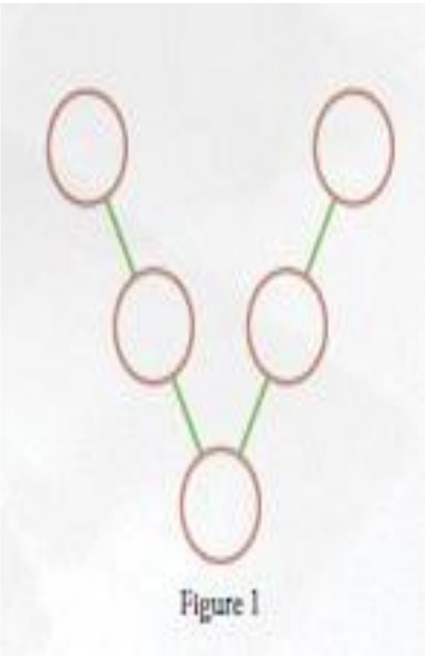
लो फ्लोर हाई सीलिंग टास्क (एलएफएचसी)

V का जोड़

मैथ स्पेस

सोचने के कौशल *पर आधारित पुलआउट लगातार हमारी पसन्द बना हुआ है, क्योंकि यह हमें सोचने के लिए बहुत सारी सामग्री उपलब्ध कराता है। इसके अन्तर्गत पहले से ही दो लेखों की एक सीरीज़ आ चुकी है जिसमें एलएफएचसी (बिन्दुकित वर्ग) और टीअर आउट शामिल है। यहाँ एक और एलएफएचसी प्रस्तुत है (जिसे हमने पोखरमा, बिहार के कक्षा 3-4 के बच्चों और तेलंगाना के शासकीय शिक्षकों के साथ आज़माया है)।*

चित्र 1 में दिखाए अनुसार पाँच गोलों वाली अँग्रेज़ी के V अक्षर की एक आकृति बनाएँ। अब 5 क्रमागत संख्याएँ लें। (उदाहरण के लिए– 13, 14, 15, 16, 17)



1. इन संख्याओं को V की दोनों भुजाओं में इस प्रकार जमाएँ कि दोनों भुजाओं का योगफल समान हो।

केन्द्र में (बीच में) कौन-सी संख्या है? हर भुजा में संख्याओं का योगफल क्या है?

(1) अब केन्द्र की संख्या को बिना बदले, क्या आप बाक़ी की संख्याओं को इस प्रकार फिर से जमा सकते हैं कि दोनों भुजाओं की संख्याओं का योगफल समान आए? क्या योगफल बदला?

(2) संख्याओं को आपस में बदलने के इस प्रकार के कितने तरीक़े हो सकते हैं?

चित्र -1

शिक्षक के लिए नोट : चुनी हुई 5 क्रमागत संख्याओं में तीसरे नम्बर पर आने वाली संख्या, V आकृति के केन्द्र में रखी जाने वाली संख्या के लिए स्वाभाविक पसन्द हो सकती है। शेष 4 संख्याओं को 2 समूहों में इस प्रकार बाँटा जा सकता है कि उनका योगफल समान रहे क्योंकि केन्द्र से समान दूरी पर स्थित संख्याओं का योगफल नियत होता है। (उदाहरण के लिए : 13 को केन्द्र में रखने पर, हमें 11 + 15 = 12 + 14 मिलता है)। इसे 2 तरीक़े से किया जा

सकता है। चूँकि हम बाईं और दाईं भुजाओं को भी आपस में बदल सकते हैं, इस कारण से यह तरीक़े दोगुने होकर 4 हो जाते हैं। केन्द्र की संख्या को नियत करने के बाद, प्रत्येक भुजा के हर गोले में प्रत्येक समूह की संख्या को रखने के दो विकल्प हो सकते हैं। इस तरह केन्द्र में समान संख्या को रखते हुए भुजाओं के लिए संख्याओं को चुनने के कुल 8 तरीक़े हो सकते हैं। संख्याओं के इस समूह (11, 12, 13, 14, 15) के लिए यह आठ तरीक़े सम्भव हैं।

11 - 15 - 13 - 12 - 14	15 - 11 - 13 - 12 - 14	11 - 15 - 13 - 14 - 12	15 - 11 - 13 - 14 - 12
14 - 12 - 13 - 15 - 11	14 - 12 - 13 - 11 - 15	12 - 14 - 13 - 15 - 11	12 - 14 - 13 - 11 - 15

2. अब इन्हीं पाँच क्रमागत संख्याओं के साथ ऐसी और सम्भावनाओं को खोजिए, परन्तु केन्द्र में आने वाली संख्या को बदलकर।

    (1) अब केन्द्र में कौन-सी संख्या है? क्या योगफल बदला? कितना?

    (2) क्या कोई और संख्या केन्द्र में आ सकती है? अब इसके लिए कुल योगफल क्या है?

    (3) क्या कुछ संख्याएँ ऐसी भी हैं, जो कभी भी केन्द्र में नहीं आ सकती हैं? क्यों?

शिक्षक के लिए नोट : इन पाँच क्रमागत संख्याओं में पहली, तीसरी और पाँचवीं संख्या को केन्द्र में रखा जा सकता है। उदाहरण के लिए पाँच लगातार आने वाली संख्याओं के इस समूह (11, 12, 13, 14, 15) के लिए केन्द्र में आने वाली संख्याएँ 11, 13 और 15 हो सकती हैं। केन्द्र में आने वाली संख्या और साथ ही क्रमागत संख्याओं के कारण योगफल बदल जाता है।

दूसरी और चौथी संख्या को हम केन्द्र में नहीं रख सकते हैं। किन्हीं भी 5 क्रमागत संख्याओं के सभी सम्भावित संयोजनों को आज़माकर इस बात को परखा जा सकता है। परन्तु ऐसे किसी समूह का सामान्यीकरण करने के लिए हमें कुछ और बातों की ज़रूरत है। समता (parity) के साथ इससे निपटा जा सकता है। मान लो यदि हम दूसरी संख्या को केन्द्र में रख रहे हैं, तब बाक़ी की 4 संख्याओं में 3 संख्याएँ विषम और एक संख्या सम है (उदाहरण के लिए 11, 13 और 15 विषम संख्याएँ हैं, और 14 सम संख्या है) अथवा 3 सम और 1 विषम संख्या है (उदाहरण के लिए 8, 9, 10, 11, 12 में से यदि हम 9 को केन्द्र पर रखें तो 8, 10, 12 सम व 11 विषम संख्या है।) यदि इन 4 संख्याओं को दो समूहों में बाँटा जाए तो एक समूह का योगफल सम व दूसरे समूह का योगफल विषम संख्या होता है। इस कारण से दोनों भुजाओं का योगफल कभी भी समान नहीं आ सकता। इसलिए दूसरी संख्या को कभी भी केन्द्र में नहीं

लिया जा सकता है। इसी तरह से हम दिखा सकते हैं कि चौथी संख्या को भी केन्द्र में नहीं लिया जा सकता है।

3. उपरोक्त प्रक्रिया को अन्य पाँच क्रमागत संख्याओं के समूह के साथ करके देखें।

(1) अपने जाँच-परिणामों को इस तालिका में दर्ज करें।

(2) क्या आपको कोई पैटर्न दिखाई दिए? वह क्या हैं?

(3) यदि योगफल 72 हो तो क्या आप पता लगा सकते हैं कि किन पाँच क्रमागत संख्याओं को लिया गया है? तब केन्द्र में कौन-सी संख्या होगी?

(4) यदि योगफल 17 हो तो, कौन-सी पाँच क्रमागत संख्याएँ ली गई होंगी? तब केन्द्र में कौन-सी संख्या होगी? क्या होगा यदि योगफल 43 हो?

संख्याओं का समूह	**केन्द्र में आने वाली संख्या**	**योगफल**	**केन्द्र में आने वाली संख्या**	**योगफल**	**केन्द्र में आने वाली संख्या**	**योगफल**
9, 10, 11, 12, 13	9	**32**	11	**33**	13	**34**

शिक्षक के लिए नोट : हम निम्नलिखित बातों का अवलोकन करते हैं :

i.जो योगफल आ रहे हैं, वह क्रमागत संख्याएँ हैं।

ii.बीच वाला योगफल यानी कि केन्द्र में तीसरी संख्या को रखने पर मिलने वाला योगफल 3 का गुणज होता है।

iii.वास्तव में यह तीसरी संख्या का तीन गुना होगा।

अत: योगफल 3 x तीसरी संख्या – 1, 3 x तीसरी संख्या और 3 x तीसरी संख्या + 1 होते हैं।

4. पैटर्न का अनुसरण करना :

(1) मान लीजिए कि योगफल 12 हो तो, क्या आप पाँच क्रमागत संख्याओं का अनुमान लगा सकते हैं और केन्द्र में कौन-सी संख्या होगी?

(2) यदि योग 23 हो या फिर 16 हो तो क्या आप पिछले प्रश्न की भाँति इन्हें भी हल कर सकते हैं?

(3) इनसे क्या सामान्यीकरण (पैटर्न को पहचानना) किया जा सकता है?

शिक्षक के लिए नोट : 12 = 3 x 4, तब 4 केन्द्र की संख्या है और 5 संख्याओं में से तीसरी संख्या है। इसलिए वह 5 संख्याएँ 2, 3, 4, 5 और 6 हैं।

23 = 3 x 8 − 1, तब 5 क्रमागत संख्याओं में तीसरी संख्या 8 है। इसलिए संख्याएँ 6, 7, 8, 9 और 10 हैं। और संख्या 6 इनमें केन्द्र में है।

इसी तरह से 16 = 3 x 5 + 1, तब संख्या 5 कुल पाँच क्रमागत संख्याओं– जो कि 3, 4, 5, 6 और 7 हैं –में से तीसरी संख्या है और संख्या 7 केन्द्र में है।

यदि हम 5 संख्याओं को $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$ से दर्शाएँ तो हमें निम्न योगफल प्राप्त होते हैं, जो उपरोक्त बातों को बताते हैं। यहाँ ध्यान देने योग्य बात यह है कि यही परिणाम n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ के साथ भी सम्भव है।

केन्द्र में	योग
$n - 2$	$(n - 2) + (n - 1) + (n + 2) = 3n - 1$
n	$n + (n - 1) + (n + 1) = 3n$
$n + 2$	$(n + 2) + (n - 2) + (n + 1) = 3n + 1$

5. अन्य प्रकार की संख्याओं की खोज :

(1) इसमें क्या परिवर्तन होगा यदि आप 5 क्रमागत सम संख्याएँ लें?

(2) या 5 क्रमागत विषम संख्याएँ लें?

(3) क्या आप इसका भी सामान्यीकरण कर सकते हैं?

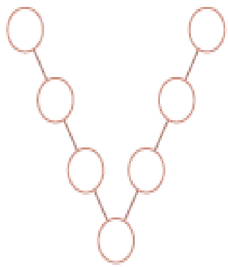
शिक्षक के लिए नोट : 5 क्रमागत सम संख्याओं के लिए $2n - 4$, $2n - 2$, $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ पर विचार करने पर हमें निम्नानुसार परिणाम प्राप्त होता है। विषम संख्याओं के लिए हम $2n - 3$, $2n - 1$, $2n + 1$, $2n + 3$, $2n + 5$ पर विचार कर सकते हैं।

सम		विषम	
केन्द्र में	योग	केन्द्र में	योग
$2n - 4$	$6n - 2$	$2n - 3$	$6n + 1$
$2n$	$6n$	$2n + 1$	$6n + 3$

$2n + 4$	$6n + 2$	$2n + 5$	$6n + 5$

किसी भी अंकगणितीय श्रेणी में 5 क्रमागत संख्याओं के लिए इसे सामान्यीकृत किया जा सकता है यानी कि $n - 2k$, $n - k$, n, $n + k$, $n + 2k$ इस तरह की 5 संख्याओं के लिए, किसी भी n, जहाँ पर $k = 1, 2, 3, ...$ हो, इसे सामान्यीकृत किया जा सकता है। इनके योगफल क्या हो सकते हैं यह हम पाठकों के हल करने के लिए छोड़ रहे हैं।

6. इसी तरह की सम्भावनाओं को चित्र 2 में बनी 7 गोलों वाली V आकृति में 7 क्रमागत संख्याओं के साथ खोजें और ध्यान रहे कि दोनों भुजाओं का योग एक समान हो।



चित्र-2

(1) संख्याओं के ऐसे समूह को आज़माएँ जिसकी शुरुआत विषम संख्या से होती है।

(2) केन्द्र में कौन-सी संख्या हो सकती है और क्यों?

(3) सम संख्या से शुरू होने वाले संख्या समूह के साथ इसी अभ्यास को दोहराएँ। क्या पैटर्न बदला? क्यों?

शिक्षक के लिए नोट : बीचोंबीच की संख्या यानी चौथी संख्या का केन्द्र में आना स्वाभाविक है। अभ्यासों से यह पता चलता है कि सबसे छोटी या सबसे बड़ी संख्या केन्द्र में नहीं हो सकती है। परन्तु, दूसरी, चौथी और छठवीं संख्याएँ केन्द्र में हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, यदि संख्याएँ 1, 2, 3, 4, 5, 6 और 7 हों तब 2, 4 और 6 केन्द्र में हो सकती हैं। इस समूह में 4 विषम और 3 सम संख्याएँ हैं। यदि एक विषम संख्या केन्द्र में है, तो शेष 3 सम व 3 विषम संख्याओं को जोड़ने पर एक विषम संख्या ही आती है, जिससे दोनों भुजाओं में योगफल बराबर नहीं किया जा सकता। इसलिए केन्द्र में एक सम संख्या ही होनी चाहिए। इसी तरह से यदि संख्याएँ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 हों तब 4 सम और 3 विषम संख्याएँ हैं। तब एक विषम संख्या को केन्द्र में रखा जा सकता है और शेष 4 सम और 2 विषम संख्याओं को समान योग

वाले दो समूहों में रखा जा सकता है। किसी भी स्थिति में 7 गोलों वाली V आकृति में दूसरी, चौथी और छठवीं संख्या को ही केन्द्र में रखा जा सकता है।

सम्भावित योगफल फिर से 3 क्रमागत संख्याएँ होती हैं, जिसमें बीच वाला योगफल 7 संख्याओं में से चौथी संख्या का 4 गुना होता है। उदाहरण के लिए 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 के लिए सम्भावित योग 15, 16 व 17 होते हैं जिनमें क्रमश: 2, 4 व 6 संख्याएँ केन्द्र में होती हैं। बीजगणितीय रूप से कहें तो यदि हम $n - 3$, $n - 2$, $n - 1$, n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$ संख्याओं को लें तब सम्भावित केन्द्र व उनके सम्बन्धित योगफल निम्नानुसार होते हैं।

केन्द्र में	योग
$n - 2$	$(n - 2) + (n - 3) + (n + 3) + (n + 1) = 4n - 1$
n	$n + (n - 3) + (n + 1) + (n + 2) = 4n$
$n + 2$	$(n + 2) + (n - 3) + (n + 3) + (n - 1) = 4n + 1$

तो यदि हम 7 क्रमागत सम संख्याएँ लें तब योगफल 3 क्रमागत सम संख्याएँ होंगी। और बीच वाला योगफल चौथी सम संख्या का चार गुना होगा। हम पाठकों को 7 क्रमागत विषम संख्याओं के योगफल की खोज के लिए प्रोत्साहित करना चाहेंगे।

7. क्या होगा यदि 9 गोलों वाली V आकृति में 9 क्रमागत संख्याओं को इस तरह रखना हो कि दोनों भुजाओं का योग एक समान हो?

    (1) केन्द्र में कौन-सी संख्याएँ हो सकती हैं?

    (2) केन्द्र की हर संख्या के लिए भुजा का योगफल कितना है?

    (3) हर केन्द्र के लिए संख्याओं को जमाने के कितने सम्भावित तरीक़े हो सकते हैं?

शिक्षक के लिए नोट : 9 गोलों के लिए भी हमें उसी तरह का पैटर्न मिलता है, जैसा हमें 5 गोलों के लिए मिला था यानी कि पहली, तीसरी, पाँचवीं, सातवीं और नौवीं संख्याओं को केन्द्र में रखा जा सकता है। इनके योगफल 5 क्रमागत संख्याएँ होती हैं जिसमें बीच वाला योगफल पाँचवीं संख्या का 5 गुना होता है।

केन्द्र की हर संख्या के लिए V आकृति में भरने के लिए हमें संख्याओं के ज़्यादा सम्भावित संयोजन मिलते हैं। यदि केन्द्र में पहली, पाँचवीं अथवा नौवीं संख्या हो तो शेष 8 संख्याओं में से 4 जोड़े समान योगफल वाले होते हैं। अत: इन 8 संख्याओं को दाईं व बाईं ओर के समूहों में रखने के (4/2) x 2 तरीक़े होंगे। हरेक समूह में इन संख्याओं को 4! प्रकार से जमाया जा सकता है। अत: इनमें से हर केन्द्र के लिए, V! को भरने के लिए (4/2) x 2 x $(4!)^2$ तरीक़े

होंगे। यदि केन्द्र में तीसरी या सातवीं संख्या है, तब शेष 8 संख्याएँ 4 जोड़ें बनाती हैं, जिसमें दो जोड़ों का योगफल कम व दो जोड़ों का योगफल अधिक होता है। इसलिए दाईं और बाईं भुजा को भरने के लिए कुल 2 x 2 x 2 = 8 तरीक़े होते हैं। तब हर समूहों के संयोजन को इकट्ठा करने पर आकृति V को भरने के लिए कुल 8 x $(4!)^2$ तरीक़े होते हैं।

8. किसी आकृति V के लिए, जिसमें $2m + 1$ गोले और $2m + 1$ क्रमागत संख्याएँ हों, जिसमें हर भुजा के लिए योगफल समान हो, यदि हम इसे सामान्यीकृत करें तब

   (1) यदि m सम है, तब प्रश्न 6 के a व b भाग के लिए आपको क्या उत्तर मिलता है, जबकि $m = 2k$?

   (2) यदि m विषम है, तब आपको क्या उत्तर मिलेगा जबकि $m = 2k + 1$?

शिक्षक के लिए नोट : सामान्यत: एकदम बीच में आने वाली संख्या यानी कि $(m + 1)$वीं संख्या हमेशा केन्द्र में हो सकती है। और $(m + 1)$वीं संख्या से हर दूसरी संख्या केन्द्र में हो सकती है। यदि m सम है, तब पहली, तीसरी, ... $(m + 1)$वीं संख्या, ... $(2m - 1)$वीं और $(2m + 1)$वीं संख्याएँ केन्द्र में हो सकती हैं, यानी कि $m + 1$ विकल्प। यदि m विषम है, तब दूसरी, चौथी, ... $(m + 1)$वीं संख्या, ... $(2m - 2)$वीं और $(2m)$वीं संख्याएँ केन्द्र में हो सकती हैं, यानी कि m विकल्प। ध्यान रहे कि दोनों ही तरीक़ों में यह $2k + 1$ होता है।

चलिए हम $(2m + 1)$ क्रमागत संख्याएँ, जो कि $n - m, n - m + 1, ..., n - 1, n, n + 1, ... n + m$ हैं, लेते हैं। तब केन्द्र में आने वाली संख्याएँ यह हो सकती हैं–

- सम m के लिए $n - m, n - m + 2, ..., n - 2, n, n + 2, ... n + m$
- विषम m के लिए $n - m + 1, n - m + 2, ..., n - 2, n, n + 2,..., n + m - 1$

$(m + 1)$वीं संख्या, यानी कि n *केन्द्र में हो,* तक का योगफल $(m +1) \times n$ होता है। आइए देखते हैं कि केन्द्र की संख्याओं के साथ यह योगफल कैसे बदलता है। सभी $2m + 1$ क्रमागत संख्याओं $n - m, n - m + 1,..., n - 1, n, n + 1,... n + m$ का योगफल $(2m + 1) \times n$ होता है। अब, यदि कोई एक संख्या, मान लो कि x, केन्द्र पर है, तब शेष $2m$ संख्याओं का योगफल $(2m + 1)\ n - x$ होता है। यह योगफल आकृति V की दोनों भुजाओं में बराबर-बराबर बँट जाता है। तब हर भुजा को $\frac{1}{2}$ $[(2m + 1)\ n - x]$ मिलता है और x केन्द्र में होता है। तब प्रत्येक भुजा के लिए योग $\frac{1}{2}$ $[(2m + 1)\ n + x]$ होता है। नीचे बनी तालिका में केन्द्र और उससे सम्बन्धित योगफलों की एक सूची दी गई है। अतएव $2k + 1$ सम्भावित

योगफल भी क्रमागत संख्याएँ होती हैं, अर्थात सम व विषम दोनों m के लिए $(m + 1)n - k, \dots (m + 1)n - 1, (m + 1)n, \dots (m + 1)n + k$

केन्द्र x	कुल ½ $[(2m + 1)\ n + x]$
⋮	⋮
$n - 4$	$(m + 1)\ n - 2$
$n - 2$	$(m + 1)\ n - 1$
n	$(m + 1)\ n$
$n + 2$	$(m + 1)\ n + 1$
$n + 4$	$(m + 1)\ n + 2$
⋮	⋮

हमने पाया कि 5 संख्याओं के पूरे समूह को खोजने और उनमें से कौन-सी संख्या केन्द्र में होगी, केवल योगफलों से इसका पता लगाने के मामले में बीजगणित की ताक़त को दिखाने के लिए यह एक दिलचस्प खोज है। बाद में बीजगणित की ताक़त के द्वारा आगे के पैटर्न का पता लगाया जा सकता है व उन्हें सिद्ध किया जा सकता है। यह संख्याओं के योग (कुछ प्रतिबन्धों के साथ) की एक खोज से शुरू होता है, पर यह क्रमागत पूर्णांकों के योगफल और कुछ हद तक समान्तर श्रेणी पर भी प्रकाश डालता है। $2m + 1$ गोलों वाली किसी आकृति V पर समान्तर श्रेणी में $2m + 1$ संख्याओं के लिए इसका सामान्यीकरण आसानी से किया जा सकता है।

इसमें एक संयोजनात्मक चुनौती भी शामिल है कि संख्याओं के किसी दिए गए समूह के लिए कितने सम्भावित Vs को बनाया जा सकता है। हम अपने साहसी पाठकों को प्रेरित करना चाहते हैं कि वे एक सामान्य स्थिति के लिए आगे की खोज करें।

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में गणित की एक प्रयोगशाला है, जो कि विद्यालय, शिक्षकों, पालकों, बच्चों, विद्यालयीन शिक्षा और शिक्षक-प्रशिक्षकों के लिए काम करने वाले ग़ैर-सरकारी संगठनों के लिए काम करती है। यह गणित के लिए विविध शिक्षण-अधिगम सामग्रियों, उनके प्रसार और साथ ही इन सामग्रियों के कम क़ीमत के विकल्प, जिन्हें कबाड़ से बनाया जा सके, की सम्भावना की खोज पर काम करती है। जो गणित से डरते या यहाँ तक कि नफ़रत करते हैं, और साथ ही वह जो इसके साथ काम करना पसन्द करते हैं, मैथ स्पेस इस पूरे पटल के दोनों छोरों के साथ काम करती है। यह एक ऐसी जगह है जहाँ पर कई लोगों की साझी चर्चाओं से विचार पनपते और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से आप mathspace@apu.edu.in पर सम्पर्क कर सकते हैं।

अनुवाद : निदेश सोनी **पुनरीक्षण :** हृदय कान्त दीवान
कॉपी एडीटिंग : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही