

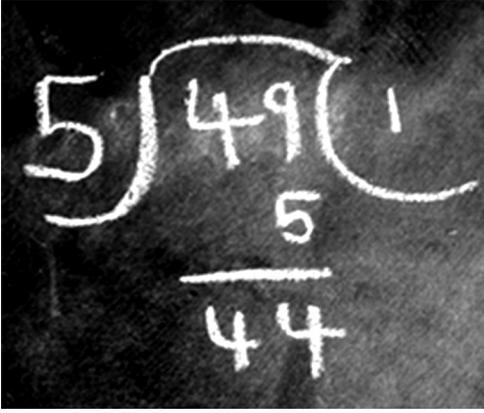
## भाग सीखने के तरीके

### पूजा

गणित की प्रारम्भिक अवधारणाओं में भाग की अवधारणा बच्चों के सामने कई मुश्किलें लेकर आती है। वे इसका अर्थ समझे बिना ही हल करने के चरणों को याद कर लेते हैं। परिणाम यह होता है कि परिस्थितियाँ बदलने पर वे सही ढंग से इसका उपयोग नहीं कर पाते। प्रस्तुत आलेख में लेखिका ने बच्चों के अनुभवों को आधार बनाकर उन्हें भाग की संक्रिया खुद से करने देने के कुछ उदाहरण प्रस्तुत किए हैं। बच्चे खुद तय करते हैं कि उन्हें क्या करना है, और फिर अपने काम की गणितीय प्रस्तुति भी करते हैं। यह आलेख कक्षा में भाग पर कुछ अलग ढंग से काम करने का एक आयाम प्रस्तुत करता है। सं.

लगभग पाँच सालों से मैं प्राथमिक शिक्षा में कार्य कर रही हूँ। इसके तहत मुझे कई विद्यालयों में जाने का मौक़ा मिला। गणित विषय में मेरी पहले से ही काफ़ी रुचि रही है, जिसके फलस्वरूप गणित में काम करने का ज़्यादा मौक़ा मिला। साथ ही गणित की एनसीईआरटी की पुस्तकें भी मैं समय-समय पर पढ़ती रही। एक दिन कक्षा 3 और 4 की गणित की पुस्तकें पलट ही रही थी कि भाग के एक खास तरीके पर नज़र पड़ी। इसमें भाग से जुड़े दो सन्दर्भों, 'बराबर बाँटने' और 'बराबर समूह बनाने', से जुड़े प्रश्नों के साथ ही इन सन्दर्भों से जुड़ती हुई एक विधि भी दी गई थी। यह विधि बाँटने के रोज़मर्रा के तरीकों से सीधे-सीधे मेल खाती थी। जैसे— 25 टॉफ़ियों को 5 बच्चों में बाँटने का तरीक़ा। हर बच्चे को पहले एक-एक टॉफ़ी दी जाए तो 5 टॉफ़ियाँ बँट जाएँगी और 20 रह जाएँगी। इसी तरीके से एक-एक करके टॉफ़ी और दी जाए। इस तरह से हर बच्चे को 5-5 टॉफ़ियाँ मिल जाएँगी। इस प्रक्रिया की मदद से भाग के एल्गोरिदम पर बच्चों के साथ काम करना मेरे लिए ज़्यादा चुनौतीपूर्ण रहा।

इतिफ़ाक़ से उन्हीं दिनों मुझे एक प्राथमिक विद्यालय में जाने का मौक़ा मिला। चूँकि लॉकडाउन के बाद, कुछ महीने पहले ही विद्यालय दोबारा खुले थे, अतः मेरी कक्षा में उस दिन कक्षा 3, 4 और 5 के बच्चे साथ-साथ बैठे थे। इस दौरान बुनियादी साक्षरता और संख्या ज्ञान (फ़ाउण्डेशनल लिटरेसी और न्यूमेरेसी) पर ज़्यादा काम चल रहा था। बच्चों से कुछ प्रारम्भिक बातचीत हुई। उन्हें संख्याओं व जोड़-घटाव की कितनी समझ थी, यह जानने के लिए कुछ अन्य बातचीत की गई और कुछ सवाल भी दिए गए। कक्षा 4 और 5 के अधिकतर बच्चे जोड़-घटाव से जुड़े सवाल कर पा रहे थे। कक्षा 3 के ज़्यादातर बच्चे इन सवालों को हल नहीं कर पाए तो थोड़ी बातचीत के बाद उन्हें जोड़-घटाव से जुड़े कुछ आसान सवाल दिए गए। कक्षा 3 के कुछ बच्चों और कक्षा 4 व 5 के बच्चों को गुणा-भाग से जुड़े कुछ अन्य सवाल भी दिए। बच्चों को ज़्यादा दिक्कत भाग के एल्गोरिदम को समझने में आ रही थी जिसे चित्र 1 में दिखाया गया है।



चित्र 1

इस सवाल को कुछ इस तरीके से रखा गया था :

“अगर 49 सिक्कों को 5 बच्चों में बराबर बाँटेंगे तो हर एक बच्चे को कितने सिक्के मिलेंगे और कितने सिक्के शेष बचेंगे जिन्हें बाँटा नहीं जा सकता?”

इसी प्रश्न के साथ भाग पर बातचीत शुरू हुई। यहाँ यह बात भी समझ में आ रही थी कि शुरुआत में छोटी संख्या ली जानी चाहिए जिसे आसानी से बाँटा जा सके। मसलन, 10 चॉकलेटों को 5 बच्चों में कैसे बराबर बाँटा जाए। शुरुआत की बातचीत बराबर बाँटने को लेकर ज़्यादा केन्द्रित थी। इसे सभी बच्चे बहुत अच्छे-से कर पा रहे थे। बच्चे एक-एक कर चॉकलेट बाँट रहे थे। जैसे— 10 चॉकलेटों को 5 बच्चों में बाँटने के लिए पहले पाँचों बच्चों को एक-एक चॉकलेट दी फिर पाँच बच गईं, तो फिर से पाँचों बच्चों को एक-एक चॉकलेट दे दी। ऐसा करते हुए हर बच्चे को 2-2 चॉकलेट मिलीं। धीरे-धीरे कुछ प्रश्न बच्चों की तरफ़ से भी आने लगे, जैसे—

“15 केले 4 लोगों में कैसे बाँटे जाएँ?”

“20 पेंसिलें 10 बच्चों में कैसे बाँटी जाएँ?”

ज़्यादातर सवाल बराबर बाँटने से जुड़े ही आ रहे थे, तो मैं भी अपने सवाल इनमें जोड़ रही थी :

“11 फूल हैं और इनसे माला बनानी हैं। एक माला में पाँच ही फूल लगाने हैं तो कितनी मालाएँ बन जाएँगी?”

इन प्रश्नों को बोर्ड पर भी लिखा गया। अब बारी थी इन्हें हल करने की। बच्चों ने जो सवाल बनाए थे उनमें से पहले सवाल से शुरुआत की गई।

कुछ बच्चे अपनी कॉपियों पर एक-एक कर बाँट भी रहे थे, लेकिन पाँचवीं कक्षा के कुछ बच्चे ऐसे थे जो 4 का पहाड़ा पढ़कर कुछ इस तरीके से सवाल हल कर रहे थे :

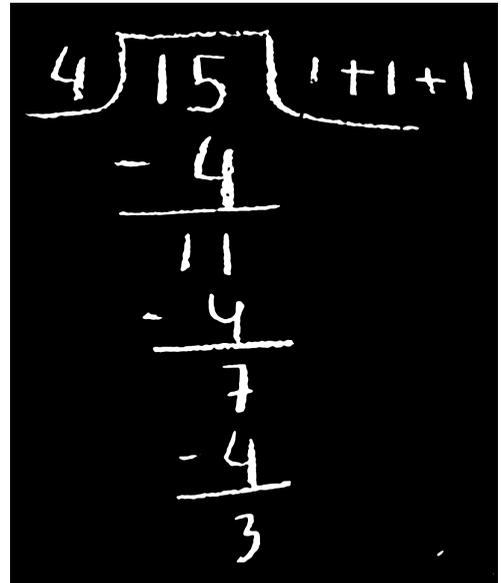
चार तियाँ बारा ( $4 \times 3 = 12$ )

तो चारों लोगों को तीन-तीन केले मिलेंगे और तीन शेष रह जाएँगे। इसी सवाल को एक बच्चा सूरज, बोर्ड पर भी लिख रहा था :

$4 + 4 + 4 = 12$  और तीन बच गए।

सूरज का यह तरीका चार-चार केलों के बराबर समूह बनाने की प्रक्रिया को प्रदर्शित कर रहा था।

मैं बोर्ड के दूसरी तरफ़ चित्र 2 के तरीके से इस सवाल को लिख रही थी।

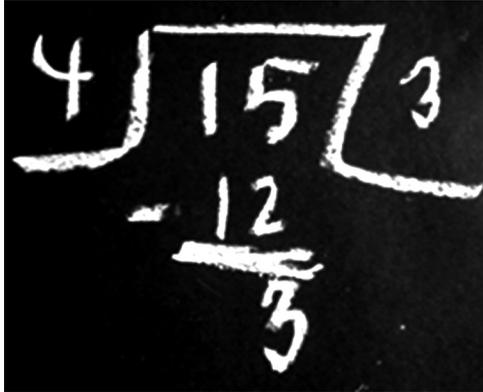


चित्र 2

पाँचवीं के आर्यन ने जब इस सवाल को गौर से देखा तो उसकी प्रतिक्रिया कुछ इस तरह थी :

“यह लग तो सही रहा है पर अजीब है।”

वह बोर्ड पर आया और चित्र 3 की तरह इसी सवाल को किया।



चित्र 3

कक्षा 3 के बच्चे चित्र 2 के तरीके को आसानी से स्वीकार कर रहे थे। इसका एक कारण यह भी था कि ये बच्चे लॉकडाउन से पहले कक्षा एक में थे जिसकी वजह से मानक तरीकों पर ज़्यादा काम नहीं हुआ था। मेरे द्वारा अपनाया तरीका उनके लिए आसान था। इसके विपरीत, कक्षा पाँच के बच्चे कलन जानते थे, और ऐसा लगता था कि वे उससे बँधकर जड़ हो गए थे। उनको अवधारणात्मक समझ नहीं थी, पर नए ढंग से सोचने की तैयारी भी नहीं थी।

यहाँ मुझे एक शिक्षिका द्वारा कही गई बात याद आ रही है। जब उनसे चित्र 1 पर बातचीत की जा रही थी तो उनका कहना था, “यह तरीका बच्चों को समझ में नहीं आएगा और वे कन्फ़्यूज़ भी होंगे। भले ही यह तरीका अपेक्षाकृत ज़्यादा सरल और कम अमूर्त है फिर भी बच्चे मानक तरीके को ही आसान मानते हैं।”

किन्तु यह स्पष्ट है कि अवधारणात्मक समझ बनाने में सवाल को अलग-अलग ढंग से करने में मदद मिलती है। सवालों को अलग-

अलग ढंग से करने पर एल्गोरिदम के विभिन्न चरणों को समझने में मदद मिलती है।

शायद इसी वजह से बार-बार कहा जाता है कि बच्चों को कोई विधि या नियम सीधे बता देने से बेहतर है उन्हें तर्कों के माध्यम से नियम तक खुद पहुँचने के मौक़े दिए जाएँ।

लेकिन गणित में सही तरीके का आतंक ऐसा है कि बच्चे मेरे द्वारा बताए तरीके को मान ही नहीं रहे थे। जब मैंने बच्चों को कक्षा 5 की किताब में यह अलग तरीका दिखाया तब उन्हें कुछ विश्वास हुआ कि भाग का सवाल कुछ फ़र्क़ तरीके से भी किया जा सकता है। हालाँकि इसके कुछ पहलू परेशान करने वाले भी हैं, जैसे-

कक्षा 4 की रिधिमा ने दोनों ही तरीकों को सही माना, पर उसका एक सवाल भी था :

“पहला वाला तरीका ज़्यादा आसान है पर जैसे 50 को 5 से भाग करेंगे तो लम्बा हो जाएगा।”

इस सवाल पर अभी चर्चा नहीं हो सकती किन्तु यह सवाल ही शायद एक ही कलन के इस्तेमाल की बाधकता बन जाता है।

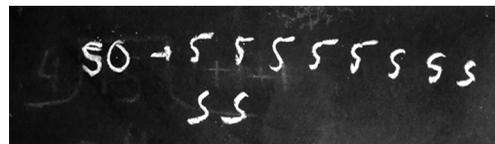
### भाग : कई तरीकों से बँटवारा

कक्षा में नीचे दिए सवाल पर काफ़ी चर्चा हुई।

“50 पतंगों को 5 बच्चों में कैसे बाँटा जाए या 50 को 5 से कैसे भाग दिया जाए?”

“सबके अपने-अपने तरीके हो सकते हैं।”

कक्षा 3 की काव्या ने कुछ इस तरीके से इस सवाल को किया :



चित्र 4

उसने कहा, “5-10 बार आया है।”

काव्या ने किया तो था पर वह थोड़ा कन्फ्यूज़ हो गई थी कि उत्तर क्या है। मैंने सवाल पर फिर से ज़ोर दिया :

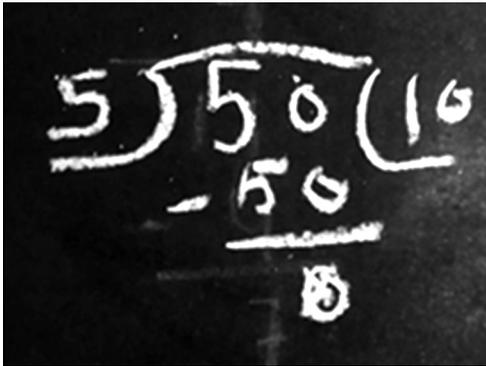
“50 तो पतंगें हैं और 5 बच्चे हैं। पाँचों बच्चों को बराबर पतंगें बाँटेंगे तो एक बच्चे को कितनी पतंगें मिलेंगी?”

काव्या ने कुछ सोचने के बाद कहा, “पाँचों को पहले एक-एक पतंग देंगे, फिर दो-दो पतंगें, फिर तीन-तीन... तो ऐसे में 10 पतंगें मिल जाएँगी।”

काव्या का यह जवाब उसके पहले वाले जवाब से अलग था। वह इस परिणाम तक कैसे पहुँची, यह मुझे बहुत स्पष्ट नहीं हो पाया। ऐसे मौकों पर मुझे लगता है कि बच्चों को ज्यादा अवसर दिए जाने चाहिए ताकि उनके भीतर चल रही विचार प्रक्रिया को समझा जा सके।

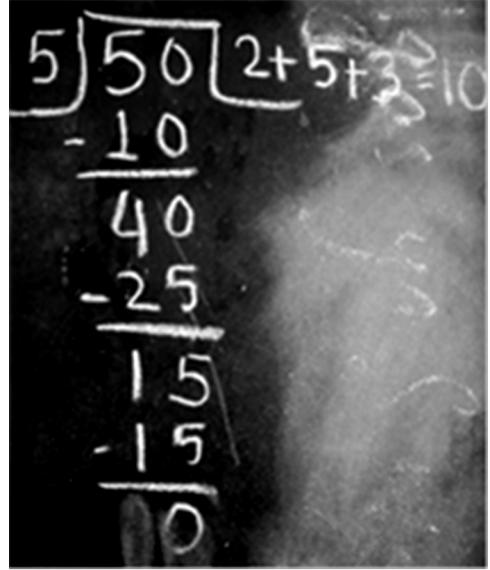
पर अभी आगे बढ़ा जाए, यह सोचकर काव्या का जवाब सबके सामने रखा गया। कक्षा 4 के रितिक ने इसपर कहा, “पाँच दसाँकी 50, तो हर किसी को 10-10 पतंगें मिल जाएँगी।”

इस तरीके पर सबने हामी भर दी। उसने इसे चित्र 5 के तरीके से हल किया।


$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 50} \\ \underline{-50} \\ 0 \end{array}$$

चित्र 5

में खुद भी बोर्ड पर ‘अलग’ तरीके (चित्र 6) से हल करने लगी :


$$\begin{array}{r} 5 \overline{) 50} \\ \underline{-10} \\ 40 \\ \underline{-25} \\ 15 \\ \underline{-15} \\ 0 \end{array}$$

2+5+3=10

चित्र 6

“50 पतंगों को 5 बच्चों में बाँटेंगे तो शुरुआत में कितनी पतंगें बाँटी जाएँ?”

“एक-एक बाँटें?”

“नहीं, दो-दो बाँटते हैं, 10 पतंगें बाँट जाएँगी।”

“पाँच दूनी दस पतंगें बाँट गईं। अब 40 पतंगें बची हैं।”

“अब कितनी-कितनी बाँटें?”

“पाँच-पाँच, पाँच पंजे पच्चीस पतंगें और बाँट गईं।”

“अब कितनी बच गईं?”

थोड़ा सोचने के बाद उत्तर आया, “15 पतंगें बच गईं। पाँच तियाँ पन्द्रह, तो अब तीन-तीन पतंगें फिर से बाँट दो।”

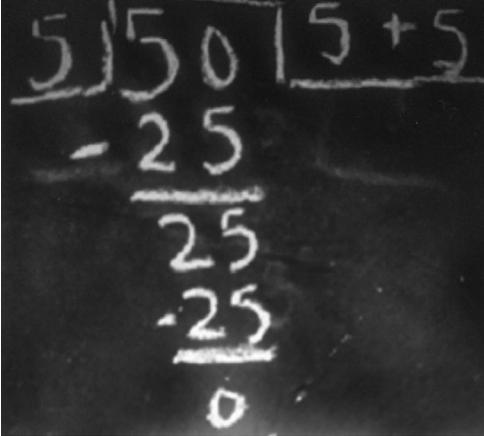
“अब कितनी पतंगें बाँट गईं?”

“सब पतंगें बाँट गईं।”

मैंने फिर से ज़ोर देते हुए पूछा, “क्या किसी दूसरे तरीके से इसे किया जा सकता है?”

कक्षा 5 की साक्षी का तरीका ऐसा था :

उसने कहा, “पहले पाँचों को पाँच-पाँच पतंगें दीं तो 25 पतंगें बँट गईं। ऐसे ही फिर से 5-5 पतंगें सबको दे दीं। 25 पतंगें फिर से बँट गईं।”



चित्र 7

साक्षी के जवाब को फिर से सबके सामने दोहराया गया। इसपर सबकी राय भी माँगी गई। अबकी बार मानक तरीके से थोड़ा अलग नए तरीके को भी बच्चे अपना रहे थे। यदि यह तरीका उसी विद्यालय के किसी शिक्षक द्वारा बताया जाता तो बच्चों द्वारा शायद ज़्यादा जल्दी अपनाया जाता, पर अकसर देखा गया है कि विद्यालय के शिक्षक-शिक्षिकाओं के अलावा यदि कोई बाहरी व्यक्ति कुछ नए तरीके सुझाता है तो बच्चे उस विचार को जल्दी नहीं अपना पाते हैं।

बच्चे जब कुछ वस्तुओं को बराबर बाँट रहे होते हैं तो वे इसी तरीके (चित्र 2, 6, 7) को अपनाते हैं। अपनी सहूलियत के अनुसार चाहे वे पहली बार में एक-एक बाँटें, दो-दो बाँटें या पाँच-पाँच। यही इस तरीके की खूबसूरती भी है कि हर बच्चा अपने तरीके से बाँट सकता है। इस प्रक्रिया के दौरान बच्चे अपने तरीके से अनुमान भी लगाते हैं कि पहली बारी में ज़्यादा-से-ज़्यादा कितना बाँटें ताकि प्रक्रिया छोटी हो जाए।

यह पूरी प्रक्रिया भाग के अर्थ व सन्दर्भ में उपयोग को समझने में मदद करती है। इसके विपरीत कलन पर सीधे जाने का एक खतरा यह भी हो जाता है कि बच्चे इस प्रक्रिया को चरणबद्ध ढंग से याद कर लेते हैं। ऐसा इसलिए क्योंकि वे रोज़मर्रा में प्रयोग किए जाने वाले मनगणित से इसका जुड़ाव नहीं देख पाते हैं, और इसलिए भी क्योंकि उनके खुद के स्वतंत्र तरीकों को कक्षा-कक्ष में जगह नहीं मिल पाती है।

जब भाग की प्रक्रिया को बच्चों के परिवेश के सन्दर्भ से जोड़ा जाता है तो बच्चे बार-बार घटाने की इस प्रक्रिया से जुड़ाव महसूस करते हैं। वे कक्षा में हो रही चर्चा का सम्बन्ध अपने दैनिक जीवन में देख पाते हैं। अलग-अलग तरीकों से बाँटने के खूब सारे मौके मिलने के बाद हो सकता है कभी वे यह भी महसूस करें कि हर बार इकाई को ही पहले क्यों बाँटा जाए? क्या कभी बाँटने की शुरुआत दहाई, सैकड़े आदि से भी की जा सकती है? तब शायद बच्चे खुद ही तय कर लें कि कौन-सा तरीका अभी के लिए सरल है और कौन-सा तरीका बड़ी संख्याओं के भाग करते वक़्त काम आएगा।

पूजा ने हेमवती नंदन बहुगुणा गढ़वाल विश्वविद्यालय, श्रीनगर से गणित में स्नातकोत्तर की पढ़ाई की है। उनकी इस विषय में ख़ास रुचि है। वे पाँच वर्षों से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन में गणित शिक्षकों और बच्चों के साथ गणित विषय पर काम कर रही हैं।

सम्पर्क : pooja.dumaga@azimpremjifoundation.org