लो फ्लोर हाई सीलिंग टास्क : आइए चक्कर लगाएँ ...

नए और नवीनतम स्पाइरल : खुले और बन्द मामले

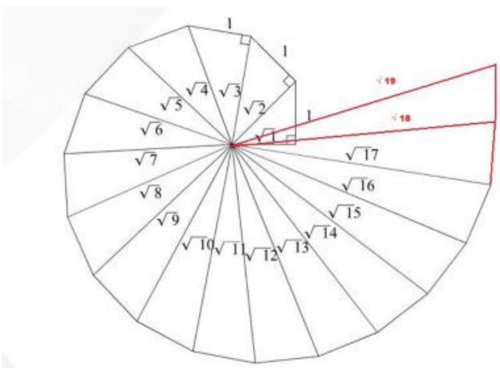
स्वाती सरकार, स्नेहा टाइटस

मुख्य शब्द : समकोण त्रिभुज, पाइथागोरस, समरूपता, परावर्तन, रचना

हम अपनी 'लो फ्लोर हाइ सीलिंग' की शृंखला को जारी रख रहे हैं, जिसमें एक गतिविधि को लिया जाता है। इसकी शुरूआत ऐसे आयु अनुरूप कार्य देने से होती है जो कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा किया जा सके। जैसे-जैसे गतिविधि आगे बढ़ती है, वैसे-वैसे कार्यों की जटिलता बढ़ती जाती है, ताकि विद्यार्थी अपनी क्षमता की सीमा तक पहुँचकर प्रयास करें। सभी के लिए करने को पर्याप्त काम है, लेकिन जैसे-जैसे स्तर बढ़ते जाता है, वैसे-वैसे उस कार्य को पूरा कर पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या घटती जाती है। बहरहाल, मुख्य बात यह है कि सभी विद्यार्थी व्यस्त रहते हैं, और सभी कार्य के किसी-न-किसी हिस्से को पूरा कर पाते हैं।

एट राइट एंगल्स के मार्च 2017 के अंक में *ख़ुशबू अवस्थी* ने एक जाने-पहचाने वर्गमूल स्पाइरल की जाँच के बारे में लिखा था। यह जाँच उन्हें गणितीय खोजों से भरे कई अप्रत्याशित रास्तों पर ले गई थी। लेख के अन्त में, उन्होंने पाठकों के लिए खोज़बीन के कुछ सवाल छोड़े थे, और हमने भी पाठक के रूप में उन सवालों पर सोच विचार किया। हम अपने निष्कर्षों का ख़जाना आपके साथ साझा कर रहे हैं। हमेशा की तरह यह कार्य लो फ्लोर (निम्न स्तर) से हाइ सीलिंग (उच्च स्तर) के क्रम में व्यवस्थित किए गए हैं। इस बार, हम फ्री डायनमिक ज्योमेट्री सॉफ़्टवेयर जियोज़ेब्रा के इस्तेमाल के कुछ प्रयोग शामिल कर रहे हैं। परकार (कम्पास) और मापक (रूलर) के साथ भी यह कार्य उतनी ही बखूबी से किया जा सकता है।

स्क्वायर रूट स्पाइरल (वर्गमूल स्पाइरल) कुछ ऐसा दिखता है (**चित्र-1** देखें)।



चित्र–1 : वर्गमूल स्पाइरल

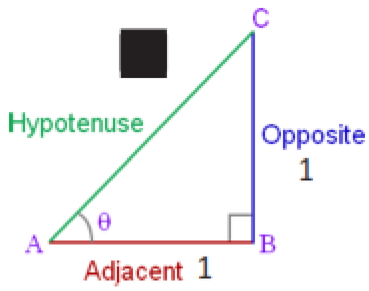
ख़ुशबू अवस्थी ने लेख के अन्त में जो प्रश्न उठाया था, वह इस तरह है :

स्पाइरल पर क्या असर पड़ेगा यदि हर पुनरावृत्ति पर, हम विपरीत भुजाओं की लम्बाई बदलते रहें और इसे आधार के बराबर बनाते रहें?

आइए पता करते हैं!

वर्गमूल स्पाइरल के संस्करण 2.0 निर्माण के चरण :

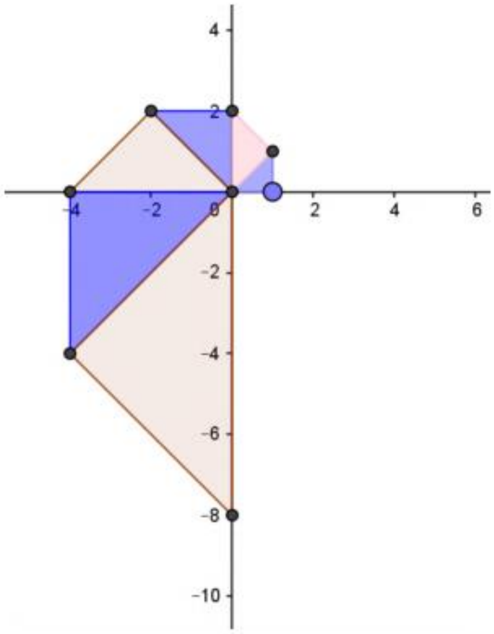
1. काग़ज़ की एक खाली पट्टी पर बीचों-बीच एक रेखा खण्ड AB बनाएँ, जो इकाई लम्बाई का हो। बिन्दु B पर एक लम्बवत रेखाखण्ड की रचना करें जो इकाई लम्बाई का ही हो (AB के समान), जिसका नाम BC रखें। इससे कर्ण AC की लम्बाई $\sqrt{2}$ होगी (**चित्र-2** देखें)।



चित्र–2

2. बिन्दु C पर AC के लम्बवत एक रेखा की रचना करें। इस रेखा पर $\sqrt{2}$ (AC के समान) लम्बाई के एक रेखाखण्ड CD का निर्माण करें। फिर, AD को मिलाकर कर्ण बनाएँ, इससे नए बने समकोण त्रिभुझ में AC, आधार के रूप में है और CD विपरीत भुजा। अत: $AD = \sqrt{4} = 2$ ।
3. इसी प्रकार, AD=2 माप का एक रेखाखण्ड DE खींचें जो बिन्दु D से AD पर लम्बवत हो। AE को मिलाइए। इससे AD आधार वाला समकोण त्रिभुज बनता है जिसमें AE कर्ण है।

इस प्रक्रिया को दुहराकर कई और समकोण त्रिभुज बनाएँ। ध्यान रखने वाली एकमात्र बात यह है कि नए त्रिभुज की लम्बवत भुजा पिछले त्रिभुज के कर्ण के समान होनी चाहिए। (**चित्र-3** देखें)।



चित्र–3

टास्क-1

संक्षेप में उन विशेषताओं का वर्णन करें जो प्रत्येक त्रिभुज के लिए समान हैं।

शिक्षक ध्यान दें : लो फ्लोर (निम्न तल) की शुरुआत की आवश्यकता यह है कि विद्यार्थी यह पहचान सकें कि समकोण समद्विबाहु त्रिभुज होने के कारण सारे त्रिभुज समरूप हैं। कुछ विद्यार्थी यह भी पहचान सकते हैं कि यदि आधार और ऊँचाई दोनों a हैं, तो त्रिभुज का कर्ण √2a होगा। शिक्षक के लिए यह एक मौक़ा है जहाँ वे उन त्रिभुजों की ओर ध्यान दिला सकते हैं जो समरूप हैं पर सर्वांगसम नहीं।

टास्क-2

यह त्रिभुज आपस में किस प्रकार सम्बन्धित हैं? भुजाओं की लम्बाई और क्षेत्रफलों की तुलना करें।

शिक्षक ध्यान दें : पिछले प्रश्न के आधार पर आगे बढ़ते हुए, शिक्षक विद्यार्थियों को नीचे दी गई तालिका में अपने निष्कर्षों को दर्ज़ करने और पैटर्न को पहचानने में मदद कर सकते हैं :

No. of Triangle (n)	Base (b)	Opposite side (a)	Hypotenuse (c)	Area
1	1	1	$\sqrt{2}$	½
2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	1
3	2	2	$\sqrt{8}$	2
4	$\sqrt{8}$	$\sqrt{8}$	4	4
5	4	.....	.....	
n	......	......	.....	

तालिका–1 : आधार की लम्बाई,विपरीत भुजा और कर्ण

यह स्पष्ट है कि प्रत्येक नए त्रिभुज की भुजाएँ पुराने त्रिभुज की भुजाओं के √2 गुणा हैं और क्षेत्रफल पहले के त्रिभुज के क्षेत्रफल का दोगुणा है।

टास्क-3

क्या इस तरह आगे चलने पर स्पाइरल बन्द हो जाता है? इस पर अपने मत के लिए तर्क दें। यह बताएँ कि स्पाइरल की दूसरी कुण्डली (Loop) में क्या होता है? दूसरी कुण्डली में पहले त्रिभुज की भुजाएँ और क्षेत्रफल, पहली कुण्डली के पहले त्रिभुज की तुलना में कैसी हैं? आगे आने वाले कुण्डलियों के बारे में क्या कहा जा सकता है? क्या कोई पैटर्न उभरता दिखता है?

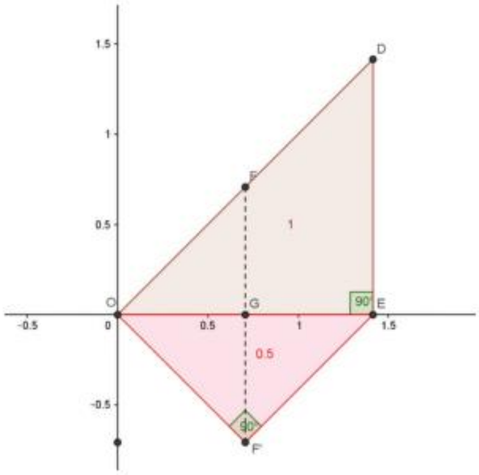
शिक्षक ध्यान दें : हमेशा की तरह, मत के औचित्य की माँग के साथ हम कठिनाई के स्तर को बढ़ाते हैं। विद्यार्थी जैसे-जैसे त्रिभुजों की रचना करेंगे, तो वे महसूस करेंगे कि स्पाइरल इसलिए बन्द हो जाता है क्योंकि स्पाइरल के केन्द्र पर बने कोण का मान प्रत्येक स्थिति में 45° रहता है। इसलिए 8 त्रिभुजों के बाद कोणों का योग 360° हो जाता है और स्पाइरल बन्द हो जाता है। हालाँकि, इसे शब्दों में या लेखन में अभिव्यक्त करना एक ऐसा कौशल है जिसे सीखने के लिए विद्यार्थियों को अभ्यास करना पड़ सकता है।

विद्यार्थी तालिका को पूरा कर, 9 वें त्रिभुज का आधार और ऊँचाई (स्पाइरल की दूसरी कुण्डली में पहला) ज्ञात कर सकते हैं। वे कर्ण का मान 16√2 और क्षेत्रफल 128 प्राप्त कर सकते हैं। यानी, इसकी भुजाएँ पहली कुण्डली के पहले त्रिभुज की भुजाओं की 16 ($=2^4$) गुणा और क्षेत्रफल 256 ($=2^8$) गुणा है। यह एक बढ़िया मौक़ा है यह देखने का कि क्षेत्रफलों का अनुपात भुजाओं के अनुपात का वर्ग है। यह देखने और पुनःस्थापित करने का भी अच्छा मौक़ा है कि त्रिभुजों की समरूपता का अर्थ है कि संगत कोण समान हैं, लेकिन भुजाएँ केवल समान अनुपात में हैं। यदि "n वें लूप में पहले त्रिभुज की भुजा : पहले त्रिभुज की भुजा" बीच अनुपात को दर्शाती हुए एक तालिका रची जाए, तो निम्नलिखित पैटर्न उभरता है : 1, 2^4, $(2^4)^2$, $(2^4)^3$ ... $(2^4)^{(n-1)}$ । क्षेत्रफलों के लिए इसी के समान पैटर्न उभरता है।

टास्क-4

ये त्रिभुज वामावर्त (घड़ी की उल्टी दिशा में) दिशा में आगे बढ़ते हैं। ऐसे त्रिभुज की रचना कीजिए जो दक्षिणावर्त (घड़ी की दिशा में) दिशा में आगे बढ़ें और जहाँ प्रत्येक नई ऊँचाई पिछले त्रिभुज के कर्ण के बराबर हो। यह सोचें कि यदि त्रिभुज दक्षिणावर्त आगे बढ़ते हैं, तो क्षेत्रफलों के बीच अनुपात क्या होगा।

शिक्षक ध्यान दें : इन त्रिभुजों की रचना एक कठिन कार्य है जिसमें यह समझने की आवश्यकता है कि अब समकोण पिछले त्रिभुज के आधार की विपरीत भुजा है। ऐसी रचनाएँ करने के कई तरीक़े हैं और इसलिए यह एक खुला प्रश्न (open-ended) है और खोजबीन व प्रयोग को प्रोत्साहित करने का एक अवसर है। यहाँ हमने इस तथ्य का उपयोग किया है कि नए त्रिभुज की ऊँचाई पिछले त्रिभुज की ऊँचाई की $1/\sqrt{2}$ है। हमने एक ऐसे त्रिभुज से शुरुआत की जिसका क्षेत्रफल 1 था और पहले त्रिभुज के कर्ण के मध्य-बिन्दु के आधार में परावर्तन कर दूसरे त्रिभुज के शीर्ष पर पहुँचे। अपने विद्यार्थियों को समरूप त्रिभुजों के अलावा बहुत से सर्वांगसम त्रिभुजों देखने के लिए प्रोत्साहित करें। **चित्र-4** देखें।



चित्र–4

सोच-समझकर गणितीय अनुमान लगाना एक महत्त्वपूर्ण गणितीय कौशल है। इस टास्क में विद्यार्थियों द्वारा इस तरह का प्रयास आसानी से किया जा सकता है और विद्यार्थी यह अहसास कर सकते हैं कि अब तालिका को उल्टे क्रम में पढ़ना है, और क्षेत्रफल दोगुणा की बजाय आधा हो जाएगा। कृपया अपने विद्यार्थियों को उनके द्वारा गणितीय अनुमानों को दर्ज करने के लिए प्रोत्साहित करें। इसका उद्देश्य यह महसूस कराना है कि जहाँ पहले क्षेत्रफल 2^1 से बढ़ रहे थे, अब वे 2^{-1} से घट रहे हैं।

टास्क-5

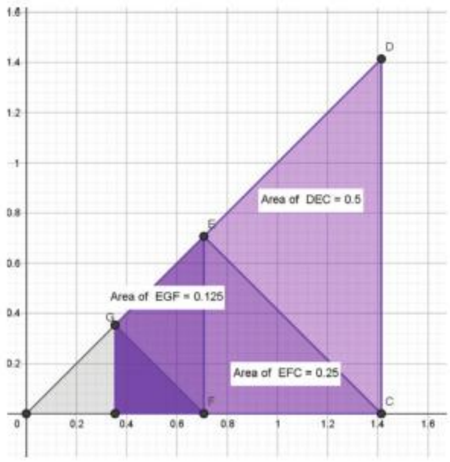
क्या क्षेत्रफल 1 के मूल त्रिभुज को क्रमशः आधे किए जा रहे क्षेत्रफल वाले त्रिभुजों से भरा (टाइल) जा सकता है? क्या मूल त्रिभुज इन त्रिभुजों से पूरा ढक जाएगा या फिर और ज़्यादा इस प्रकार के त्रिभुज बनाते जाने पर वे मूल त्रिभुज के क्षेत्र से बाहर निकल आएँगे?

शिक्षक ध्यान दें : इनमें ज्यामितीय श्रेणी व सीमा दोनों में किसी का भी उपयोग किए बिना उनकी एक बहुत ही प्रारम्भिक और विज़ुअल झलक है। यह उस तरह के विद्यार्थियों के लिए है जिनका झुकाव विज़ुअल है और जो ऊपर की रचनाओं से सम्बन्धित समझ का उपयोग 1 क्षेत्रफल वाले मूल त्रिभुज को भरने के लिए कर सकते हैं।

जिस प्रकार से त्रिभुज भरता है, उससे यह स्पष्ट है कि प्रत्येक नए त्रिभुज का निर्माण पिछले त्रिभुज के कर्ण के मध्य-बिन्दु को ज्ञात करने पर ही सम्भव होगा और फिर इस आधे खण्ड को अगले त्रिभुज का आधार बनाया जाएगा। सैद्धान्तिक रूप से, पहले त्रिभुज से बाहर निकले बिना इस प्रक्रिया को अनवरत जारी रखना सम्भव है। हम शिक्षकों को इस परिणाम को गणितीय कथन के रूप में लिखने के लिए प्रोत्साहित करेंगे। इसका एक उदाहरण है :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\cdots \dots \dots = 1$$

इस कथन का सत्यापन कैलकुलेटर के उपयोग से सम्भव है और विद्यार्थियों के लिए यह एक रोचक अवलोकन होना चाहिए।



चित्र–5

टास्क-6

आधार 1 और ऊँचाई 2 के त्रिभुज से प्रारम्भ करते हुए, समरूप समकोण त्रिभुजों का एक स्पाइरल बनाएँ। इसमें पिछले त्रिभुज के कर्ण को अगले त्रिभुज का आधार लें। भुजाओं और क्षेत्रफलों के अनुपात क्या हैं?

आप समरूप समकोण त्रिभुजों का एक ऐसा स्पाइरल कैसे बना सकते हैं जिसमें शुरुआती त्रिभुज का आधार 1 हो और क्षेत्रफल n के अनुपात में हों (जहाँ n एक परिमेय संख्या है)?

n के किन मानों के लिए स्पाइरल बन्द हो जाएगा?

शिक्षक ध्यान दें : पहले त्रिभुज का कर्ण √5 है, इसका क्षेत्रफल 1 इकाई है। अगले त्रिभुज को समरूप होने के लिए यह ज़रूरी है कि भुजाएँ √5:1 के अनुपात में बढ़ें (क्योंकि कर्ण अगले त्रिभुज के लिए आधार का है)। इससे ऊँचाई 2√5 इकाई हो जाती है और क्षेत्रफल 5 इकाई वर्ग।

आगे आने वाले त्रिभुज की संगत भुजाएँ भी इसी प्रकार √5:1 के अनुपात में होंगी और क्षेत्रफल 5:1 के अनुपात में बढ़ते रहेंगे।

यदि समरूप त्रिभुजों के क्षेत्रफलों का अनुपात n:1 होना है, तो :

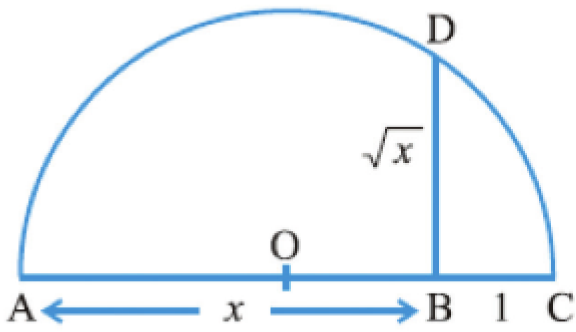
$$n = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}b_2h_2}{\frac{1}{2}b_1h_1} = \sqrt{n} \times \sqrt{n}$$

पहले त्रिभुज का आधार 1 है, कर्ण = $\sqrt{n}$, तो ऊँचाई $\sqrt{(n-1)}$ होनी चाहिए।

क्षेत्रफल $\frac{\sqrt{(n-1)}}{2}$ होगा।

अगले त्रिभुज का आधार $\sqrt{n}$ है, ऊँचाई $\sqrt{n(n-1)}$ है और कर्ण n, क्षेत्रफल $n\frac{\sqrt{(n-1)}}{2}$ होगा।

यह स्पष्ट है कि, हमें ऐसे त्रिभुज से शुरुआत करनी होगी जिसका आधार 1 हो और कर्ण $\sqrt{n}$ हो और फिर आगे के त्रिभुज बनाने होंगे। चूँकि $\sqrt{n}$ बनाया जा सकता है, हम मानक निर्माण विधि का उपयोग करके पहले त्रिभुज का निर्माण कर सकते हैं। **चित्र-6** देखें, जो कक्षा 9 वीं की एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक से उद्धृत है।

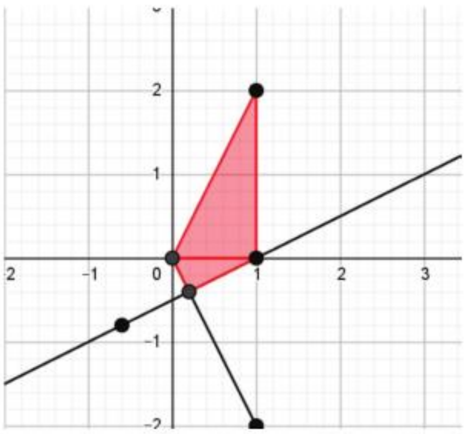


चित्र–6

टास्क-7

क्या इस नए स्पाइरल में दक्षिणावर्त दिशा में नए त्रिभुज बनाना सम्भव है?
इस परिस्थिति में भुजाओं का अनुपात क्या होगा? क्षेत्रफल के अनुपात के बारे में आप क्या कहेंगे?

शिक्षक ध्यान दें : समरूप त्रिभुजों का उपयोग करके यह बिल्कुल सम्भव है - मूल बिन्दु के कोण में पहले त्रिभुज के आधार में परावर्तित करके और फिर मूल आधार को कर्ण मानकर त्रिभुज को पूरा किया जाएगा। **चित्र-7** देखें।



चित्र–7

भुजाएँ 1: 1/√n के अनुपात में होंगी और क्षेत्रफल 1: 1/n के अनुपात में। यानी जहाँ घड़ी की विपरीत दिशा में घूर्णन क्षेत्रफलों के अनुपात n के सकारात्मक घातांक देता है वहीं दक्षिणावर्त घूर्णन क्षेत्रफलों का ऐसा अनुपात देता है जिसमें n के घातांक नकारात्मक हैं।

टास्क-8

n के किन मानों के लिए स्पाइरल बन्द होगा?

शिक्षक ध्यान दें : चूँकि त्रिभुज समरूप हैं, अतः किसी दिए गए क्षेत्रफल के अनुपात के मान (n:1) के लिए शीर्ष पर सभी कोण बराबर होते हैं। निम्नलिखित तालिका विद्यार्थियों को n के मान 1 से 10 तक के लिए कोणों का निरीक्षण करने में मदद करती है।

n [Ratio of Areas n : 1]	Base (b)	Opposite side (a)	Hypotenuse (c)	$\cos\theta = \frac{b}{[illegible]}$	θ
2	1	1	√2	$\frac{1}{[illegible]}$	45°
3	1	√2	√3	$\frac{1}{[illegible]}$	54.7°
4	1	√3	2	$\frac{1}{[illegible]}$	60°
5	1	2	√5	$\frac{1}{[illegible]}$	63.4°
6	1	.....	.....		
n	......	......	.....		

तालिका–2 : मूल बिन्दु पर कोण

यह स्पष्ट हो जाता है कि स्पाइरल n=2 और 4 के लिए बन्द होता है और इनमें मूलबिन्दु पर कोण के मान क्रमशः 45° और 60° हैं। ये दोनों 360° के गुणनखण्ड हैं, इस श्रेणी का एक और कारक 72° है (याद रखें कि कोण बढ़ रहा है (क्यों?) चूँकि कोण न्यून होना चाहिए), लेकिन 72° के लिए cos का मान 1/√n रूप का नहीं है।

स्पाइरल के लिए पहले पूर्ण घूर्णन जो (n=2 और n=4) पर समाप्त होते हैं, विद्यार्थियों को इसके आगे की जाँच करने के लिए प्रोत्साहित करें। उनके लिए भुजाओं के अनुपात और प्रत्येक नई कुण्डली के पहले त्रिभुज के क्षेत्रफल को दर्ज करना विशेष रूप से रोचक है।

निष्कर्ष

क्या यह आश्चर्यजनक नहीं है कि एक ही प्रश्न के इर्द-गिर्द घूमने से हमारी जाँच-पड़ताल स्पाइरल कर सकती है? हमें आशा है कि आप इस जाँच-पड़ताल का उतना ही आनन्द उठाएँगे जितना हमने इसकी रचना करते वक़्त उठाया।

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन की स्रोत व्यक्ति और विश्वविद्यालय संसाधन केन्द्र में वरिष्ठ व्याख्याता हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्रेम है (पहला चित्रकला है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से B.Stat-M.Stat की पढ़ाई की है और वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सिएटल से गणित में स्नातकोत्तर की पढ़ाई की है। स्वाती 5 से भी अधिक वर्षों से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित सम्बन्धित गतिविधियों में शामिल रही हैं और हाथ से की जाने वाली हर गतिविधि में उसकी गहरी दिलचस्पी है, विशेष रूप से ओरिगेमी में। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

स्नेहा टाइटस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन और विश्वविद्यालय संसाधन केन्द्र में सहायक प्रोफ़ेसर हैं। इनका जुनून गणित की सुन्दरता, तर्क और प्रासंगिकता को साझा करना है। स्नेहा ग्रामीण और शहरी विद्यालयों के गणित शिक्षकों का मार्गदर्शन करती हैं और कार्यशालाओं का आयोजन करती हैं, जहाँ वह प्रॉब्लम सोलविंग और साथ-साथ गणित शिक्षण में उपयोग की जाने वाली शैक्षणिक रणनीतियाँ के जरिए कौशल विकास पर ज़ोर देती हैं। उनसे sneha.titus@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र **पुनरीक्षण** : हृदय कान्त दीवान **सम्पादन** : राजेश उत्साही