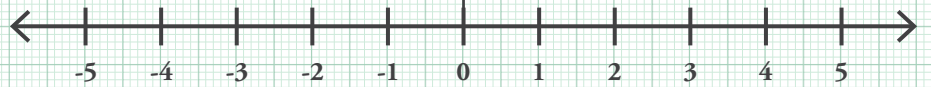


परिचय
बीजगणित से भाग - 1

पद्मप्रिया शिराली



**Azim Premji
University**

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

परिचय

स्कूल स्तरीय बीजगणित से परिचय विभिन्न पद्धतियों के माध्यम से कराया जा सकता है। कुछ शिक्षक किसी समीकरण में अज्ञात राशि से शुरू करना पसन्द करते हैं, तो कुछ किसी सूत्र का इस्तेमाल करके। कुछ अन्य शिक्षक पैटर्न आधारित पद्धतियों के इस्तेमाल को वरीयता देते हैं। क्या इससे कोई फ़र्क पड़ता है कि आप कौन-सी पद्धति अपना रहे हैं? क्या कोई एक पद्धति किसी दूसरी पद्धति से बेहतर है? इन सवालों पर बहस की जा सकती है। हालाँकि इनमें से प्रत्येक पद्धति बीजगणित की विभिन्न अवधारणाओं से सम्बन्धित है।

समीकरण में किसी अज्ञात राशि को जानने की पद्धति में बीजगणित को कुछ विशेष प्रकार के सवालों (जिनमें सरलीकरण की आवश्यकता हो) को हल करने की प्रक्रियाओं के अध्ययन के रूप में समझा जाता है। सूत्र इस्तेमाल करने की पद्धति में बीजगणित को परिवर्तित होती मात्राओं के बीच के सम्बन्धों के अध्ययन के रूप में समझा जाता है। पैटर्न आधारित पद्धति में बीजगणित को सामान्यीकृत अंकगणित, जिसके फलस्वरूप संख्याओं के बीच ज्ञात सम्बन्धों का सामान्यीकरण होता है, के रूप में समझा जाता है। इसलिए बीजगणित यह सब है : सामान्यीकृत अंकगणित, कुछ विशेष प्रकार के सवालों को हल करने की एक प्रक्रिया और सम्बन्धों व गणितीय संरचनाओं को समझने का एक साधन।

स्कूली बीजगणित में, 'चर' शब्द पहली बार एक ऐसे अक्षर के रूप में प्रयुक्त होता है जो किसी खुले वाक्य या एक समीकरण (उदाहरण $4 + x = 9$) में अज्ञात का प्रतिनिधित्व करता है। फिर सूत्रों (उदाहरण $A = L \times B$) में इसका इस्तेमाल होता है, फिर एक सामान्यीकृत गुणधर्म (उदाहरण $a + b = b + a$) के रूप में और बाद में एक सर्वसमिका (उदाहरण $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$) और फलन (उदाहरण $y = 3x$) के रूप में। बच्चे विभिन्न प्रकार के सवालों को हल करने के लिए चरों का उपयोग करना सीखते हैं। हालाँकि, क्या चर से सामना होने के पहले किसी बच्चे के दिमाग में बीजगणितीय सोच अच्छी तरह आ पाती है? उदाहरण के लिए, जब कोई बच्चा कहता है "मेरे पास 6 टॉफी हैं, अगर 4 टॉफी और मिल जाएँ तो मेरे पास 10 टॉफी हो जाएँगी" या जब कोई बच्चा संख्यात्मक सम्बन्धों से एक पैटर्न निकालने में सक्षम होता है या फिर जब कोई बच्चा आँकड़ों के एक पैटर्न में दसवें आँकड़े का अनुमान लगाने में सक्षम होता है तो क्या आप कह सकते हैं कि बच्चे ने बीजगणितीय रूप से सोचना प्रारम्भ कर दिया है?

दिवंगत श्री पी. के. श्रीनिवासन ने बीजगणित-शिक्षण की एक पद्धति विकसित की थी जिसका शीर्षक है 'बीजगणित – पैटर्न और डिजाइन की भाषा'। मैंने कक्षा छह के स्तर पर कई वर्षों तक इसका उपयोग किया है और पाया है कि बीजगणित, चर और अचर जैसी अवधारणाओं के विचार व इस्तेमाल से आसानी से परिचय कराने में यह बहुत उपयोगी है। साथ ही यह पदों और व्यंजकों पर संक्रियाएँ करने से परिचय कराने में भी उपयोगी है। यह पद्धति संख्यात्मक पैटर्नों के अध्ययन से शुरू होकर लाइन डिजाइन व 2-डी डिजाइन के अध्ययन की ओर बढ़ती है और अन्त में घातांकों व सर्वसमिकाओं के अध्ययन की ओर अग्रसर होती है। पिछले कुछ वर्षों में मैंने इसे बच्चों की रुचियों और आवश्यकताओं के हिसाब से रूपान्तरित कर लिया है। हालाँकि बुनियादी ढाँचा काफ़ी हद तक पहले जैसा ही है। यहाँ मैं रूपान्तरित पद्धति साझा कर रही हूँ।

पैटर्न चाहे संख्याओं के हों या दृश्यों के, वह बच्चों और वयस्कों को स्वाभाविक रूप से एक समान अपील करते हैं। इसका सम्बन्ध मनुष्यों की मानसिकता में शामिल सौन्दर्य बोध से हो सकता है। हम प्रकृति में, आकाश में विचरते खगोलीय पिण्डों की गतियों में, समय में (मौसम) पैटर्नों को पहचानने और समझने में सक्षम हैं। सिर्फ़ यही नहीं, हम वृहत स्तर से लेकर सूक्ष्म स्तर पर होने वाले पैटर्नों को भी पहचान व समझ सकते हैं।

बीजगणित से परिचय कराने के लिए पैटर्न एक बढ़िया प्रारम्भिक बिन्दु हो सकते हैं। यह उस गणितीय ज्ञान से आसानी से उत्पन्न होते हैं जो बच्चे कक्षा छह के पहले ही हासिल कर लेते हैं, जैसे कि सम और विषम संख्याएँ, गुणन सारणियाँ, कुछ खास संख्याओं के व्यवहार, संख्याओं के सम्बन्ध आदि।

इस पुलआउट यानी परिचय बीजगणित से भाग-एक में मैंने पैटर्नों के साथ काम करने के पहले चरण पर ही ध्यान केन्द्रित किया है। चर, अचर, पद और व्यंजक जैसी अवधारणाओं व जिन संक्रियाओं में यह अवधारणाएँ शामिल हैं उनके उपयोग के लिए यह एक प्रारम्भिक चरण है। अगले पुलआउट यानी परिचय बीजगणित से भाग-दो में मैं डिजाइन की भाषा और इन्हीं अवधारणाओं व संक्रियाओं के इस्तेमाल का वर्णन करूँगी। तीसरे पुलआउट यानी परिचय बीजगणित से भाग-तीन में मैं घातांक और बीजगणित सर्वसमिकाओं पर चर्चा करूँगी और इसके बाद समीकरणों के लिए पद्धतियों के बारे में बात की जाएगी।

मुख्य शब्द : बीजगणित, अज्ञात राशियाँ, समीकरण, व्यंजक, पैटर्न, गतिविधियाँ, युक्तियाँ

गतिविधि 1

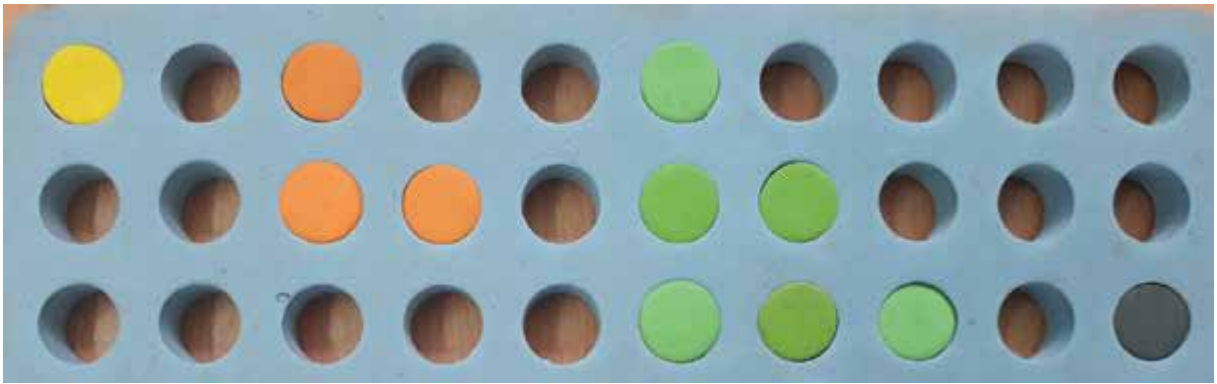
उद्देश्य : विभिन्न प्रकार के पैटर्नों से विद्यार्थियों का परिचय करवाना।

दिमाग में पैटर्न पहचानने की क्षमता जन्मजात होती है और यह बहुत ही सहज रूप से व तेजी-से विकसित होती है। हालाँकि, यदि इससे पहले बच्चों को रटने की व यांत्रिक पद्धति से पढ़ाया गया हो तो आपको उनके अवलोकन करने और सोचने की शक्ति को पुनर्जागृत करना पड़ सकता है।

संसाधनों के रूप में संख्याओं व डिजाइन के पैटर्न वाले सवाल प्रचुर मात्रा में उपलब्ध हैं। शिक्षक को उच्च प्राथमिक कक्षाओं के बच्चों की ज़रूरत को ध्यान में रखते हुए उपयुक्त श्रेणीबद्ध चयन करना होगा।

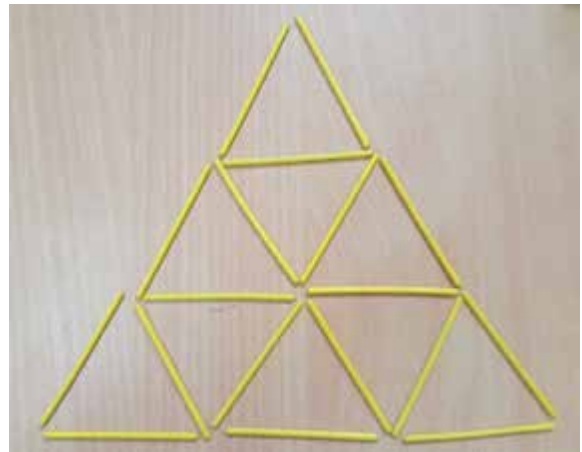
मैं यहाँ नमूने के तौर पर कुछ सवाल दे रही हूँ:

1. इन संख्याओं में कौन-सा पैटर्न है? रिक्त स्थानों में कौन-सी संख्याएँ आएँगी?
अ. 7, _____, 24, 34, 45, 57, 70
ब. 71, 70, 73, 72, 75, _____, _____, _____
2. दी गई संख्याओं में से असमान संख्या को ढूँढो व अपने उत्तर का कारण बताओ।
अ. 252, 72, 1, 275, 24, 488



चित्र-1

1. पहली पाँच त्रिकोणीय संख्याएँ इस प्रकार हैं 1, 3, 6, 10, 15
2. क्या तुम्हें इसमें कोई पैटर्न नज़र आता है?
3. क्या तुम अगली त्रिकोणीय संख्या बता सकते हो?
4. दसवीं त्रिकोणीय संख्या कौन-सी होगी?



चित्र-2

1. एक छोटा त्रिभुज बनाने के लिए मैंने माचिस की 3 तीलियाँ इस्तेमाल की हैं।
2. इसके नीचे त्रिभुजों की एक दूसरी पंक्ति बनाने के लिए मुझे कितनी तीलियों की ज़रूरत होगी?
3. उसके नीचे त्रिभुजों की तीसरी पंक्ति बनाने के लिए मुझे कितनी तीलियाँ चाहिए होंगी?
4. छठी पंक्ति बनाने के लिए कितनी तीलियाँ चाहिए होंगी?
5. क्या तुम बता सकते हो कि बीसवीं पंक्ति बनाने के लिए कितनी तीलियों की आवश्यकता होगी?

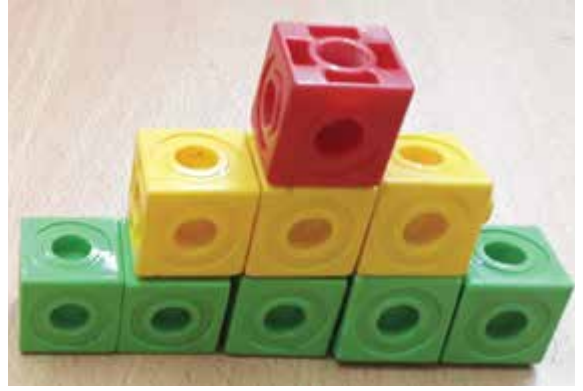
| | | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

चित्र-3

1. चौकोर सारणी में दी गई संख्याओं में से नौ संख्याओं (3×3 के एक चौकोर) के एक समूह पर एक बॉक्स बनाओ।
 - क. छायांकित चौकोरों में दी गई संख्याओं को जोड़ लो।
 - ख. कोने की संख्याओं को जोड़ लो।
 - ग. बीच की संख्या को 4 से गुणा करो। क्या हुआ?
2. नौ संख्याओं के एक अन्य समूह पर बॉक्स बनाओ और इसी प्रक्रिया को दोहराओ।



चित्र-5



चित्र-4

- 1 पायदान ऊपर और 1 पायदान नीचे वाली एक ऊपर-नीचे की सीढ़ी बनाने के लिए 1 ब्लॉक की आवश्यकता होती है।
 - 2 पायदान ऊपर और 2 पायदान नीचे वाली एक ऊपर-नीचे की सीढ़ी बनाने के लिए 4 ब्लॉक की आवश्यकता होती है।
 - 5 पायदान ऊपर और 5 पायदान नीचे वाली एक ऊपर-नीचे की सीढ़ी बनाने के लिए कितने ब्लॉक की आवश्यकता होगी?
- बताओ कि कैसे पता करोगे कि किसी भी संख्या के पायदान वाली एक सीढ़ी बनाने के लिए कितने ब्लॉक्स की आवश्यकता होगी?

| | | | | | | | | | |
|----|----|----|----|----|----|----|----|----|-----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 | 47 | 48 | 49 | 50 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 | 57 | 58 | 59 | 60 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 | 69 | 70 |
| 71 | 72 | 73 | 74 | 75 | 76 | 77 | 78 | 79 | 80 |
| 81 | 82 | 83 | 84 | 85 | 86 | 87 | 88 | 89 | 90 |
| 91 | 92 | 93 | 94 | 95 | 96 | 97 | 98 | 99 | 100 |

कागज़ के एक पन्ने के दोनों ओर सौ चौकोरों वाली एक सारणी छपी है। एक चौकोर दूसरे चौकोर के ठीक पीछे है, वैसे ही जैसे कि किसी किताब के पन्नों में होता है।

100 संख्या वाले चौकोर के दूसरी ओर कौन-सी संख्या होगी? 58 के दूसरी ओर? 23 के? 19 के?

क्या तुम्हें कोई पैटर्न नज़र आता है?

गतिविधि 2

उद्देश्य : पैटर्न की भाषा व परिवर्तनशील संख्याओं के लिए एक अक्षर के इस्तेमाल से परिचय।

परिवर्तनशील संख्याओं (चर) और अपरिवर्तनशील संख्याओं (अचर) की धारणा से परिचय जानी-मानी परिस्थितियों में कराया जा सकता है। हम चर और अचर, पद और व्यंजक जैसे शब्दों को थोड़ा बाद में प्रयुक्त करते हैं।

बच्चे सम संख्याओं, गुणजों व वर्ग संख्याओं के बारे में पहले से ही जानते हैं। यह गतिविधि संख्या सम्बन्धों के अपने पूर्व ज्ञान के सन्दर्भ में पैटर्न भाषा को लिखना सीखने में उनकी मदद करती है।

बच्चों को सम संख्याओं का एक समूह दें। उदाहरण के लिए, 12, 22, 8, 44।

उनसे पूछें, “यह कौन-सी संख्याएँ हैं?” वह ध्यान देंगे कि यह सभी सम संख्याएँ हैं।

इनके बारे में और क्या कहा जा सकता है? यह सभी 2 के गुणज हैं।

अब शिक्षक इन सभी संख्याओं को 2 के गुणज के रूप में लिख सकते हैं।

$$22 = 2 \times 11$$

$$8 = 2 \times 4$$

$$44 = 2 \times 22$$

अब उनसे पूछें, “दाईं ओर लिखी संख्याओं में तुम्हें क्या खास बात नज़र आती है?” पहली संख्या क्या है? यह हमेशा 2 है। दूसरी संख्या क्या है? यह हर बार बदल रही है।

तो एक सम संख्या को हम कैसे बता सकते हैं? यह किसी संख्या की दुगुनी होती है।

चूँकि दूसरी संख्या बदलती है या अलग-अलग होती है, हम इसे एक अक्षर से निरूपित करते हैं।

अब हम एक सम संख्या को 2 गुना 'n' या $2 \times n$ लिख सकते हैं। (बच्चों को बताएँ कि हम गुणे के चिह्न को छोड़ देते हैं क्योंकि यह अंग्रेज़ी के 'x' अक्षर के जैसा दिखाई देता है। इसलिए $2n$ का मतलब है '2 गुना n'।

हम गुणजों को उपयोग करने का एक अन्य उदाहरण भी ले सकते हैं। जैसे,

$$44, 11, 220, 121$$

यह कौन-सी संख्याएँ हैं? यह सभी 11 की गुणज हैं।

इन्हें इस तरह भी लिख सकते हैं

$$44 = 11 \times 4$$

$$11 = 11 \times 1$$

$$220 = 11 \times 20$$

$$121 = 11 \times 11$$

दाईं ओर हमें क्या दिखाई देता है? पहली संख्या हमेशा 11 है। दूसरी संख्या बदल रही है।

इस पैटर्न को इस तरह लिख सकते हैं, $11x$ या $11y$ (बच्चों को बताएँ कि परिवर्तनशील संख्या को दर्शाने के लिए किसी भी अक्षर का उपयोग किया जा सकता है।)

आइए, अब एक बिल्कुल अलग उदाहरण लेते हैं जिसमें कोई स्थाई गुणनखण्ड नहीं है।

$$16, 49, 4, 81$$

यह कौन-सी संख्याएँ हैं? वर्ग संख्याएँ।

इन्हें इस तरह लिखा जा सकता है :

$$16 = 4 \times 4$$

$$49 = 7 \times 7$$

$$4 = 2 \times 2$$

$$81 = 9 \times 9$$

दाईं ओर लिखी संख्याओं के बारे में हम क्या कह सकते हैं? इसे समझने में बच्चों की मदद करें। 'पहली संख्या बदल रही है। दूसरी संख्या भी बदल रही है। लेकिन पहली संख्या व दूसरी संख्या हमेशा एक ही हैं।' तो इस तरह के पैटर्न को हम कैसे बताएँगे?

इसे 'y' गुना 'y' या ' $y \times y$ ' या ' yy ' के रूप में दर्शा सकते हैं।

(**टिप्पणी :** इस समय हम yy को y^2 नहीं लिखेंगे क्योंकि अभी तक हमने घातांकों से बच्चों का परिचय नहीं कराया है।)

आइए, अब एक अन्य प्रकार की स्थिति का उदाहरण लेते हैं जहाँ दोनों ही गुणनखण्ड अलग-अलग चर हों।

यहाँ कुछ संख्याएँ दी गई हैं। क्या तुम गुणनखण्ड के रूप में 1 का उपयोग किए बिना इन्हें दो संख्याओं के गुणनफल के रूप में लिख सकते हो?

$$65, 14, 6, 77$$

गुणनफल के रूप में हम इन्हें इस तरह लिखते हैं :

$$65 = 5 \times 13$$

$$14 = 2 \times 7$$

$$6 = 2 \times 3$$

$$77 = 7 \times 11$$

दाईं ओर की पहली संख्या के बारे में हम क्या कह सकते हैं? दूसरी संख्या के बारे में? यह दोनों ही संख्याएँ परिवर्तित हो रही हैं। पहली परिवर्तनशील संख्या को 'x' कह सकते हैं और दूसरी परिवर्तनशील संख्या को 'y'। यहाँ दिए गए पैटर्न को 'x' गुना 'y' या 'x × y' या 'xy' के तौर पर दर्शाया जा सकता है।

शिक्षक बच्चों से इस तरह के कुछ और उदाहरण बताने को कह सकते हैं।

बच्चे जोड़ियों में भी कार्य कर सकते हैं। प्रत्येक बच्चा थोड़ी बड़ी संख्याओं जैसे 10 से 20 की बीच की संख्याओं के गुणजों का इस्तेमाल कर पैटर्न बना सकता है और दूसरे बच्चे को पैटर्न भाषा का इस्तेमाल करके उस पैटर्न को बताने को कहा जा सकता है। या फिर वह घन संख्याओं के साथ भी यही गतिविधि कर सकते हैं।

गतिविधि 3

उद्देश्य : दो पदों व दो संक्रियाओं वाले पैटर्न।

आइए, इन संख्याओं को देखते हैं।

$$21, 43, 7, 101$$

यह कौन-सी संख्याएँ हैं? यह सभी विषम संख्याएँ हैं। हम इन्हें कैसे बताएँगे? इस सवाल का जवाब देने में बच्चों को कुछ समय लग सकता है।

एक और सवाल जिससे उन्हें मदद मिल सकती है, यह है कि 'सम संख्याओं से इनका क्या सम्बन्ध है?' यह सम संख्याओं से 1 संख्या बड़ी या 1 संख्या छोटी होती है।

तो शुरू में हम इन्हें इस तरह लिख सकते हैं :

$$21 = 20 + 1$$

$$43 = 42 + 1$$

$$7 = 6 + 1$$

$$101 = 100 + 1$$

इस स्तर पर हम इन्हें $n + 1$ के रूप में बता सकते हैं। क्या कोई और तरीका भी हो सकता है? पहले हमने सम संख्याओं को किस तरह बताया था? तो अब हम इन संख्याओं को इस तरह लिखते हैं :

$$21 = 20 + 1 = 2 \times 10 + 1$$

$$43 = 42 + 1 = 2 \times 21 + 1$$

$$7 = 6 + 1 = 2 \times 3 + 1$$

$$101 = 100 + 1 = 2 \times 50 + 1$$

अब हम इस पैटर्न का वर्णन $2n+1$ के रूप में करते हैं।

आप बच्चों को दिखा सकते हैं कि इन्हीं संख्याओं को अलग तरह से भी बताया जा सकता है, जैसे $2n - 1$

टिप्पणी : इस स्तर पर शिक्षक बच्चों का परिचय चर, अचर, पद और व्यंजक जैसे शब्दों से करवा सकते हैं।

एक अन्य पैटर्न इस प्रकार है :

$$49, 69, 19, 89$$

इन सभी संख्याओं के इकाई का अंक 9 है। इन्हें इस तरह लिखा जा सकता है।

$$49 = 10 \times 5 - 1$$

$$69 = 10 \times 7 - 1$$

$$19 = 10 \times 2 - 1$$

$$89 = 10 \times 9 - 1$$

यहाँ पैटर्न है $10n - 1$

एक अन्य पैटर्न देखते हैं जिसमें स्थानीय मान का उपयोग होता है।

$$36, 75, 49, 81, 19$$

यहाँ कौन-सा पैटर्न दिखाई देता है? यह सभी संख्याएँ भाज्य संख्याएँ नहीं हैं। यह किसी एक ही संख्या के गुणज भी नहीं हैं। यह सभी दो अंकों वाली संख्याएँ हैं। इन्हें इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$36 = 10 \times 3 + 6$$

$$75 = 10 \times 7 + 5$$

$$49 = 10 \times 4 + 9$$

$$81 = 10 \times 8 + 1$$

$$19 = 10 \times 1 + 9$$

इस पैटर्न को इस तरह बता सकते हैं $10m+n$

संख्याओं के इस समूह के बारे में आपका क्या खयाल है?

$$94, 99, 91, 95$$

इन्हें इस तरह प्रसारित करके लिख सकते हैं :

$$94 = 100 - 6 = 10 \times 10 - 6$$

$$99 = 100 - 1 = 10 \times 10 - 1$$

$$91 = 100 - 9 = 10 \times 10 - 9$$

$$95 = 100 - 5 = 10 \times 10 - 5$$

तो यहाँ पैटर्न हुआ $10 \times 10 - n$

बच्चे इसे $90 + n$ के रूप में भी देख सकते हैं।

खेल : पैटर्न के जासूस

उद्देश्य : किसी और के द्वारा बनाए गए पैटर्न को खोजना।

सामग्री : ब्लैकबोर्ड या खाली कागज़।

यह खेल पूरी कक्षा द्वारा खेला जा सकता है या 5-5 बच्चों के समूह बनाकर या फिर जोड़ियों में भी खेला जा सकता है।

पहला विद्यार्थी 1 से 10 के बीच की कोई भी एक संख्या बोले। दूसरा विद्यार्थी बोली गई संख्या पर किन्हीं भी दो संक्रियाओं को इस्तेमाल कर एक नई संख्या बनाए, जैसे कि 12। पहले और दूसरे विद्यार्थी के बीच संख्याओं की यह अदला-बदली कम-से-कम 4 बार दोहराई जाए। प्रत्येक बार दूसरा विद्यार्थी अनुरूप संख्याएँ बनाने के लिए समान संक्रियाओं का उपयोग समान क्रम में करें।

कुछ इस तरह :

| विद्यार्थी I | विद्यार्थी II |
|--------------|---------------|
| 5 | 12 |
| 3 | 8 |
| 8 | 18 |
| 10 | 22 |

दूसरा विद्यार्थी पहले विद्यार्थी द्वारा बताई गई संख्याओं के साथ क्या कर रहा है?

इस पैटर्न को या तो पहले विद्यार्थी को या फिर समूह या कक्षा के अन्य विद्यार्थियों को खोजना है, जो इसे देख रहे हैं।

यहाँ दूसरा विद्यार्थी संख्या को दुगुना करके गुणनफल में 2 जोड़ रहा है।

इसे पैटर्न को $2n+2$ के रूप में बताया जा सकता है।

टिप्पणी : बेहतर होगा कि शुरुआत में विद्यार्थी दो विशिष्ट संक्रियाओं जैसे कि '× और +' या फिर '× और -' का ही उपयोग करें।

दो विद्यार्थियों के बीच के इस खेल का एक अन्य उदाहरण है :

| विद्यार्थी I | विद्यार्थी II |
|--------------|---------------|
| 5 | 24 |
| 3 | 8 |
| 8 | 63 |
| 10 | 99 |

यहाँ दूसरा विद्यार्थी पहले विद्यार्थी द्वारा बताई गई संख्याओं के साथ क्या कर रहा है?

यहाँ दूसरा विद्यार्थी संख्या का वर्ग करके गुणनफल में से 1 घटा रहा है।

इस पैटर्न को ' $nn - 1$ ' के रूप में बताया जा सकता है।

दो विद्यार्थियों के बीच के इस खेल का एक और उदाहरण है

| विद्यार्थी I | विद्यार्थी II |
|--------------|---------------|
| 1 | 3 |
| 2 | 7 |
| 3 | 11 |
| 4 | 15 |

यहाँ दूसरा विद्यार्थी पहले विद्यार्थी द्वारा बताई गई संख्याओं के साथ क्या कर रहा है?

यह पता करने का काम मैं आप पर छोड़ती हूँ।

गतिविधि 4 : व्यंजकों में पैटर्न

उद्देश्य : दिए गए पैटर्न का वर्णन करना और किसी दिए गए व्यंजक के लिए पैटर्न बनाना।

एक चर वाले सजातीय पदों के जोड़ का अवलोकन करना।

$$2 \times 3 + 3 \times 3$$

$$2 \times 5 + 3 \times 5$$

$$2 \times 2 + 3 \times 2$$

$$2 \times 1 + 3 \times 1$$

यहाँ दिए गए पैटर्न को हम कैसे बताएँ?

बच्चों को बताने दें कि इसे $2a + 3a$ के रूप में बता सकते हैं।

अब बच्चों से कहें कि प्रत्येक व्यंजक का योगफल मालूम करें और उसे दर्शाए गए तरीके से लिखें।

अब उनसे जवाब में आई संख्याओं का पैटर्न पता करने को कहें। वे देखेंगे कि यह सभी संख्याएँ 5 की गुणज हैं।

उन्हें अपने जवाबों को 5 के गुणज के रूप में लिखने को कहें।

| | | |
|---------------------------|----|--------------|
| $2 \times 3 + 3 \times 3$ | 15 | 5×3 |
| $2 \times 5 + 3 \times 5$ | 25 | 5×5 |
| $2 \times 2 + 3 \times 2$ | 10 | 5×2 |
| $2 \times 1 + 3 \times 1$ | 5 | 5×1 |

इस पैटर्न को कैसे बताएँगे? यहाँ पैटर्न होगा $5a$ ।

शिक्षक इस ओर भी बच्चों का ध्यान आकर्षित कर सकते हैं कि $2a$ और $3a$ का योगफल $5a$ होता है।

अब उनसे पूछें : $3x$ और $4x$ का योगफल क्या होगा? उन्हें अनुमान लगाने व अपने उत्तर की जाँच के लिए पैटर्न बनाने को कहें।

इस स्तर पर यह दर्शाना महत्वपूर्ण है कि जब विजातीय पदों को जोड़ा जाता है तो जवाब को 'सरल' नहीं किया जा सकता।

उन्हें संख्याओं का इस तरह का एक पैटर्न दें :

| | |
|---------------------------|----|
| $3 \times 3 + 2 \times 4$ | 17 |
| $3 \times 5 + 2 \times 2$ | 19 |
| $3 \times 2 + 2 \times 7$ | 20 |
| $3 \times 1 + 2 \times 3$ | 9 |

बाईं ओर के पैटर्न को किस तरह बताएँगे? यह पैटर्न है $3a + 2b$ ।

क्या इन संख्याओं के योगफल में बच्चों को कोई पैटर्न मिलता है?

अब वे घटाने की किसी स्थिति के लिए जवाबों का अनुमान लगाने की कोशिश कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, $5x - 2x$ और अपने उत्तर की जाँच करने के लिए पैटर्न बनाएँ।

गतिविधि 5 : व्यंजकों में पैटर्न

उद्देश्य : दिए गए पैटर्नों का वर्णन करना और दिए गए किसी व्यंजक के लिए पैटर्नों को बनाना।

एक से अधिक चर वाले सजातीय पदों के योग का अवलोकन करना।

इस पैटर्न का वर्णन किस तरह करेंगे?

$$2 \times 4 + 4 \times 2$$

$$3 \times 6 + 6 \times 3$$

$$5 \times 2 + 2 \times 5$$

$$8 \times 3 + 3 \times 8$$

यह पैटर्न $ab + ba$ के रूप में है।

यहाँ एक बार फिर बच्चे योगफल निकालकर अपने परिणामों का अवलोकन कर सकते हैं।

जवाब में मिली संख्याओं में क्या पैटर्न है? सभी संख्याएँ 2 की गुणज हैं।

शुरुआत में बच्चों को इन संख्याओं को 2 के गुणज के रूप में लिखने को कहें, जैसे कि $16 = 2 \times 8$ आदि।

| | | | |
|---------------------------|---------------|----|-----------------------|
| $2 \times 4 + 4 \times 2$ | 2×8 | 16 | $2 \times 2 \times 4$ |
| $3 \times 5 + 5 \times 3$ | 2×15 | 30 | $2 \times 3 \times 5$ |
| $6 \times 7 + 7 \times 6$ | 2×42 | 84 | $2 \times 6 \times 7$ |
| $3 \times 3 + 3 \times 3$ | 2×9 | 18 | $2 \times 3 \times 3$ |

दूसरे चरण में वे दूसरी संख्या के भी गुणनखण्ड लिख सकते हैं,

इस तरह $16 = 2 \times 2 \times 4$ आदि।

आखिरी स्तम्भ के जवाबों में क्या पैटर्न है?

पैटर्न है $2ab$ ।

एक बार फिर $ab + ba$ की ओर बच्चों को ध्यान आकर्षित करें जो कि $2ab$ के बराबर होता है।

क्या ab और ba सजातीय पद हैं? क्यों?

दो चरों वाले 'सजातीय' और 'विजातीय' पदों के कुछ अन्य उदाहरणों पर चर्चा करें।

अभ्यास के तौर पर बच्चों को शुरुआत में केवल सजातीय पदों वाली दी गई किसी पैटर्न भाषा के लिए एक संख्या पैटर्न बनाने को कह सकते हैं।

उदाहरण के लिए $xy + xy + xy$ के लिए संख्या पैटर्न बनाएँ।

वह क्या होगा?

क्या वह $xy + yx + xy$ से अलग होगा?

$5cd - 2cd$ के लिए संख्या का पैटर्न बनाओ।

वह क्या होगा?

अब बच्चों से विजातीय पदों के जोड़ व घटाने के लिए भी पैटर्न बनाने को कहें।

उदाहरण : इनमें से प्रत्येक के लिए संख्या पैटर्न बनाएँ :

(i) $abc - cde$ (ii) $ab + bc + ca$.

गतिविधि 6 : क्रमविनिमेयता एवं साहचर्यता के नियम (Laws of Commutativity and Associativity)

उद्देश्य : क्रमविनिमेयता और साहचर्यता को स्थापित करना।

यहाँ हम क्या देखते हैं?

$$3 + 2 = 2 + 3$$

$$5 + 1 = 1 + 5$$

$$6 + 4 = 4 + 6$$

गुणधर्म : $a + b = b + a$

बच्चों से पूछें : “क्या मैं यहाँ + के चिह्न को - के चिह्न से बदल सकती हूँ?” “क्या + के चिह्न की जगह \times के चिह्न का इस्तेमाल कर सकती हूँ?” “क्या + के चिह्न को \div के चिह्न से बदल सकती हूँ?”

यहाँ हम क्या देखते हैं?

$$2 + (3 + 5) = (2 + 3) + 5$$

$$1 + (4 + 2) = (1 + 4) + 2$$

$$5 + (2 + 1) = (5 + 2) + 1$$

गुणधर्म : $a + (b + c) = (a + b) + c$

इसी तरह शिक्षक गुणे व भाग के गुणधर्मों को दर्शाने के लिए पैटर्न बना सकते हैं और पैटर्नों के अध्ययन के ज़रिए 0 व 1 के गुणधर्मों को दर्शा सकते हैं।

गुणधर्म : $a \times b = b \times a$, $a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

1 के गुणधर्म : $1 \times a = a$, $a \div a = 1$, $a \div 1 = a$

0 के गुणधर्म : $a + 0 = a$, $a - 0 = a$, $a - a =$

0 , $a \times 0 = 0$, $0 \div a = 0$

गतिविधि 7

उद्देश्य : संख्याओं के कुछ गुणधर्मों को खोजना और उनका व्यंजकों के रूप में वर्णन करना।

क्रमागत संख्याओं से एक पैटर्न बनाएँ।

बच्चों से पैटर्न की संख्याओं को जोड़ने व पैटर्न भाषा का उपयोग करते हुए उनके गुणधर्मों को खोजने और बताने के लिए कहें।

$$11 + 12$$

$$2 + 3$$

$$7 + 8$$

$$10 + 11$$

दो क्रमागत संख्याओं का योगफल हमेशा एक विषम संख्या होती है।

इस पैटर्न को इस प्रकार लिख सकते हैं :

| | | |
|---------|-------------|------------|
| 11 + 12 | 11 + 11 + 1 | 2 × 11 + 1 |
| 2 + 3 | 2 + 2 + 1 | 2 × 2 + 1 |
| 7 + 8 | 7 + 7 + 1 | 2 × 7 + 1 |
| 10 + 11 | 10 + 10 + 1 | 2 × 10 + 1 |

इसे $n + n + 1$ के रूप में बताया जा सकता है जो कि $2n + 1$ के बराबर होता है।

बच्चे पैटर्न बना सकते हैं और निम्न प्रश्नों के जवाब खोज सकते हैं। उन्हें जवाबों को व्यंजकों के रूप में बताने के लिए कहा जा सकता है।

क्रमागत संख्याओं के किसी भी जोड़े के बीच का अन्तर क्या है?

तीन क्रमागत संख्याओं का योगफल क्या है?

क्या वे दो क्रमागत संख्याओं के गुणनफल का कोई गुणधर्म बता सकते हैं?

क्या वे तीन क्रमागत संख्याओं के गुणनफल का कोई गुणधर्म बता सकते हैं?

गतिविधि 8

उद्देश्य : बीजगणितीय सोच के ज़रिए चुनौतीपूर्ण सवालों को हल करना।

बच्चों से दो अंकों वाली कोई भी एक संख्या लेने को कहें, जैसे कि 53। उनसे अंकों को उलटने और इन दोनों संख्याओं के बीच का अन्तर मालूम करने को कहें।

पैटर्न को पहचानने के लिए वह इस गतिविधि को कई और संख्याओं के साथ दोहरा सकते हैं।

$$53 - 35$$

$$74 - 47$$

$$21 - 12$$

$$63 - 36$$

जो पैटर्न उभर रहा है क्या वे उसका वर्णन कर सकते हैं?

एक सवाल और देखते हैं।

बच्चों से 5 संख्याओं का एक समूह लेने को कहें, जैसे 5, 12, 4, 20, 6। उन्हें इन सभी संख्याओं को जोड़ने के लिए कहें।

अब उनसे पूछें :

1. “यदि तुम इनमें से प्रत्येक संख्या में से 2 घटा दो तो कुल योगफल कितना होगा? और क्यों?”

2. “यदि तुम इनमें से प्रत्येक संख्या में 3 जोड़ दो तो कुल योगफल कितना होगा? और क्यों?”

3. “यदि तुम इनमें से प्रत्येक संख्या को दुगुना कर दो कुल योगफल कितना होगा? और क्यों?”

क्या वे अपना जवाब देने के लिए व्यंजकों का उपयोग कर पाए?

और एक आखिरी चुनौती!

एक दिलचस्प परिणाम देखते हैं।

$$55^2 - 45^2 = 1000$$

$$105^2 - 95^2 = 2000$$

$$85^2 - 65^2 = 3000$$

इस पैटर्न की व्याख्या हम किस तरह करेंगे?

क्या संख्याओं के कोई और ऐसे जोड़े हैं जो 1000 के गुणज देते हों?



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली सह्याद्री स्कूल (पुणे) और ऋषिवैली स्कूल (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेंटर से 1983 से जुड़ी हुई हैं। वहाँ वह विभिन्न विषय (गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू) पढ़ाती हैं। पिछले कुछ वर्षों तक वह टीचर आउटरीच कार्य में लगी हुई थीं। वर्तमान में वह एससीईआरटी (आन्ध्र प्रदेश) के साथ पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर कार्य कर रही हैं। नब्बे के दशक में उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम (जिसे 'स्कूल इन अ बॉक्स' के नाम से जाना जाता है) का निर्माण किया था। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कविता तिवारी सम्पादन : राजेश उत्साही