Translation of Divisibility by Primes : Vinay Nair_From Azim premji University At Right Angles_August,2017

कक्षा में

अभाज्य से विभाज्यता

विनय नायर

मुख्य शब्द : विभाज्यता, भाजक, ऑस्कुलेटर, वैदिक गणित

स्कूल में हम आमतौर पर 2 से 12 (कुछ पाठ्यक्रमों में 7 को छोड़कर) तक के भाजकों द्वारा विभाजन का अध्ययन करते हैं। 12 के बाद के भाज्यभाजकों (composite divisors) के मामले में हमें बस इतना करना है कि भाजक को सह-अभाज्य (co-prime) गुणनखण्डों के गुणनफल के रूप में दर्शाना है और और फिर उन सभी गुणनखण्डों में से प्रत्येक से विभाज्यता की जाँच करनी है। उदाहरण के लिए, हम संख्या 20 को लेते हैं; चूँकि $20 = 4 \times 5$ है (ध्यान दें कि 4 और 5 सह-अभाज्य हैं), इसलिए कोई भी संख्या 20 से विभाज्य है यदि और केवल यदि वह 4 और 5 दोनों से विभाज्य हो। यह महत्त्वपूर्ण है कि गुणनखण्ड सह-अभाज्य हों। उदाहरण के लिए, हालाँकि $20 = 10 \times 2$ भी होता है पर क्योंकि 10 और 2 सह-अभाज्य *नहीं* हैं, इसलिए यह दावा नहीं किया जा सकता है कि यदि कोई संख्या 10 और 2 दोनों से विभाज्य है, तो वह 20 से भी विभाज्य होगी। आपको इस कथन का प्रत्युदाहरण (counterexample) खोजने में सक्षम होना चाहिए ।

आमतौर पर स्कूल की पाठ्यचर्या में 7, 13, 17 और 19 जैसी अभाज्य संख्याओं से विभाज्यता की जाँच की चर्चा नहीं की जाती है। हालाँकि *वैदिक गणित* (जिसे "हाई स्पीड मैथमैटिक्स" के नाम से भी जाना जाता है; बॉक्स देखें) में इस तरह की अभाज्य संख्याओं से विभाज्यता की जाँच की तकनीकों की चर्चा की गई है, पर बिना कोई प्रमाण दिए। इस लेख में इन तकनीकों के प्रमाण पर चर्चा की गई है।

9 पर समाप्त होने वाली संख्याओं के लिए विभाज्यता की जाँच

वैदिक गणित के लेखक ने भाजक 19, 29, 39,⋯ (इन सभी संख्याओं के अन्त में 9 आता है) के लिए विभाज्यता की जाँच के नियम दिए हैं। इन सभी जाँचों का एक ही स्वरूप है। हम संख्या 19, 29, 39,⋯ में 1 जोड़ते हैं (‘*एकाधिकेनपूर्वेण*’ सूत्र के अनुसार, जिसका अर्थ है : "पिछले वाले से एक ज़्यादा")। ऐसा करने पर हमें संख्या 20, 30, 40 मिलती हैं। संख्या 19, 29, 39 के लिए **ऑस्क्युलेटर**

क्रमशः 2, 3, 4 हैं (20, 30, 40 में से 0 को हटाने के बाद बचे हुए अंक)। ऑस्क्युलेटर का उपयोग कैसे किया जाए इसे नीचे समझाया गया है।

संकेतन : किसी भी धनात्मक पूर्णांक N को $10a + b$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ b इकाई का अंक है (इसलिए $b \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$) और a एक पूर्णांक है। हम a को 'बची हुई' संख्या (इकाई के अंक को हटाने के बाद) के रूप में प्रस्तुत करते हैं । उदाहरण के लिए, यदि $N = 2356$ है, तो $b = 6$ और $a = 235$ होगा। यदि d भाजक है, तो हम d के ऑस्क्युलेटर को k द्वारा निरूपित करते हैं।

उदाहरण 1 : हम जाँचते हैं कि क्या संख्या 114, 19 से विभाज्य है। हम नीचे दिए गए चरणों का पालन करते हैं :

चरण 0 : यह "प्रारम्भिक चरण" है। यहाँ भाजक $d = 19$ और इसका ऑस्क्युलेटर $k = 2$ है।
N, b, a के प्रारम्भिक मान हैं : $N = 114$ (दी गई संख्या), $b = 4$ (इकाई का अंक), $a = 11$ (बची हुई संख्या)। N, b, a के मान बाद के चरणों में अद्यतन (update) होते जाएँगे, जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

चरण 1 : c की गणना करने के लिए निम्न सूत्र का उपयोग करें :
$c = N$ का इकाई वाला अंक × 19 का ऑस्क्युलेटर यानी कि $c = bk$ । यहाँ हमें $c = 4 \times 2 = 8$ मिलता है।

चरण 2 : चरण 1 में प्राप्त संख्या c को a यानी कि चरण 1 में संक्रिया के लिए विचारित अंक b को छोड़ने के बाद N की बची हुई संख्या में जोड़ें। यहाँ $a + c = 11 + 8 = 19$ हुआ। *यह N का अद्यतन मान (updated value) है। अब हम N के अद्यतन मान का उपयोग करते हुए a और b के मानों को अद्यतन करते हैं।*

चरण 3 : मानसिक रूप से जाँचें कि क्या N का अद्यतन मान 19 से विभाज्य है। यदि हाँ, तो आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि मूल संख्या भी 19 से विभाज्य होगी। यदि आप यक़ीन से यह नहीं कह सकते तो चरण 1-2–3 को तब तक दोहराएँ जब तक कि आपको एक ऐसी संख्या न मिल जाए जिसके बारे में आप मानसिक रूप से जानते हैं कि वह 19 से विभाज्य (या विभाज्य नहीं) है। कृपया ध्यान दें कि हर बार इस चक्र से गुज़रने पर आपको N, a, b के मानों को अद्यतन करना होगा।

उदाहरण **2 :** हम जाँचते हैं कि क्या संख्या 2356, 19 से विभाज्य है।

चरण 0 : प्रारम्भिक मान हैं **:** $d = 19$; $k = 2$; $N = 2356$ (दी गई संख्या); $b = 6$ (इकाई का अंक) और $a = 235$ (बची हुई संख्या) ।

चरण 1 : c की गणना करें। $c = bk = 6 \times 2 = 12$ ।

चरण 2 : $a + c$ की गणना करें। यहाँ $a + c = 235 + 12 = 247$ है। अब यह N का अद्यतन मान है। तो N, b व a के अद्यतन मान होंगे : $N = 247$, $b = 7$, $a = 24$ ।

चरण 3 : क्या 247, 19 से विभाज्य है? क्योंकि हम यक़ीन से यह नहीं कह सकते, इसलिए हम चरण 1-2 को दोहराते हैं।

चरण 1 : c की गणना करें। यहाँ $c = bk = 7 \times 2 = 14$ ।

चरण 2 : $a + c$ की गणना करें। यहाँ $a + c = 24 + 14 = 38$ ।

चरण 3 : क्या संख्या 38, 19 से विभाज्य है? हाँ। इसलिए संख्या 2356 भी 19 से विभाज्य है।

वैदिक गणित के बारे में

वैदिक गणित संस्कृत के 16 सूत्रों (aphorisms) का उपयोग करके गणना करने का एक तरीक़ा है। यह सूत्र 1911-1918 ईस्वीं के दौरान शंकराचार्य क्रम के एक सन्त स्वामी भारती कृष्ण तीर्थ द्वारा खोजे गए थे। विभाज्यता की जाँच के लिए संस्थापक जिस चीज़ का उपयोग करते हैं, उसे *ऑस्क्युलेटर* कहा जाता है।

सम्पादक की ओर से टिप्पणी : इसके बारे में अधिक जानने के लिए पाठक निम्नलिखित विकिपीडिया [सन्दर्भ 1] देख सकते हैं। इसका प्रारम्भिक अनुच्छेद निम्नलिखित है :

> वैदिक गणित भारतीय हिन्दू पुजारी भारती कृष्ण तीर्थ जी द्वारा लिखित एक पुस्तक है जो पहली बार 1965 में प्रकाशित हुई थी। इसमें मानसिक रूप से गणना करने की तकनीकों की एक सूची शामिल है। इन तकनीकों के बारे में दावा किया गया था कि यह वेदों पर आधारित हैं। पुस्तक में उल्लिखित मानसिक गणना प्रणाली को इसी नाम से या "वैदिक गणित" के रूप में भी जाना जाता है। "वैदिक" गणित के रूप में इसके वर्णन की उन शिक्षाविदों द्वारा आलोचना की गई है, जिन्होंने भारतीय स्कूल पाठ्यचर्या में इसे शामिल करने का भी विरोध किया है।

सन्दर्भ

i. Wikipedia, “Vedic Mathematics (book)”, https://en.wikipedia.org/wiki/Vedic_Mathematics_(book)

उदाहरण **3** : हम जाँचते हैं कि क्या संख्या 1234, 19 से विभाज्य है।

चरण 0 : प्रारम्भिक मान हैं : $d = 19$; $k = 2$; $N = 1234$ (दी गई संख्या); $b = 4$ (इकाई का अंक) और $a = 123$ (बची हुई संख्या)।

चरण 1 : c की गणना करें। $c = bk = 4 \times 2 = 8$ ।

चरण 2 : $a + c$ की गणना करें। यहाँ $a + c = 123 + 8 = 131$ ।
अब $N = 131$, $b = 1$, $a = 13$

चरण 3 : क्या संख्या 131, 19 से विभाज्य है? क्योंकि हम इस बारे में यक़ीन से कुछ नहीं कह सकते हैं, अत: हम चरण 1-2-3 को दोहराते हैं।

चरण 1 : c की गणना करें। $c = bk = 1 \times 2 = 2$ ।

चरण 2 : $a + c$ की गणना करें। यहाँ $a + c = 13 + 2 = 15$ ।

चरण 3 : क्या संख्या 15, 19 से विभाज्य है? नहीं। इसलिए संख्या 1234, 19 से विभाज्य नहीं है।

एक सन्देह : हो सकता है कि कोई यह समझ नहीं पाए कि प्रक्रिया को कब रोकना है। जब तक हम एक ऐसी संख्या नहीं खोज लेते जो कि इतनी छोटी है कि उसके बारे में हम स्पष्ट रूप से यह जानते हों कि वह संख्या 19 का गुणज है या नहीं, तब तक 1-2-3 चरण जारी रखने होंगे। संख्या 1121 पर विचार करें। पहली पुनरावृत्ति के बाद हमें 114 मिलता है। यदि आप जानते हैं कि संख्या 114, 19 से विभाज्य है तो प्रक्रिया को यहाँ रोका जा सकता है। यदि नहीं जानते हैं, तो 114 को N के अद्यतन मान के रूप में लेकर चरणों को उदाहरण 1 की तरह जारी रखा जा सकता है।

29, 39, 49, 59,$\cdots$ के लिए भी यही प्रक्रिया है और ऑस्क्युलेटर क्रमशः 3, 4, 5, 6,$\cdots$ हैं।

प्रक्रिया के पीछे का तर्क

संख्या 114 पर विचार करें। जब हम $4 \times 2 = 8$ करते हैं और इसे 11 में जोड़ते हैं तो हमें $11 + 8 = 19$ प्राप्त होता है। 'वास्तव में' हम यहाँ $110 + 80$ की गणना कर रहे होते हैं। अब हमारे पास है :

$110 + 80 = 114 - 4 + 80 = 114 + 76 = 190$

वास्तव में, हमने मूल संख्या में 76 जोड़ दिया है। यहाँ महत्त्वपूर्ण बिन्दु यह है कि 76, 19 का एक गुणज है। चूँकि 190 और 76 दोनों ही 19 के गुणज हैं, इसलिए मूल संख्या 114 भी 19 की गुणज होनी चाहिए।

114 के बजाय अंक 1 पर समाप्त होने वाली किसी संख्या के बारे में सोचें; जैसे कि 171 । जब हम इकाई के अंक को ऑस्क्युलेटर 2 के साथ गुणा करते हैं और गुणनफल को बची हुई संख्या में जोड़ते हैं, तो हम वास्तव में 20 जोड़ रहे होते हैं और 1 घटा रहे होते हैं (क्योंकि हम इकाई के अंक 1 को अनदेखा करते हैं)। इसलिए हम वास्तव में संख्या में $20 - 1 = 19$ जोड़ रहे हैं; और संख्या 19, 19 का एक गुणज है। इसी तरह जब इकाई के स्थान पर कोई और अंक होता है, जैसे कि 5, तो गणना इस

प्रकार होती है 5 × 2 = 10 । इसका मतलब है कि हम 100 – 5 = 95 जोड़ रहे हैं, जो फिर से 19 का एक गुणज है।

इसी तरह 29, 39, 49,⋯ द्वारा विभाज्यता की जाँच के लिए प्रत्येक स्थिति में मूलत: यही तर्क काम करता है।

अन्य अभाज्य संख्याओं के लिए ऑस्क्युलेटर खोजना

एक बार जब ऑस्क्युलेटर ज्ञात हो जाते हैं, तो विभाज्यता की जाँच की प्रक्रिया समान ही रहती है। हमें केवल यह समझने की ज़रूरत है कि ऑस्क्युलेटर कैसे खोजें।

किसी ऐसी अभाज्य संख्या पर विचार कीजिए जो अंक 9 पर समाप्त नहीं होती है, जैसे कि 7। ऐसी स्थितियों में हम 7 के एक ऐसे गुणज को लेते हैं जो 9 पर समाप्त होता हो। ऐसा सबसे छोटा गुणज 49 है। हम सूत्र *एकाधिकेन पूर्वेण* का उपयोग करते हैं और इसमें 1 जोड़ते हैं, तो हमें मिलता है 50। अब 0 को अनदेखा करें और 50 के शेष भाग 5 को ऑस्क्युलेटर के रूप में मानें। इसलिए संख्या 5, 7 से विभाज्यता की जाँच के लिए ऑस्क्युलेटर है।

यदि हम ध्यान से देखें तो यह प्रक्रिया सरल है। ऑस्क्युलेटर को 5 लेने से हम वास्तव में यह जाँच कर रहे होते हैं कि क्या दी गई संख्या 49 से विभाज्य है। चूँकि संख्या 49 से विभाज्य है, इसलिए यह निश्चित रूप से 7 से भी विभाज्य है।

इसी तरह संख्या 13, 17, 23,⋯ के लिए ऑस्क्युलेटर प्राप्त किए जा सकते हैं जो क्रमश: 4, 12, 7 हैं।

1 पर समाप्त होने वाली संख्याओं के लिए विभाज्यता की जाँच

आइए 21, 31, 41⋯ जैसी संख्याओं द्वारा विभाजन की स्थितियों पर विचार करें। यहाँ संख्याओं में 1 जोड़ने की बजाय (जैसे कि हमने अंक 9 पर समाप्त होने वाली संख्याओं द्वारा विभाजन की स्थिति में किया था) हम 1 घटाते हैं।यह निर्देश सूत्र *एकन्यूनेन पूर्वेण* ("पिछले वाले से एक कम") में दिया गया है। तो 21, 31, 41 से विभाजन के लिए विचार की जाने वाली संख्याएँ क्रमश: 20, 30, 40 हैं। पहले की तरह हम 0 के अलावा अन्य अंकों को ऑस्क्युलेटर मानते हैं यानी कि 20, 30 और 40 के लिए ऑस्क्युलेटर क्रमश: 2, 3 और 4 हैं। इसके बाद हम उसी प्रक्रिया का पालन करते हैं जिसका उपयोग हमने 9 पर समाप्त होने वाली संख्याओं द्वारा विभाजन की स्थिति में किया था; लेकिन अब हम जोड़ने के बजाय ***घटाते*** हैं। एक उदाहरण इसे स्पष्ट कर देगा।

उदाहरण 4 : हम जाँचते हैं कि क्या संख्या 441, 21 से विभाज्य है।

चरण 0 : प्रारम्भिक मान : $d = 21$; $k = 2$; $N = 441$ (दी गई संख्या); $b = 1$ (इकाई का अंक) और $a = 44$ (बची हुई संख्या)।

चरण 1 : c की गणना करें। $c = bk = 1 \times 2 = 2$ ।

चरण 2 : $a - c$ की गणना करें। यहाँ $a - c = 44 - 2 = 42$ ।

अब $N = 42$; $b = 2$; $a = 4$

चरण 3 : क्या संख्या 42, 21 से विभाज्य है? हाँ। इसलिए संख्या 441, 21 से विभाज्य है।

तर्क: तर्क पहले जैसा ही है। जब हम इकाई के अंक 1 को 2 से गुणा करते हैं और 44 में से घटाते हैं; तो हम वास्तव में $440 - 20 = 441 - 1 - 20 = 441 - 21$ कर रहे होते हैं।

तो हमने संख्या से 21 घटा दिया है। चूँकि $441 - 21 = 420$ और संख्या 420, 21 का एक गुणज है इसलिए मूल संख्या 441 भी 21 का एक गुणज है।

यदि किसी संख्या का इकाई का अंक 3 होता है और यदि हम उसे 2 से गुणा करते हैं और बची हुई संख्या में से घटाते हैं, तो वास्तविक प्रक्रिया $3 \times 2 = 6$ हो रही होती है। जब इकाई के अंक 3 को नज़रअन्दाज़ कर दिया जाता है, तब हम मूल संख्या में से 3 घटा रहे होते हैं। जब 6 को बाक़ी संख्या में से घटाया जाता है, तो दशमलव स्थानीय मान प्रणाली के कारण हम वास्तव में 60 घटा रहे होते हैं। परिणामस्वरूप हम कुल मिलाकर 63 घटा रहे होते हैं। चूँकि 63, 21 का एक गुणज है और जब अन्तिम संख्या 21 का गुणज है, तो मूल संख्या भी 21 का गुणज होनी चाहिए। इकाई के किसी भी अन्य अंक के लिए यही प्रक्रिया लागू होगी।

टिप्पणी : जैसा कि ऊपर देखा गया है कि हम 7 के लिए ऑस्क्युलेटर खोजने के लिए 49 के ऑस्क्युलेटर का उपयोग कर सकते हैं। लेकिन हम 21 के ऑस्क्युलेटर का भी उपयोग कर सकते हैं क्योंकि संख्या 21, 7 का एक गुणज है। इस प्रकार प्रत्येक अभाज्य संख्या के लिए दो ऑस्क्युलेटर होंगे, यह इस बात पर निर्भर करता है कि हम गुणा और जोड़ या गुणा और घटाव में से किसका उपयोग करते हैं। नीचे तालिका में कुछ भाजक और उनके दो ऑस्क्युलेटर दिए गए हैं।

भाजक	7	13	17	23	27	37
9 पर अन्त होने वाला गुणज	49	39	119	69	189	259
अनुरूपी ऑस्क्युलेटर	5	4	12	7	19	26

1 पर अन्त होने वाला गुणज	21	91	51	161	81	111
अनुरूपी ऑस्क्युलेटर	2	9	5	16	8	11

तालिका के अध्ययन से पता चलता है कि *किसी भाजक के दो ऑस्क्युलेटर का योग स्वयं भाजक ही है*। उदाहरण के लिए संख्या 13 के ऑस्क्युलेटर 4 और 9 हैं और 4 + 9 = 13 है। आपको जो भी अधिक सुविधाजनक लगता हो, उसे चुनने की आपको स्वतंत्रता है। उदाहरण के लिए संख्या 17 के मामले में यदि हम ऑस्क्युलेटर 12 चुनते हैं, तो गणना करना मुश्किल होता है। इसके बजाय, ऑस्क्युलेटर 5 इसे आसान बनाता है।

वैदिक गणित के इस तरीक़े से किसी भी संख्या द्वारा विभाज्यता की जाँच तैयार की जा सकती है।

विनय नायर *राइज़िंग अ मैथमेटिशियन फ़ाउण्डेशन* के सह-संस्थापक हैं। वह गणित को खोजपूर्ण तरीक़े से सीखने और प्राचीन भारतीय गणित पर भारत के विभिन्न हिस्सों में ऑनलाइन और ऑफ़लाइन कार्यक्रम आयोजित करते हैं। वह स्कूली बच्चों में शोध करने की मानसिकता पैदा करने की इच्छा रखते हैं। उनसे vinay@sovm.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रिधि अग्रवाल **पुनरीक्षण एवं कॉपी एडीटिंग** : कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही