Translation of *Making a Skeletal Dodecahedron : Shiv Gaur* From Azimpremji University At Right Angles _March, 2013

कागज़ का खेल

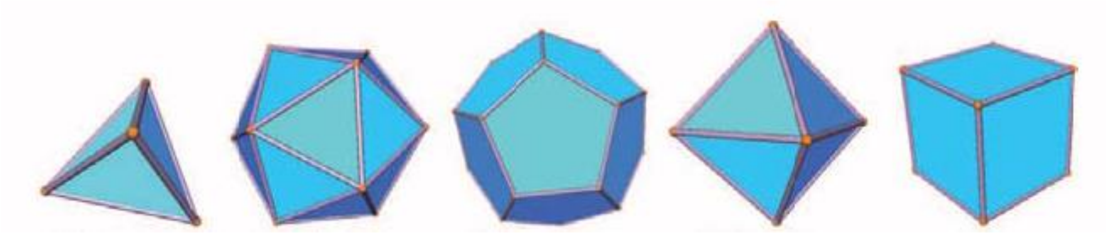
एक द्वादशफलक का ढाँचा बनाना

ठोस ज्यामिति का अनुभव

शिव गौर

शीर्ष, किनारे, फलक,... इनके बारे में बहुत कुछ कहा गया है और इनके बीच महत्त्वपूर्ण सम्बन्ध स्थापित किए गए हैं। लेकिन कोई भी विद्यार्थी द्विविमीय चित्र का उपयोग करके इन सम्बन्धों को कैसे समझ सकता है? अपने ख़ुद के मॉडल का निर्माण सीखने को एक सार्थक और अविस्मरणीय तरीक़े से व्यक्तिगत बनाता है। और कुछ भी इस अनुभव से बढ़कर नहीं हो सकता।

द्वादशफलक (dodecahedron) उन पाँच प्लेटोनिक या 'सम' बहुफलक (polyhedra) आकृतियों में से एक है जो ग्रीक काल से प्रचलित हैं। बाक़ी के 4 बहुफलक हैं – चतुष्फलक (4 त्रिभुजीय फलकों वाला), षटफलक (इसे छ: वर्ग फलकों वाला घन भी कहा जाता है), अष्टफलक (8 त्रिभुजीय फलकों वाला) और आइकोसाहेड्रन (20 त्रिभुजीय फलकों वाला)। द्वादशफलक में 12 पंचभुजीय फलकें होती हैं। इन पाँच बहुफलकों के चित्र यहाँ प्रस्तुत हैं (स्रोत : http://www.ma.utexas.edu/users/rgrizzard/M316L_SP1 /platonic.jpg)



चतुष्फलक आइकोसाहेड्रन द्वादशफलक अष्टफलक घन

इन सभी ठोसों के बारे में आकर्षक बात है इनकी उच्च स्तर की सममिति : इनकी फलकें सम बहुभुज हैं, एक-दूसरे के सर्वांगसम हैं और प्रत्येक शीर्ष पर समान संख्या में किनारे मिलते हैं।

तो किसी भी फलक के ऊपर से देखने पर बहुफलक 'समान ही दिखते' हैं। हम ऐसे प्रत्येक ठोस के साथ दो संख्याओं को सम्बद्ध कर सकते हैं : m, प्रत्येक फलक के सारे किनारों की संख्या और n, प्रत्येक शीर्ष पर मिलने वाले किनारों की संख्या (यह उस शीर्ष पर मिलने वाली फलकों की संख्या के समान होगी)। अत: एक चतुष्फलक के लिए $(m, n) = (3, 3)$, एक घन

के लिए (m, n) = (4, 3), एक अष्टफलक के लिए (m, n) = (3, 4), एक आइकोसाहेड्रन के लिए (m, n) = (3, 5) और एक द्वादशफलक के लिए (m, n) = (5, 3)। द्वादशफलक में बारह सर्वांगसम पंचभुजीय फलकें होती हैं और प्रत्येक शीर्ष पर 3 किनारे मिलते हैं।

यह संख्याएँ कुछ सममिति दर्शाती हैं जो इन पाँचों ठोस आकृतियों में देखने को मिलती है। घन और अष्टफलक एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं और एक-दूसरे के प्रतिरूप (dual) कहे जाते हैं। इसी प्रकार आइकोसाहेड्रन और द्वादशफलक एक-दूसरे से सम्बन्धित हैं। इन सबमें चतुष्फलक अकेला है, जो ख़ुद का ही प्रतिरूप है।

इस लेख में हम दर्शाएँगे कि पहले 30 एक समान मॉड्यूल (जो कि बुनियादी अंग हैं) बनाकर और फिर इन मॉड्यूलों को आपस में जोड़कर एक शानदार द्वादशफलक (का ढाँचा) कैसे बनाएँ। ऐसा करते हुए हम द्वादशफलक की प्रकृति के बारे में भी जानेंगे।

इस मॉड्यूल और डिज़ाइन के निर्माता तो ज्ञात नहीं हैं, पर यू-ट्यूब पर इस वीडियो को पहली दफ़ा मैंने जिस URL पर देखा था, वह है : http://www.youtube.com/watch?v=JexZ3NIaoEw

ज़रूरी सामग्री

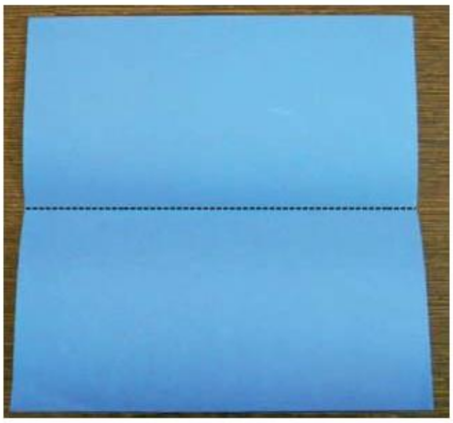
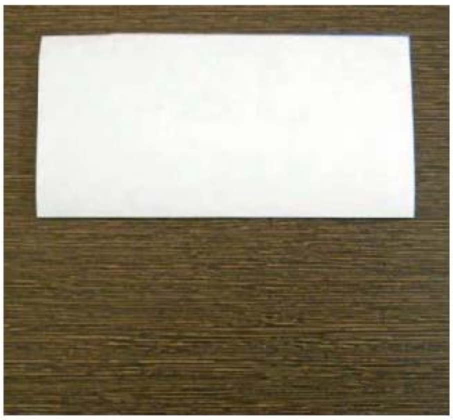
30 रंग-बिरंगी वर्गाकार शीट (ऐसे काग़ज़ का प्रयोग न करें जिसमें क्रीज़ न दिखे), पेपर क्लिप, स्टील का स्केल।

मॉड्यूल

वर्गाकार शीट से एक मॉड्यूल बनाने की विधि इस प्रकार है :

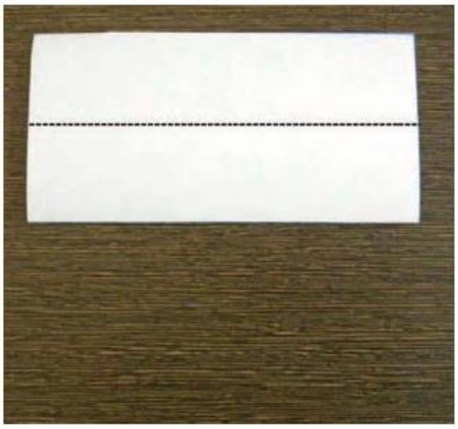
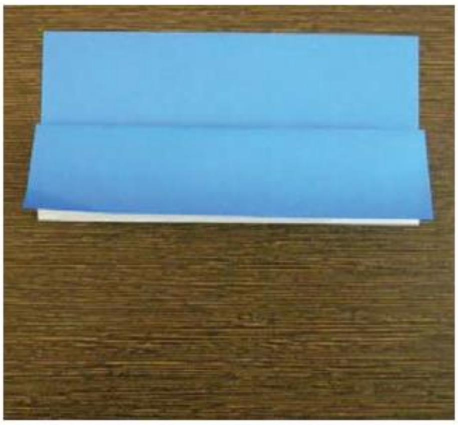
चरण 1

शीट की रंगीन सतह को ऊपर की ओर रखें और फिर इसका आधा भाग अन्दर की ओर मोड़ें, जैसे कि दाईं तरफ़ के चित्र में दर्शाया गया है।

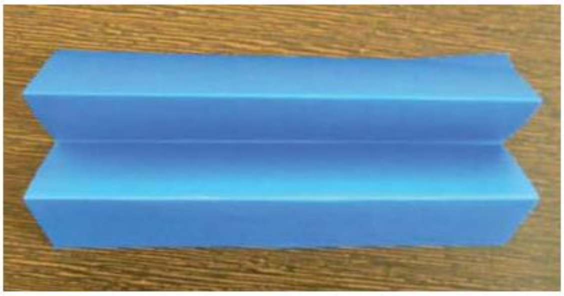
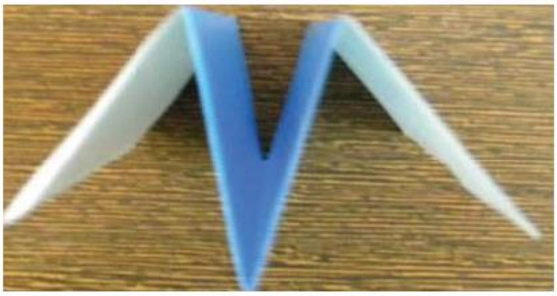
चरण 2

दोनों सतहों को बाहर की ओर आधा मोड़ें, जैसे कि दाईं ओर के चित्र में दर्शाया गया है।

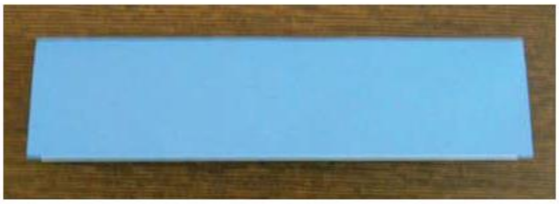
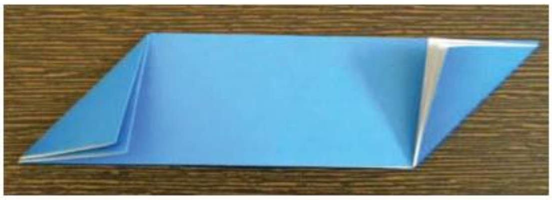
चरण 02 के पश्चात आपको जो आकृति मिलनी चाहिए उसका ऊपर और साइड से दृश्य।

(साइड से यह अक्षर M की तरह दिखता है)

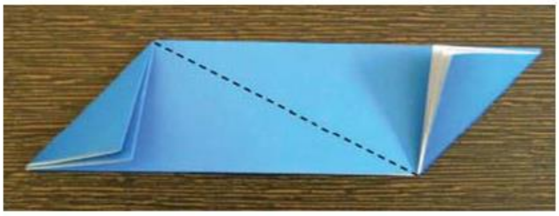
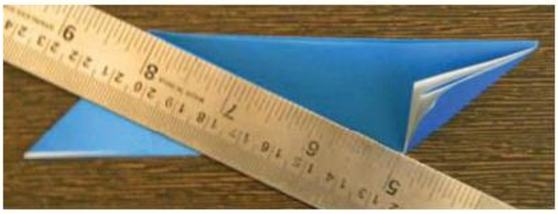
चरण 3

कोनों को अन्दर की ओर मोड़ें, जैसे कि दाईं ओर के चित्र में दर्शाया गया है।

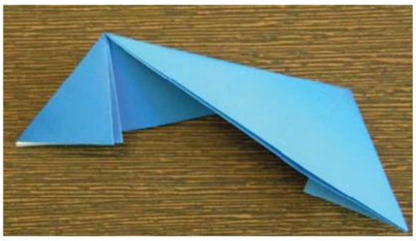
 

चरण 4

बिन्दुकित रेखा पर एक खाई मोड़ बनाएँ (प्रक्रिया की सटीकता और उसे जल्दी करने के लिए स्टील के स्केल का इस्तेमाल करना मददगार होगा)।

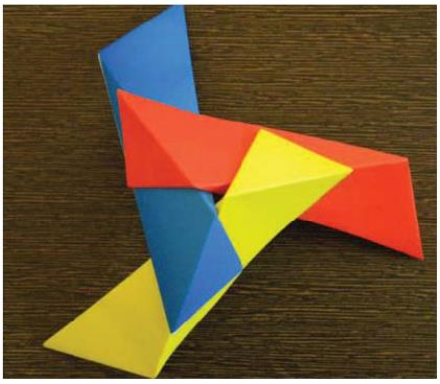
 

चरण 4 की समाप्ति पर अपेक्षित मॉड्यूल प्राप्त होता है (नीचे दिए गए चित्र में आप इस मॉड्यूल के दो दृश्य देख सकते हैं)।

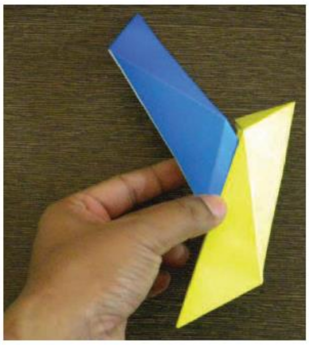


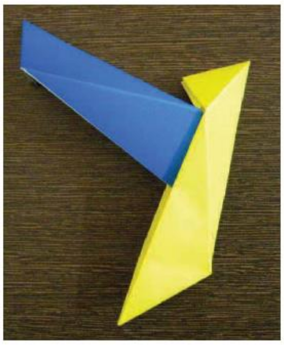
अलग-अलग रंगों के ऐसे 30 मॉड्यूल बनाएँ जैसा कि ऊपर चित्र में दर्शाया गया है।

जोड़ने की विधि

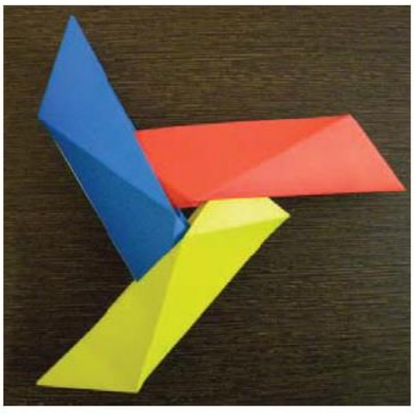


तीन मॉड्यूल लें और उनके कोनों को एक साथ रखें। यही प्रमुख बात है। हमें एक पर्वतनुमा आकृति बनानी है और इसके लिए इन तीन कोनों को अपने पड़ोसी रंगों की साइड पॉकेट में जाना चाहिए। इस प्रकार, नीला कोना पीले रंग की पॉकेट में जाएगा, पीला कोना लाल रंग की पॉकेट में जाएगा और लाल कोना नीले रंग की पॉकेट में जाएगा।



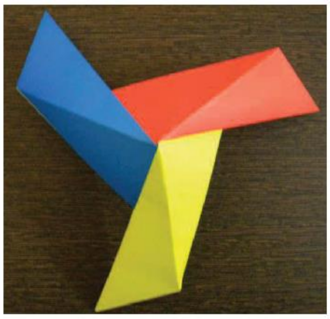


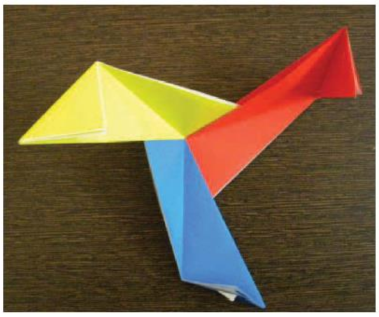
नीला कोना पीले रंग के पॉकेट में जाते हुए। यही प्रक्रिया लाल मॉड्यूल के लिए दुहराई जाएगी।



पर्वतनुमा आकृति पूरा होने को है।

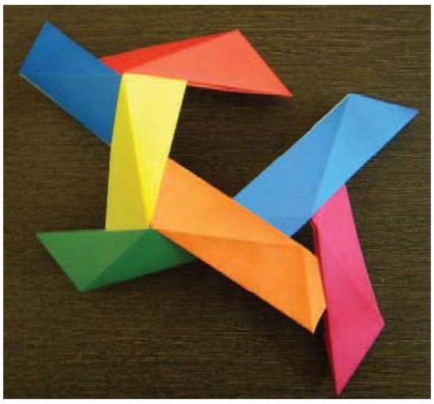
प्राप्त हुए डिज़ाइन के दो दृश्य इस प्रकार हैं :





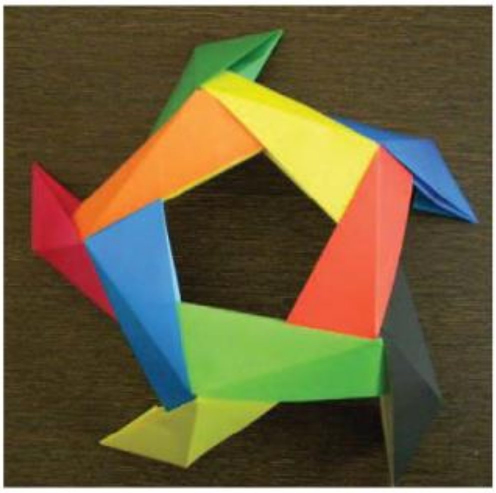
ऊपर का दृश्य नीचे का दृश्य

यहाँ से आगे हम **प्रत्येक अप्रयुक्त कोने** पर यही प्रक्रिया दुहराते हैं जब तक कि हमें एक **पंचभुज** न मिल जाए।



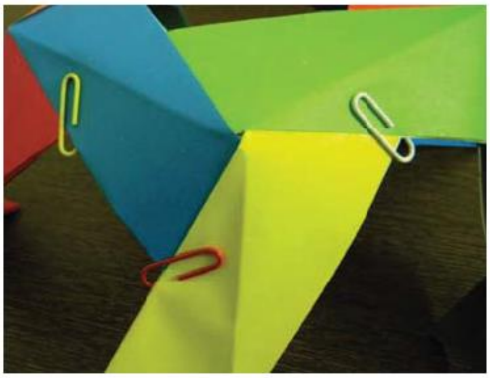
तीसरी पर्वतनुमा आकृति का निर्माण

पाँचवीं और आख़िरी पर्वतनुमा आकृति का निर्माण



अन्त में प्राप्त पंचभुजीय फलक का दृश्य (ऊपर से)

पंचभुजीय फलक का दृश्य (नीचे से)




इस स्तर पर यह अच्छा रहेगा कि कोनों को पेपर क्लिप की सहायता से जोड़ दिया जाए। पंचभुजों की प्रत्येक लम्बाई को इसी तरह जोड़ते चलें। आप देखेंगे कि एक वक्रता उभर रही है।

आधा बना हुआ

पूरा होने की कगार पर

अन्तिम पर्वतनुमा आकृति

और बन गया द्वादशफलक (दाईं ओर)।

सन्दर्भ

http://www.youtube.com/watch?v=JexZ3NIaoEw

शिव गौर ने बीएड और एमबीए की उपाधि प्राप्त की है। उन्होंने कॉर्पोरेट जगत में पाँच वर्षों तक कार्य किया। फिर उन्होंने सहयाद्रि स्कूल (केएफआई) में शिक्षण का कार्यभार सँभाला। वह

बारह वर्षों से गणित पढ़ा रहे हैं और वर्तमान में पाथवेज़ वर्ल्ड स्कूल, अरावली (गुरुग्राम) में गणित के आईजीसीएसई और आईबी पाठ्यक्रम पढ़ा रहे हैं। गणित-शिक्षण में प्रौद्योगिकी (डायनामिक जियॉमेट्री, कम्प्यूटर एल्ज़ेब्रा) के उपयोग में उनकी विशेष रुचि है। उनके लेख 'ओरिगेमि एण्ड मैथमेटिक्स' को पुस्तक *आइडियाज़ फॉर क्लासरूम* में शामिल किया गया था। यह पुस्तक ईस्ट वेस्ट बुक्स (मद्रास) प्राइवेट लिमिटेड द्वारा 2007 में प्रकाशित की गई थी। उन्हें आईआईटी मुम्बई में टाइम 2009 में वक्ता के रूप में आमंत्रित किया गया था। शिव एक शौक़िया जादूगर हैं और मॉड्यूलर ओरिगेमि में भी उनकी रुचि है। उनसे shivgaur@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र
पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही