Translation of Triangular Numbers :

Amritanshu Prasad & Vijav Ravikumar From Azim premji University At Right Angles_March,2018

त्रिकोणीय संख्याएँ

अमृतांशु प्रसाद और विजय रविकुमार

मधुश्री बसु द्वारा चित्रित

मुख्य शब्द : गॉस, त्रिकोणीय संख्याएँ

प्रसिद्ध जर्मन गणितज्ञ कार्ल फ्रेडरिक गॉस (1777-1855) के बारे में एक कहानी मशहूर है। विद्यार्थियों को व्यस्त रखने और थोड़ा आराम करने की उम्मीद में गॉस के गणित-शिक्षक ने उन्हें 1 + 2 + ... + 100 तक की संख्याओं को जोड़ने के लिए कहा। सात वर्षीय गॉस ने तुरन्त ही ढूँढ़ लिया कि इसका उत्तर 5050 होगा। (*टिप्पणी* : इस कहानी की ऐतिहासिक प्रामाणिकता सन्दिग्ध है। सन्दर्भ [1] में, ब्रायन हेस इस कहानी की उत्पत्ति का पता लगाने की कोशिश करते हैं।)

चित्र-1

सवाल यह है कि गॉस ने इतनी जल्दी सैकड़ों संख्याओं का योग कैसे ज्ञात किया होगा? एक सम्भावना यह है कि उन्होंने इस योग को *दो बार* लिखा, एक बार सीधी दिशा में और दूसरी बार उल्टी दिशा में :

1 + 2 + 3 + ... + 99 + 100

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$$

ध्यान दीजिए कि 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101 और इसी प्रकार आगे भी। प्रत्येक कॉलम की संख्याओं को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है :

101 + 101 + 101 + … + 101 + 101 (100 बार)

जो दर्शाता है कि पहली सौ संख्याओं का योग 100 × 101 का आधा है, जो कि 5050 है।

इस तरक़ीब का उपयोग कई संख्याओं को जोड़ने के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

1 + 2 + … + 1000 का योग (1000 × 1001)/2 होगा, जो कि 500500 है।

प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग n वीं *त्रिकोणीय संख्या* (triangular numbers) कहलाता है।

$T(n) = 1 + 2 + \ldots + n$

पहली कुछ त्रिकोणीय संख्याएँ हैं :

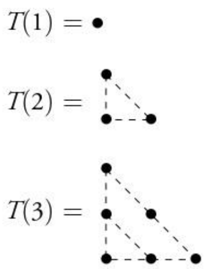
$T(1) = 1$

$T(2) = 1 + 2 = 3$

$T(3) = 1 + 2 + 3 = 6$

$T(4) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$

इन्हें *त्रिकोणीय संख्या* कहा जाता है क्योंकि ये उन वस्तुओं की संख्या बताती हैं जिन्हें त्रिभुजों में व्यवस्थित किया जा सकता है :



गॉस की तरक़ीब का उपयोग करके n वीं त्रिकोणीय संख्या पता करने के लिए सूत्र :

$T(n) = 1 + 2 + \ldots + n - 1 + n$

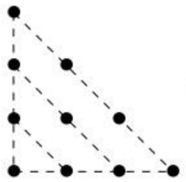
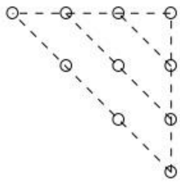
$T(n) = n + n - 1 + \ldots + 2 + 1$

$2T(n) = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)$

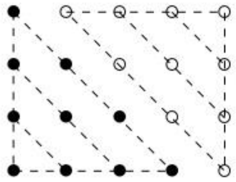
$T(n) = [n(n+1)]/2 \quad (1)$

चित्रों की सहायता से सूत्र को समझाना

T(n) के इस सूत्र को चित्रों द्वारा भी समझाया जा सकता है : उदाहरण के लिए, *T* (4) के बिन्दुओं को इस रूप में देखा जा सकता है।

$T(4) =$  , या $T(4) =$  ,

इसलिए

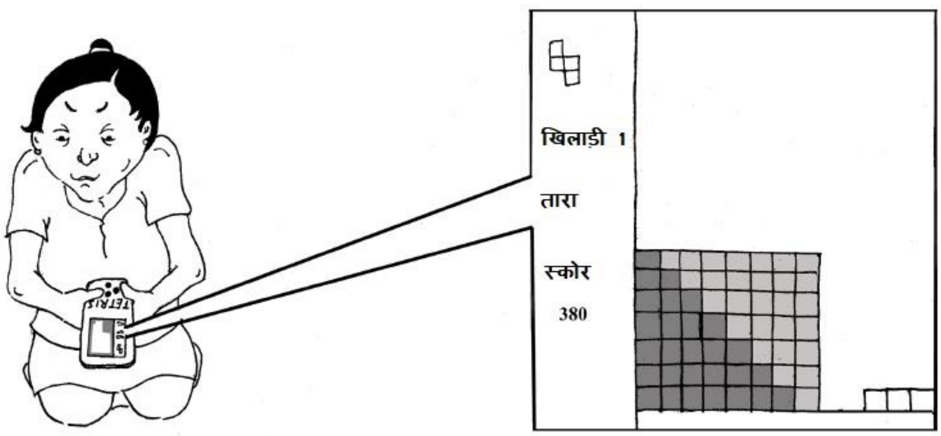
$T(4) + T(4) =$ 

दाईं ओर के आयत में 4 पंक्तियाँ और 5 स्तम्भ हैं। इसलिए,

$T(4) + T(4) = 4 \times 5$

या $T(4) = (4 \times 5)/2$

इसी तरह, किसी भी n के लिए $2T(n)$ बिन्दुओं को n पंक्तियों और $n + 1$ स्तम्भों वाले आयताकार क्रमविन्यास में व्यवस्थित किया जा सकता है। इससे हमें $2T(n) = n \times (n + 1)$ मिलता है, जिसे हमने पहले गॉस की तरक़ीब का उपयोग करके प्राप्त किया था।



चित्र-2

त्रिकोणीय संख्याओं में हमारी दिलचस्पी क्यों हो?

परपीड़क शिक्षकों को मात देने के अलावा क्या और भी कोई कारण हैं जिनकी वज़ह से हमें त्रिकोणीय संख्याओं में दिलचस्पी लेनी चाहिए? कुछ उदाहरण देखने के लिए इन प्रश्नों को हल करने की कोशिश कीजिए :

प्रश्न : एक *राउंड-रॉबिन टूर्नामेंट* में प्रत्येक टीम हर दूसरी टीम के साथ ठीक एक बार खेलती है। उदाहरण के लिए, फीफा विश्वकप में 32 टीमों को चार-चार टीमों के आठ समूहों में बाँटा जाता है। क्वालीफाइंग दौर में प्रत्येक समूह एक राउंड-रॉबिन टूर्नामेंट खेलता है। उदाहरण के लिए, 2014 फीफा विश्वकप के ग्रुप **ए** में ब्राजील, क्रोएशिया, मेक्सिको और कैमरून थे। क्वालीफाइंग दौर में ग्रुप **ए** में कितने मैच खेले गए? क्या होगा अगर विश्वकप का प्रारूप बदलकर प्रत्येक समूह में छह टीमों को शामिल कर दिया जाए। तब क्वालीफाइंग दौर में प्रत्येक समूह में कितने मैच खेले जाएँगे?

हल : ब्राजील को क्रोएशिया, मेक्सिको और कैमरून में से प्रत्येक के साथ एक मैच खेलना होगा। यानी कि ब्राज़ील को 3 मैच खेलने होंगे। अब क्रोएशिया पर आते हैं–हम पहले ही ब्राजील बनाम क्रोएशिया मैच की बात कर चुके हैं। तो, मेक्सिको और कैमरून के साथ क्रोएशिया के मैच बाक़ी हैं यानी दो और मैच। राउंड-रॉबिन को पूरा करने के लिए अन्त में हमें मेक्सिको और कैमरून के बीच एक मैच का आयोजन करवाना होगा। नीचे दी गई तालिका में प्रत्येक √ इस समूह में खेले जाने वाले खेल को दर्शाता है :

	ब्राज़ील	क्रोएशिया	मैक्सिको	कैमरून
ब्राज़ील		✓	✓	✓
क्रोएशिया			✓	✓
मैक्सिको				✓
कैमरून				

तालिका कुछ परिचित-सी लग रही है, नहीं? यह त्रिकोणीय संख्या $T(3)$ है। इसी प्रकार, यदि एक समूह में छह टीम हों तो खेलों की संख्या $T(5)$ होगी।

प्रश्न : तारा को विश्वविद्यालय में 24 कम्प्यूटरों का एक हाई-स्पीड नेटवर्क स्थापित करना है। इनमें से प्रत्येक कम्प्यूटर को नेटवर्क के अन्य सभी कम्प्यूटरों से सीधे जोड़ा जाना है। तारा को कितने केबल (तार) की आवश्यकता होगी?

चित्र-3

हल : पहले कम्प्यूटर को 23 अन्य कम्प्यूटरों से जोड़ने की आवश्यकता होगी। ऐसा करने के बाद, दूसरे कम्प्यूटर को 22 अन्य कम्प्यूटरों से जोड़ने की आवश्यकता होगी (यह पहले से ही एक कम्प्यूटर से जुड़ा हुआ है)। इसके बाद, तीसरे कम्प्यूटर को 21 अन्य कम्प्यूटरों से जोड़ने की आवश्यकता होगी (यह पहले दो कम्प्यूटरों से पहले से ही जुड़ा हुआ है) और बचे हुए कम्प्यूटर भी इसी प्रकार से एक-दूसरे से जोड़े जाएँगे। इसलिए आवश्यक केबलों की कुल संख्या होगी :

$23 + 22 + \ldots + 2 + 1 = T(23) = (23 \times 24)/2 = 276$

कैसे पता करें कि कोई संख्या त्रिकोणीय है या नहीं? एक तरीक़ा है : यदि $8N + 1$ एक पूर्ण वर्ग है तो N एक त्रिकोणीय संख्या होगी, अन्यथा नहीं होगी। उदाहरण के लिए, कुछ प्रथम त्रिकोणीय संख्याएँ हैं :

N	1	3	6	10	15	21
$8N+1$	9	25	49	81	121	169

वास्तव में यदि $8N + 1$ एक धनात्मक पूर्णांक M का वर्ग है, तो

$8N + 1 = M^2$

और M विषम संख्या ही होगी, क्योंकि इसका वर्ग विषम है। इसका अर्थ हुआ कि M-1 सम संख्या है, इसलिए $n = (M-1)/2$ एक धनात्मक पूर्णांक है।

हम जानते हैं कि

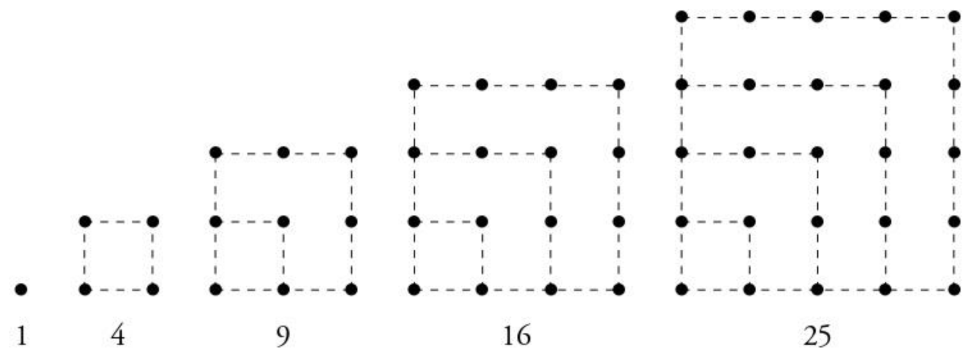
$$\begin{aligned} T_n &= \frac{n(n+1)}{2} \\ &= \frac{M-1}{2} \times \frac{M+1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{M^2-1}{8} \\ &= N \end{aligned}$$

इससे पता चलता है कि प्रत्येक विषम पूर्ण वर्ग एक त्रिकोणीय संख्या है और प्रत्येक त्रिकोणीय संख्या एक विषम पूर्ण वर्ग है।

अन्य आकृतियों पर आधारित संख्याएँ

ज्यामितीय आकृतियों पर आधारित पूर्णांकों के अन्य अनुक्रम (sequence) भी हैं।

ये कुछ वर्ग संख्याएँ हैं :



जो इस सरल सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती हैं :

$S(n) = n^2$

जबकि पंचकोणीय संख्याएँ (Pentagonal numbers) हैं :

1, 5, 12, 22, 35, ...

जो बढ़ते आकार के पंचभुज के निर्माण से प्राप्त होती हैं।

चित्र-4

पंचकोणीय संख्याओं के लिए भी एक अच्छा सूत्र है :

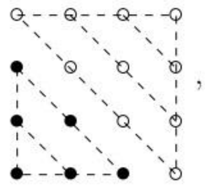
$P\ (n) = [n\ (3n{-}1)]\ /\ 2$

कभी-कभी इन संख्या अनुक्रमों में आपसी सम्बन्ध होते हैं। जैसे कि दो क्रमागत त्रिकोणीय संख्याओं का योग हमेशा एक वर्ग संख्या होती है :

$T(n) + T\ (n+1) = (n+1)^2$

त्रिभुजों को मिलाकर इसको ज्यामितीय रूप में दर्शाया जा सकता है।

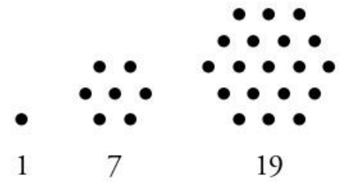
उदाहरण के लिए, नीचे दिया गया चित्र दर्शाता है कि $T(3) + T(4) = 4^2$।



प्रश्न : जब गॉस ने अपनी त्वरित सोच से अपने गणित-शिक्षक की लम्बी छुट्टी की उम्मीदों पर पानी फेर दिया, तो शिक्षक ने गॉस से एक और प्रश्न पूछा। "बहुत शानदार, एलेक!" उन्होंने कहा। "चलो देखते हैं कि तुम इसे कैसे हल करते हो। प्रथम सौ *विषम संख्याओं* को जोड़ो।" तो, अब गॉस को 1 + 3 + 5 + ... + 199 का योग ज्ञात करना था। बमुश्किल एक पल बीता होगा कि तारा की आँखें चमक उठीं और उसके चेहरे पर मुस्कान आ गई। उसने धीरे-से गॉस के कानों में कुछ कहा। गॉस ज़ोर-से हँसे, जब उन्हें यह एहसास हुआ कि उन्होंने फिर से शिक्षक को मात दे दी है। क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि तारा ने गॉस से क्या कहा होगा?

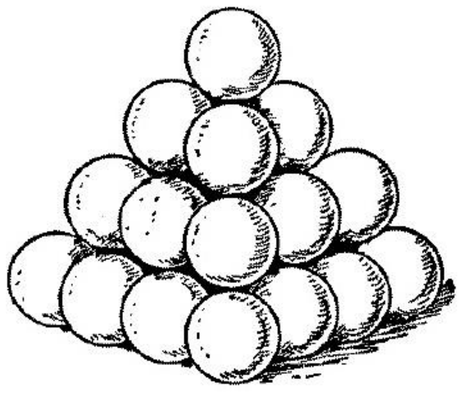
प्रश्न : आइए दो और संख्या अनुक्रमों का पता करें जो ज्यामितीय आकृतियों में बिन्दुओं की गिनती से प्राप्त होते हैं।

पहला अनुक्रम *केन्द्रित षट्कोणीय* संख्याओं (hexagonal numbers) का है :

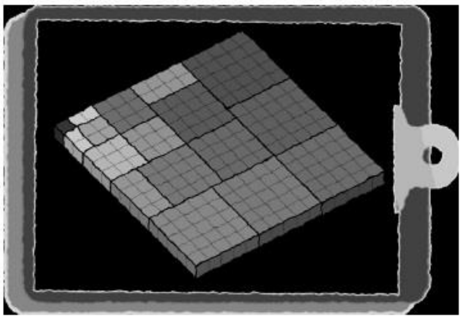


क्या आप त्रिकोणीय संख्याओं का इस्तेमाल करके *n* वीं षट्कोणीय संख्या के लिए सूत्र ज्ञात कर सकते हैं?

प्रश्न : क्या आपने कभी फलों की दुकान पर बिकते अमरूद, मौसम्बी या अनार देखे हैं? क्या आपको याद है कि दुकानदार ने फलों के ढेर को कैसे सजाया था? बहुत सम्भावना है कि फलों को वर्ग-आधार वाले पिरामिड में रखा गया हो। फलों की *n* परतों वाले एक वर्ग पिरामिड बनाने के लिए कितने फलों की आवश्यकता होगी? क्या आप इस संख्या से सम्बन्धित कोई सूत्र जानते हैं?



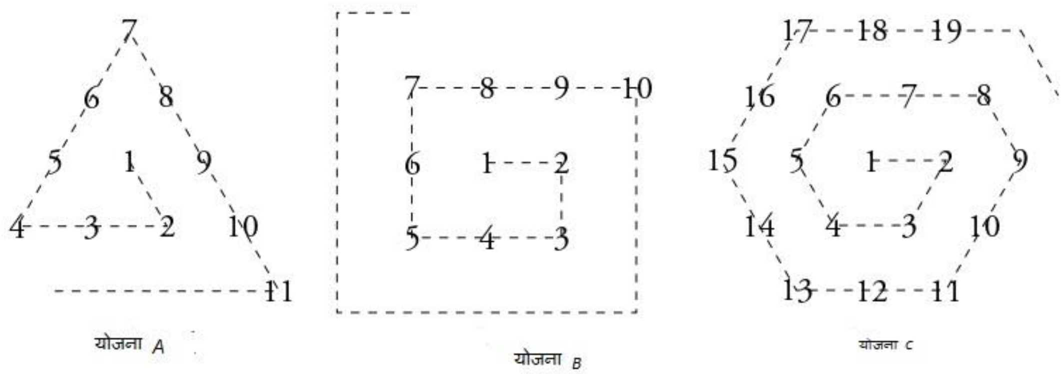
चित्र-5



चित्र-6

प्रश्न : गॉस और तारा पूरी रात पूर्णांक अनुक्रमों पर चर्चा करते हुए बिताते हैं और सुबह तक वे प्रथम n संख्याओं के घनों के योग का एक चौंकाने वाला सूत्र सोच पाते हैं : $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \cdots + n^3$। यह योग $(T(n))^2$ के बराबर होता है, जो n-वीं त्रिकोणीय संख्या का वर्ग है। वे तय करते हैं कि अब शिक्षक से पूछताछ करने की बारी उनकी है। इसलिए अगले दिन वे अपने निष्कर्ष शिक्षक को बताते हैं और उनसे अपने सूत्र के लिए प्रमाण की माँग करते हैं। क्या *आप* तारा के नोट्स (चित्र-6) से संकेतों का उपयोग कर उन शिक्षक की मदद कर सकते हैं?

प्रश्न : स्कूली पढ़ाई पूरी होने के बाद तारा को जल्दी ही बनने वाली एक *स्मार्ट स्पाइरल सिटी* के अर्बन प्लानर के रूप में नौकरी मिल जाती है। उसके बॉस ऐसा सिटी प्लान चाहते हैं जिसमें इमारतों के बीच एक-समान दूरी हो और सभी इमारतें एक ही सर्पिलाकार (spiral) सड़क पर स्थित हों। उनका कहना है कि इस तरह प्रत्येक इमारत के पते के लिए एक अद्‌वितीय संख्या होगी और संख्याओं का मान केन्द्र से बाहर की ओर जाने पर बढ़ता जाएगा। तारा शहर के लिए तीन सम्भावित प्रारूपों पर विचार करती है :



क्या आप प्रत्येक योजना में 50 की संख्या तक के पते देकर इन तीनों योजनाओं को पूरा करने में तारा की मदद कर सकते हैं?

प्रश्न : तारा के बॉस योजना *A* इस्तेमाल करने का फ़ैसला करते हैं और तारा को एक और कार्य देते हैं। वे उसे इस योजना में ऐसी सड़कें जोड़ने के लिए कहते हैं जो पूरी तरह से सीधी हों और जो सर्पिलाकार सड़क से होकर गुज़रती हों, ताकि बड़ी संख्या के पतों वाले घरों तक आसानी से पहुँचना सम्भव हो। ये सीधी सड़कें किसी भी दिशा में हो सकती हैं। तारा के बॉस और उनके मित्रों ने पहले से ही वे घर ख़रीद लिए थे, जिनके पते त्रिकोणीय संख्या हैं। तो, कितने सीधे रास्ते बनाने होंगे ताकि ‘त्रिकोणीय संख्याओं’ के पते वाले सारे घर सीधे रास्तों पर ही अवस्थित हों। योजना *B* में सारी वर्ग

संख्याओं तक जाने के लिए और योजना *C* में सभी षट्कोणीय संख्याओं तक जाने के लिए कितने सीधे रास्तों की आवश्यकता होगी?

सन्दर्भ

1.BrianHayes, “Sides and Area of Pedal Triangle”, *The American Scientist*, Vol.94, No.3, May-June 2006, page200. http://dx.doi.org/10.1511/2006.3.200

मधुश्री बसु चेन्नई में बसी एक नर्तकी और स्वतंत्र चित्रकार हैं। उन्होंने 2013 में गणितीय विज्ञान संस्थान, चेन्नई से गणित में पीएचडी की है। उनसे pupai.madhusree@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अमृतांशु प्रसाद गणितीय विज्ञान संस्थान, चेन्नई में गणितज्ञ हैं। गणित में उनके शोध ने रिप्रेज़ेटेशन सिद्धान्त और पास्कल त्रिभुज व फिबोनाची संख्याओं के ग्राफ-सैद्धान्तिक गुणों के बीच अप्रत्याशित सम्बन्धों को हाल ही में उजागर किया है। उनसे amri@imsc.res.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

विजय रविकुमार गणितीय संस्थान, चेन्नई में गणितज्ञ हैं। उन्हें बच्चों के साथ काम करना एवं विज्ञान और कला की खोजबीन करना पसन्द है। उनसे vijay.ravikumar@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व मिश्र **पुनरीक्षण :** हृदय कान्त दीवान **कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही