 180° के क़रीब था। एक और गतिविधि में बच्चों को त्रिकोणीय कट-आउट दिए गए थे। इनके कोनों को काटकर उन्हें एक साथ रखकर एक ‘सरल कोण’ बनाने के लिए कहा गया था। इस तरह की दृश्य प्रस्तुतियों को अक्सर कक्षा में एक प्रमाण के रूप में माना जाता है। हालाँकि, इस बात पर ज़ोर दिया जाना चाहिए कि ऐसा मॉडल केवल त्रिभुज के अन्त:कोणों के योग गुणधर्म की कल्पना करने में मदद करता है और गणितीय अर्थ में यह एक प्रमाण नहीं है।

त्रिभुज के अन्त:कोणों के योग गुणधर्म की पड़ताल करने के लिए आगे बढ़ने से पहले विद्यार्थियों को जियोजेब्रा के बुनियादी ड्राइंग टूल्स से परिचित कराया गया था। उन्होंने जोड़ियों में काम किया और चित्र-5 में दिखाए अनुसार एक त्रिभुज बनाने के लिए **पॉलीगॉन टूल** का उपयोग किया। विद्यार्थियों के प्रत्येक जोड़े ने अपने-अपने त्रिभुजों के शीर्षों को ड्रैग किया और बीजगणित व्यू में हुए परिवर्तनों का अवलोकन किया। बाद के चरण में, उन्हें **एंगल टूल** का उपयोग करके त्रिभुज के कोणों को मापने के लिए कहा गया। इससे पहले, उन्हें **Options -> Rounding -> Decimal places** पर जाने का निर्देश दिया गया था ताकि दशमलवों में दिखाई देने वाले कोण की माप से बचा जा सके। टूलबार से **एंगल टूल** का चयन करने के बाद त्रिभुज के अन्दर किए गए एक क्लिक ने त्रिभुज के अन्दर के कोणों को उनके सम्बन्धित मानों के साथ α, β और γ के रूप में चिह्नित कर दिया। शिक्षक ने बच्चों को **anglesum** (कोणों का योग) नामक एक चर को परिभाषित करने और **इनपुट बार** में निम्नलिखित को दर्ज करने का निर्देश दिया :

$$\text{anglesum} = \alpha + \beta + \gamma$$

इस चरण के परिणामस्वरूप, बीजगणित व्यू में कोणों का योग = 180° दिखाई दिया (जैसा कि चित्र-6 में दिखाया गया है)।



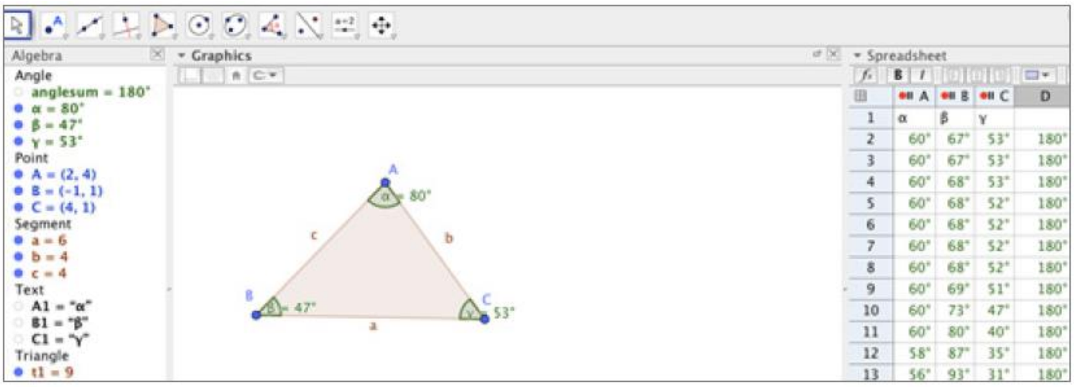
चित्र-6 : जियोजेब्रा बीजगणित व्यू में अन्त:कोणों के योग को 180° मापता है।

फिर बच्चों को अपने त्रिभुज के किसी शीर्ष को खींचकर बीजगणित के व्यू को दोबारा देखने के लिए कहा गया। इस बार बच्चों ने नोट किया कि उनकी स्क्रीन पर प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज के लिए कोणों का योग स्थिर (180°) रहता है, जबकि अन्य पहलू परिवर्तित होते हैं। भुजाओं की लम्बाई, कोणों की माप और त्रिभुज के क्षेत्रफल में परिवर्तन के बीच तीनों कोणों के योग के स्थिर रहने का अवलोकन करना उनके इस अनुमान का कारण बना कि $\alpha + \beta + \gamma$ का मान 180° होता है। हालाँकि बच्चों ने अन्य गतिविधियों के माध्यम से त्रिभुज के अन्त:कोणों के योग गुणधर्म की पड़ताल की थी, परन्तु जियोजेब्रा ने इस समस्या की पड़ताल का एक रोमांचक और अलग तरीक़ा प्रस्तुत किया। साथ ही, इस विचार को विकसित करने के लिए बहुत जल्दी कई सारे त्रिभुजों की जाँच करने में सक्षम होने के एक अतिरिक्त लाभ की पेशकश भी की।

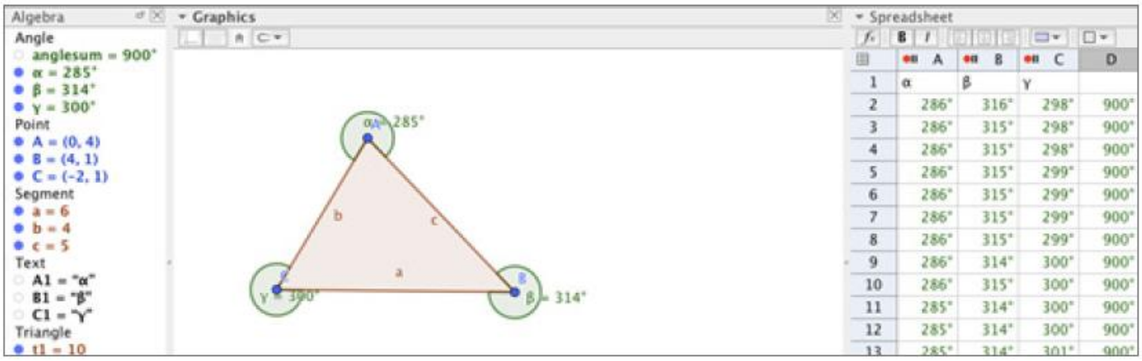
इस खोजबीन में एक और आयाम जोड़ने के लिए, शिक्षक ने बच्चों से एक स्प्रैडशीट खोलने को कहा। सेल A1, B1 और C1 में क्रमश: α, β और γ शीर्षक (header) डालने के बाद कॉलम A, B और C में क्रमश: α, β और γ कोणों के मान दर्ज किए गए।

प्रौद्योगिकी का उपयोग करके की जाने वाली पड़तालें अक्सर आश्चर्य का कारण बन सकती हैं। अपनी कक्षा में प्रौद्योगिकी का उपयोग करने वाली एक शिक्षिका को उनसे निपटने के लिए तैयार रहना चाहिए। बच्चों के जोड़ों में से एक ने अपनी जियोजेब्रा स्क्रीन पर चित्र-8 में दिखाए अनुसार एक आकृति प्राप्त की थी। **एंगल टूल** का चयन करने के बाद जब उन्होंने अपने त्रिभुज

के अन्दर क्लिक किया, तो जियोजेब्रा ने अन्त:कोणों के बजाय प्रतिवर्ती कोणों (reflex angles) को चिह्नित किया। ऐसा तब होता है जब त्रिभुज को घड़ी की विपरीत दिशा में खींचा जाता है। इस अप्रत्याशित आउटपुट ने सभी को आकर्षित किया। उन्होंने उत्सुकता से यह पता लगाने का प्रयास किया कि जियोजेब्रा ने इस आउटपुट को क्यों बनाया। इसके अलावा, उन्होंने त्रिभुज के शीर्षों को ड्रैग किया और अनुमान लगाया कि कोणों (प्रतिवर्ती कोणों) का योग 900° पर स्थिर रहता है। इसके बाद स्प्रैडशीट पर पड़ताल की गई, जिसने संख्यात्मक रूप से उनके अनुमान की पुष्टि की। चित्र-8 इस आउटपुट को दिखाता है।



चित्र-7 : बीजगणितीय, ग्राफ़िक और स्प्रैडशीट व्यू त्रिभुज के अन्त:कोणों के योग गुणधर्म को दर्शाते हुए।



चित्र-8 : बीजगणितीय, ग्राफ़िक और स्प्रैडशीट व्यू, यह दर्शाते हुए कि त्रिभुज के प्रतिवर्ती कोणों का योग 900° होता है।

इस प्रकार एक त्रिभुज के शीर्षों को ड्रैग करने से दो अपरिवर्तनीय परिणाम, अर्थात अन्त:कोणों का योग जो 180° के बराबर होता है और प्रतिवर्ती कोणों का योग जो 900° होता है, प्राप्त होते हैं। एक ही समय पर त्रिभुज के विभिन्न गुणों जैसे कि भुजा की लम्बाई, शीर्षों के निर्देशांक और क्षेत्रफल में परिवर्तन के साथ-साथ इन न बदलने वाले गुणों का मौजूद होना त्रिभुज के कोणों के योग गुणधर्मों के सम्बन्ध में अनुमान लगाने के लिए अत्यन्त महत्त्वपूर्ण था। शिक्षक ने कक्षा से नई खोज (प्रतिवर्ती कोण योग गुणधर्म के सम्बन्ध में) को सही ठहराने के लिए काम करने को कहा। क्या प्रतिवर्ती कोणों का योग हमेशा 900° होता है? यदि हाँ, तो क्यों? क्या तुम इसे समझा सकते हो? बच्चों को इस बारे में सोच-विचार करने में मदद के लिए, उन्होंने बताया कि त्रिभुज के किसी भी शीर्ष, मान लीजिए A, पर अन्त:कोणों और प्रतिवर्ती

कोणों का योग 360° के बराबर होता है। बच्चों ने तर्क को आगे बढ़ाया और निम्नलिखित स्पष्टीकरण पर पहुँचे :

> किसी त्रिभुज के अन्त:कोणों और प्रतिवर्ती कोणों का कुल योग 3 × 360° = 1080° होता है। अन्त:कोणों का योग 180° है, इसलिए प्रतिवर्ती कोणों का योग 1080°- 180° = 900° के बराबर होना चाहिए।

यह शिक्षक के लिए बहुत सन्तोषजनक था क्योंकि बच्चों ने एक नई खोज को सही ठहराने के अपने तर्क को इस्तेमाल किया था और वे पाठ को एक नए स्तर पर ले गए थे, भले ही शिक्षिका को इसकी उम्मीद नहीं थी या वह इसके लिए तैयार नहीं थीं।

DGS की प्रमुख विशेषताओं में से एक यह है कि यहाँ बच्चे ऐसे वातावरण में ज्यामिति सीखते हैं जिसमें अनुमान लगाया जा सकता है और जल्दी से जाँच की जा सकती है। बच्चे ड्रैगिंग के ज़रिए किसी आकृति के कुछ भागों को बदलने के दौरान अपने अनुमान का परीक्षण करने के लिए बीजगणित और स्प्रैडशीट व्यू का उपयोग कर सकते हैं। अपेक्षाकृत कम समय में बड़ी संख्या में उदाहरणों के साथ पड़ताल की जा सकती है और इससे ज्यामितीय आकृतियों के गुणों के बारे में सामान्यीकरण करने में मदद मिलती है। इस लेख में वर्णित त्रिभुज की पड़ताल के सरल कार्य में, बच्चों ने त्रिभुज के कोणों में एक पैटर्न का अमूर्तन किया व उसे सामान्यीकृत किया और त्रिभुज के अन्त:कोणों के योग गुणधर्म के सम्बन्ध में एक अनुमान लगाया। ज़ोल्टन डीन्स (1963) ने अमूर्तन और सामान्यीकरण की इस प्रक्रिया को गणितीय सोच के प्रमुख घटकों के रूप में समझाया था। उनके अनुसार, गणितीय शिक्षा अवधारणात्मक परिवर्तनशीलता सिद्धान्त (Perceptual Variability Principle) के साथ-साथ गणितीय परिवर्तनशीलता सिद्धान्त (Mathematical Variability Principle) पर आधारित है :

> "अवधारणात्मक परिवर्तनशीलता सिद्धान्त में कहा गया है कि किसी गणितीय संरचना के प्रभावी ढंग से अमूर्तन के लिए, उसके विशुद्ध संरचनात्मक गुणों को समझने के लिए आपको कई अलग-अलग स्थितियों में उस संरचना का अनुभव करना चाहिए। गणितीय परिवर्तनशीलता सिद्धान्त कहता है कि चूँकि प्रत्येक गणितीय अवधारणा में मूलभूत चर शामिल होते हैं, यदि हमें गणितीय अवधारणा की पूर्ण व्यापकता को सिद्ध करना है तो इन सभी गणितीय चरों का विविध होना ज़रूरी है।" (p.158)

अवधारणात्मक परिवर्तनशीलता सिद्धान्त (जिसे विविध मूर्त रूप सिद्धान्त - Multiple embodiment principle भी कहा जाता है) से पता चलता है कि बच्चे गणितीय अवधारणाओं को सबसे अच्छा तब सीखते हैं जब वे ठोस सामग्री और जोड़तोड़ के रूप में विभिन्न भौतिक परिस्थितियों के माध्यम से एक अवधारणा का अनुभव करते हैं। इस प्रकार, भिन्न ½ की अवधारणा को समझने के लिए गोलाकार कट-आउट, आयताकार छड़ें, मोती और काउंटर जैसी

विभिन्न भौतिक वस्तुओं का उपयोग कई तरीक़ों से भिन्न को दर्शाने के लिए किया जा सकता है। कक्षा छह के बच्चों द्वारा त्रिभुज की पड़ताल के सन्दर्भ में, चाँदे और त्रिकोणीय कट-आउट का उपयोग करके विभिन्न त्रिभुजों के कोणों को मापकर अन्त:कोणों के योग गुणधर्म का अनुभव करना, उन्हें कोणों के योग की अवधारणा की अवधारणात्मक परिवर्तनशीलता की ओर ले जाता है।

गणितीय परिवर्तनशीलता सिद्धान्त से पता चलता है कि किसी अवधारणा के अमूर्तन के लिए उस अवधारणा के अप्रासंगिक गुणों का भी अनुभव किया जाना चाहिए ताकि शिक्षार्थी सामान्य गणितीय अवधारणा को अलग करने में सक्षम हो सके। उदाहरण के लिए, एक वर्ग की अवधारणा के अर्मूतन के लिए शिक्षार्थी को यह समझने में सक्षम होना चाहिए कि भुजाओं का बराबर होना और सभी कोणों का समकोण होना एक वर्ग के प्रासंगिक अपरिवर्तनीय गुण हैं, जबकि भुजा की लम्बाई और उनका अभिविन्यास प्रासंगिक नहीं हैं। इसलिए जब गणितीय परिवर्तनशीलता के माध्यम से एक वर्ग का अनुभव किया जाता है, तो व्यक्ति अलग-अलग लम्बाई की भुजाओं और अलग-अलग अभिविन्यास वाले वर्गों को देख सकता है, जिनमें सभी में बराबर भुजाओं और समकोणों का उभयनिष्ठ गुण होता है। त्रिभुज की पड़ताल के सन्दर्भ में लौटते हुए, जियोजेब्रा ने बच्चों को त्रिभुज की गणितीय विशेषताओं जैसे कि भुजाओं की लम्बाई और कोण (जो कि अप्रासंगिक गुण हैं) को बदलने दिया और यह देखने में मदद की कि कोणों का योग (अन्त:कोण और प्रतिवर्ती कोण दोनों) अपरिवर्तनीय रहता है। इससे उन्हें इस धारणा को जल्दी से समझने और सामान्यीकरण करने में मदद मिली कि त्रिभुज के अन्त:कोणों का योग 180° होता है, जबकि प्रतिवर्ती कोणों का योग 900° होता है। इन परिणामों के औपचारिक प्रमाणों को आमतौर पर उच्च माध्यमिक स्तर पर परिचित कराया जाता है। बच्चों को व्यावहारिक पड़तालों के माध्यम से इन परिणामों (और इसी तरह के अन्य परिणामों) की कल्पना करने में मदद करने के लिए जियोजेब्रा का उपयोग किया जा सकता है। इस आलेख में सुझाए गए दृष्टिकोण का उपयोग करके पाठक यह जाँचने का प्रयास कर सकते हैं कि एक चतुर्भुज के अन्त:कोणों का योग 360° और प्रतिवर्ती कोणों का योग 1080° होता है और वह n भुजाओं वाले बहुभुजों के सामान्यीकरण की दिशा में कार्य कर सकते हैं।

इस लेख के माध्यम से, हमने यह समझाने की कोशिश की है कि जियोजेब्रा जैसे गतिशील ज्यामिति सॉफ्टवेयर का ड्रैगिंग फीचर बच्चों को ज्यामितीय आकृतियों के गुणधर्मों की पड़ताल करने में सक्षम बना सकता है। किसी आकृति के विभिन्न गुणों में परिवर्तन, भिन्नता के बीच उसके अपरिवर्तनीय गुणों को सामने लाता है। इसी वजह से यह अनुमान लगाने में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है। अनुमान लगाना ज्यामिति सीखने का एक महत्त्वपूर्ण पहलू है, क्योंकि यह तर्क और प्रमाण की पहली सीढ़ी है और गतिशील ज्यामिति वातावरण में बच्चों के लिए ऐसा करना आसान हो सकता है।

जियोजेब्रा को डाउनलोड करने के लिए निम्न तरीक़ा अपनाएँ :

Step 1: Go to https://www.geogebra.org/download

Step 2: Click on **App downloads** on the left hand side of the screen

Step 3: Scroll down to **GeoGebra Classic 5** on the right hand side of the screen and click on **Download**.

References

1. Dienes, Z. P. (1963). *An experimental study of mathematics-learning*. London: Hutchinson Educational.
2. Leung, A. (2003). *Dynamic Geometry and the Theory of Variation*, Proceeding of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 2003 Vol 3, pp 197-204.
3. Leung, A. (2012). *Discernment and reasoning in Dynamic Geometry Environments*, Selected Regular Lectures from the 12th International Congress on Mathematical Education, 20015, pp 451 - 469.

जोनाकी घोष लेडी श्रीराम कॉलेज, दिल्ली विश्वविद्यालय के प्रारम्भिक शिक्षा-विभाग में सहायक प्रोफ़ेसर हैं। वहाँ वे गणित-शिक्षा से सम्बन्धित पाठ्यक्रम पढ़ाती हैं। उन्होंने आईआईटी, कानपुर से स्नातकोतर और जामिया मिल्लिया इस्लामिया विश्वविद्यालय, नई दिल्ली से एप्लाइड मैथेमेटिक्स में पीएचडी की उपाधि प्राप्त की है। उन्होंने दिल्ली पब्लिक स्कूल, आरके पुरम में गणित शिक्षण के अलावा, गणित प्रयोगशाला और प्रौद्योगिकी केन्द्र की स्थापना की। उन्होंने एक फाउण्डेशन शुरू किया है जिसके माध्यम से वह गणित-शिक्षकों के लिए व्यावसायिक विकास कार्यक्रम संचालित करती हैं। गणित-शिक्षण में प्रौद्योगिकी के उपयोग पर शोध करने में उनकी विशेष रुचि है। वे गणित-शिक्षा पर इंडो-स्वीडिश वर्किंग ग्रुप की सदस्य हैं। वे नियमित रूप से राष्ट्रीय और अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलनों में भाग लेती हैं। उनके लेख पत्रिकाओं में प्रकाशित हुए हैं। उन्होंने स्कूली विद्यार्थियों के लिए किताबें लिखी हैं। उनसे jonakibghosh@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : निदेश सोनी
पुनरीक्षण एवं कॉपी-एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही