

## किसी संख्या के अभाज्य गुणनखण्डों की पुनरावृत्ति

आर. रोहिणी लक्ष्मी

**मुख्य शब्द** : फलन, अभाज्य संख्या, अभाज्य गुणनखण्ड, भाज्य, पुनरावृत्ति

इस छोटे-से लेख में मैंने 1 से बड़े धनात्मक पूर्णाकों (यानी कि समुच्चय {2, 3, 4, 5, ...}) पर परिभाषित किए गए एक फलन  $f$  के व्यवहार का अध्ययन किया है, जबकि उसे अपने ही ऊपर बार-बार लगाया गया हो। इस फलन की परिभाषा इस प्रकार है। दिए गए किसी धनात्मक पूर्णांक  $n > 1$  के लिए हम  $f(n)$  की गणना कुछ इस तरह करेंगे। पहले हम जाँचेंगे कि  $n$  एक अभाज्य संख्या है या भाज्य संख्या। यदि  $n$  एक अभाज्य संख्या है, तो  $f(n) = n + 1$ । यदि  $n$  एक भाज्य संख्या है, तब हम  $f(n)$  को ऐसी सभी अभाज्य संख्याओं का जोड़ मानेंगे जो  $n$  को भाग देती हैं, जहाँ हर एक अभाज्य संख्या उतनी बार जोड़ी जाएगी जितनी बार वह  $n$  को भाग देती है। यह परिभाषा कैसे काम करती है इसे मैंने **सारणी-1** में दर्शाया है।

| $n$ | अभाज्य/भाज्य | अभाज्य<br>गुणनखण्ड | गणना        | $f(n)$ |
|-----|--------------|--------------------|-------------|--------|
| 5   | अभाज्य       | 5                  | $5 + 1$     | 6      |
| 6   | भाज्य        | $2 \times 3$       | $2 + 3$     | 5      |
| 7   | अभाज्य       | 7                  | $7 + 1$     | 8      |
| 8   | भाज्य        | $2^3$              | $2 + 2 + 2$ | 6      |
| 9   | भाज्य        | $3^2$              | $3 + 3$     | 6      |
| 10  | भाज्य        | $2 \times 5$       | $2 + 5$     | 7      |
| 12  | भाज्य        | $2^2 \times 3$     | $2 + 2 + 3$ | 7      |

|     |       |                  |                 |    |
|-----|-------|------------------|-----------------|----|
| 20  | भाज्य | $2^2 \times 5$   | $2 + 2 + 5$     | 9  |
| 100 | भाज्य | $2^2 \times 5^2$ | $2 + 2 + 5 + 5$ | 14 |

### सारणी-1

अब हम फलन की परिभाषा की पुनरावृत्ति करेंगे; यानी कि, हम किसी  $n$  से शुरुआत करेंगे, फिर  $f(n)$  की गणना करेंगे, फिर  $f(f(n))$  की गणना करेंगे, फिर  $f(f(f(n)))$  की और इसी तरह आगे भी गणना करेंगे। फिर हम प्राप्त परिणामों को एक क्रम में लिखेंगे। इसके परिणाम निश्चित रूप से आश्चर्यजनक निकलते हैं; कृपया **सारणी-2** देखें, जहाँ हमने  $n$  के विभिन्न मानों से प्राप्त परिणामों को दर्शाया है। हरेक स्थिति में, हमें अन्ततः ...5, 6, 5, 6, 5, 6... का ही क्रम मिलता है!

| प्रारम्भिक संख्या $n$ | परिणामों का क्रम : $n, f(n), f(f(n)), \dots$                  |
|-----------------------|---|
| 5                     | 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...           |
| 6                     | 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ...           |
| 7                     | 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ...           |
| 8                     | 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...           |
| 9                     | 9, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...           |
| 10                    | 10, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...          |
| 11                    | 11, 12, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ...         |
| 12                    | 12, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...          |
| 20                    | 20, 9, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ...          |
| 30                    | 30, 10, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ...         |
| 50                    | 50, 12, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ...         |
| 100                   | 100, 14, 9, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...        |
| 1000                  | 1000, 21, 10, 7, 8, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, ...      |
| 123456                | 123456, 658, 56, 13, 14, 9, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, 6, 5, ... |

## सारणी-2

आपने ध्यान दिया होगा कि सारणी 2 में हमने 5 से छोटी संख्याएँ छोड़ दी हैं, यानी कि हमने 2, 3 या 4 से मिलने वाले परिणामों का अध्ययन नहीं किया है। सारणी 3 इन स्थितियों में प्राप्त परिणामों को दर्शाती है।

| प्रारम्भिक संख्या $n$ | परिणामों का क्रम : $n, f(n), f(f(n)), \dots$     |
|-----------------------|--|
| 2                     | 2, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ... |
| 3                     | 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ... |
| 4                     | 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ... |

## सारणी 3

यह दोनों सारणियाँ दर्शाती (या सुझाती) हैं कि शुरुआती संख्या कुछ भी हो, परिणाम हमेशा या तो अन्तहीन अनुक्रम ..., 4, 4, 4, 4, ... या फिर अन्तहीन अनुक्रम ..., 5, 6, 5, 6, ... मिलता है।

इसको कैसे समझा जा सकता है?

रोहिणी लक्ष्मी पुष्पलता विद्यामन्दिर, तिरुनेलवेलि, तमिलनाडु की कक्षा 9 की छात्रा हैं। गणित में उनकी विशेष रुचि है। वह भरतनाट्यम और वाइलिन भी सीख रही हैं। वे टेनिस भी खेलती हैं। श्री विनय नायर द्वारा उनके विद्यालय में गणित शोधों पर किए गए एक सत्र के दौरान, उन्हें हैप्पी नम्बर्स पर कुछ खोजबीन करने का मौका मिला। इससे उन्हें पुनरावृत्ति पर अपने आप खोजबीन करने की प्रेरणा मिली, फलस्वरूप गुणनखण्डों की पुनरावृत्ति से सम्बन्धित यह अवलोकन सामने आया।

अनुवाद : उत्सव पटेल

पुनरीक्षण : यशवेन्द्र सिंह रावत

कॉपी एडिटर : कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही