Translation of Exploration of Recurring Decimals: Some Explanations : Shailesh Shirali, Padmapriya Shirali_From Azim premji University At Right Angles_March, 2014

कक्षा में

आवर्ती दशमलव की पड़ताल : कुछ स्पष्टीकरण

शैलेश शिराली

पद्मप्रिया शिराली

***मुख्य शब्द* :** आवर्ती दशमलव, सान्त दशमलव, पुनरावृत्ति खण्ड, अभाज्य गुणनखण्ड

एट राइट एंगल्स पत्रिका के नवम्बर 2013 के अंक में प्रकाशित लेख 'आवर्ती दशमलव' (recurring decimals) के अन्त में कई प्रश्न अनुत्तरित रह गए थे। यह प्रश्न छानबीन की प्रक्रिया के दौरान अनुभवजन्य अवलोकनों के तौर पर उभरे थे। यहाँ हम इन अवलोकनों का बारीकी-से अध्ययन करेंगे। साथ ही हम इनकी सत्यता का परीक्षण करेंगे और विभाज्यता के सरल सिद्धान्तों द्वारा इन्हें समझेंगे भी।

(A) *क्या यह सही है कि सभी भिन्न संख्याओं से या तो सान्त दशमलव (terminating decimal) संख्याएँ प्राप्त होती हैं या फिर किसी आवर्ती (periodicity) की आवर्ती दशमलव संख्याएँ?*

यह बिलकुल सही है! मान लीजिए कि $\frac{m}{n}$ एक भिन्न संख्या है, जहाँ m व n धनात्मक पूर्णांक हैं जिनके कोई उभयनिष्ठ अभाज्य गुणनखण्ड नहीं हैं। आइए, हम भिन्न $\frac{m}{n}$ के दशमलव प्रसार की गणना करते हैं। यदि दशमलव प्रसार सान्त है तो बहुत अच्छी बात है। अत: यहाँ हम इस बात की जाँच करते हैं कि असान्त दशमलव प्रसार की स्थिति में क्या होता है। गणना की प्रक्रिया में जब m (भाज्य) के अंकों की संख्या 'समाप्त' हो जाती है, तो हम क्या करते हैं? हम बस संख्या के अन्त में इकाई अंक के बाद शून्यों को जोड़-जोड़कर भाग की प्रक्रिया को जारी रखते हैं। प्रत्येक चरण में हमें जो शून्येत्तर (non-zero) शेष प्राप्त होता है वह $1, 2, 3, \dots, n-1$ में से एक संख्या होती है। अत: अधिक से अधिक n बार भाग देने पर हमें निश्चित रूप से एक ऐसे शेष की प्राप्ति होती है जो हमें पहले ही मिल चुका होता है।

इसके बाद से भाग की प्रक्रिया में प्राप्त होने वाले अंकों की शृंखला वही होगी, जो हमें पहले प्राप्त हो चुकी है। दूसरे शब्दों में कहें तो इसके बाद से दशमलव अंकों की पुनरावृत्ति होगी।

एक उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जाएगी। भिन्न संख्या $\frac{10}{13}$ पर विचार करें। तालिका 1 में $\frac{10}{13}$ की दीर्घ विभाजन विधि (long division method) से प्राप्त परिणामों को दर्शाया गया है। ध्यान दीजिए कि अन्तिम पंक्ति में प्राप्त शेष का मान प्रथम पंक्ति में दिए शेष के समान है। इसके बाद की पंक्ति दूसरी पंक्ति के समान होगी और उसके बाद की पंक्ति तीसरी पंक्ति के समान होगी, और यह प्रक्रिया इसी प्रकार चलती रहेगी। अब भागफलों के क्रम को ग़ौर-से देखें : $0, 7, 6, 9, 2, 3, 0, \ldots$। अत: हम यह कह सकते हैं कि $\frac{10}{13} = 0.769230\,769230 \ldots = 0.\overline{769230}$।

भागफल	**शेष**	**संशोधित भाज्य**
0	10	100
7	9	90
6	12	120
9	3	30
2	4	40
3	1	10
0	10	100

तालिका 1. $10 \div 13$ की गणना के चरण

(B) ***क्या यह सही है कि भिन्न संख्या $1/n$ का दशमलव प्रसार निश्चित रूप से सान्त होता है यदि $n = 2^a \times 5^b$, जहाँ a और b ऋणेत्तर पूर्णांक (non-negative integer) हैं?*** (n के जिन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ को सान्त दशमलव पाया गया, वह इस प्रकार हैं : $2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 32, 40, 50, 64, 80, 100, \ldots$ । यह सभी संख्याएँ उपरोक्त रूप में व्यक्त की जा सकती हैं।)

जी हाँ! मान लेते हैं कि $\frac{1}{n}$ का दशमलव प्रसार सान्त है। माना कि $\frac{1}{n} = 0.a_1a_2 \ldots a_k,$ जहाँ $a_1, a_2, \ldots a_k$ दशमलव अंक हैं । यदि k-अंकों की संख्या $a_1a_2 \ldots a_k$ को हम A से व्यक्त करें, तो स्पष्ट रूप से

$$\frac{1}{n} = \frac{A}{10^k}, \therefore A = \frac{10^k}{n} \qquad (1)$$

समीकरण 1 में दिया गया सम्बन्ध हमें बताता है कि n, संख्या 10^k का एक भाजक है। अब चूँकि 10 के अभाज्य गुणनखण्ड 2 और 5 हैं, हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि 2 और 5 के अतिरिक्त n के कोई भी अन्य अभाज्य गुणनखण्ड नहीं हो सकते। अत: किन्हीं ऋणेत्तर पूर्णांकों a और b के लिए $n = 2^a \times 5^b$ होगा।

एक संख्यात्मक उदाहरण इसे स्पष्ट कर देगा। मान लीजिए कि $n = 32$; तो हमें मिलता है $\frac{1}{32} = 0.03125$, अत: $A = 3125$ एवं $k = 5$ । तब समीकरण 1 में दिया गया सम्बन्ध होगा,

$$\frac{1}{32} = \frac{3125}{100000}, \therefore A = \frac{100000}{32}$$

दिए गए कथन का विलोम कथन भी सत्य है। अर्थात यदि किन्हीं ऋणेत्तर पूर्णांकों a और b के लिए $n = 2^a \times 5^b$ है, तो भिन्न $\frac{1}{n}$ का दशमलव प्रसार सान्त होता है। क्योंकि, यदि $a \geq b$ तो हमें मिलता है

$$\frac{1}{2^a \times 5^b} = \frac{5^{a-b}}{2^a \times 5^a} = \frac{5^{a-b}}{10^a}$$

इससे हमें एक सान्त दशमलव मिलता है, जिसमें दशमलव बिन्दु के बाद a अंक हैं। उदाहरण के लिए, $n = 2^4 \times 5^1 = 80$ पर विचार करें :

$$\frac{1}{80} = \frac{1}{2^4 \times 5^1} = \frac{5^3}{2^4 \times 5^4} = \frac{125}{10000} = 0.0125$$

इसी प्रकार, यदि $b \geq a$ तो हमारे पास होता है

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{2^a \times 5^b} = \frac{2^{b-a}}{2^b \times 5^b} = \frac{2^{b-a}}{10^b}$$

अब हमें एक सान्त दशमलव प्राप्त होता है, जिसमें दशमलव बिन्दु के बाद b अंक हैं। उदाहरण के लिए, $n = 2^1 \times 5^3 = 250$ पर विचार करें :

$$\frac{1}{250} = \frac{1}{2^1 \times 5^3} = \frac{2^2}{2^3 \times 5^3} = \frac{4}{1000} = 0.004$$

(C)

क्या यह सही है कि n के जिन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ का पुनरावृत्ति खण्ड (repetend) एक अंकीय संख्या हो, उन मानों को इन सूत्रों द्वारा निकाला जाता है : $n = 3 \times 2^a \times 5^b$ और $n = 3^2 \times 2^a \times 5^b$? ($n$ के निम्न मानों के लिए हमने $\frac{1}{n}$ के पुनरावृत्ति खण्ड को एक अंकीय संख्या पाया : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 24, 30, 36, 45, 48, 60, 72, 75, 90, 96... आदि। यह सभी संख्याएँ ऊपर दिए हुए सूत्रों में फिट बैठती हैं।)

हम दिखाएँगे कि इस प्रश्न का उत्तर भी 'हाँ' ही है। इस बात का क्या मतलब है कि 'पुनरावृत्ति खण्ड' एक अंकीय संख्या है?' मान लीजिए कि पुनरावृत्ति खण्ड का इकलौता अंक d है। इस स्थिति में $\frac{1}{n}$ का दशमलव प्रसार निश्चित रूप से इस प्रकार का होना चाहिए

$$0.a_1 a_2 a_3 \ldots a_k dddd \ldots$$

जहाँ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k$ दशमलव प्रसार के अन्य अंक हैं। मान लीजिए कि k अंकों की संख्या $a_1 a_2 a_3 \ldots a_k$ को हम A से दर्शाते हैं। तब सम्बन्ध

$$\frac{1}{n} = 0.a_1a_2a_3 \dots a_k dddd \dots$$

में पहले 10^k और फिर 10 से गुणा करने (इन गुणों को करने से दशमलव बिन्दु पहले k पद और उसके बाद एक और पद से खिसक जाता है) पर हमें निम्नलिखित दो सम्बन्ध प्राप्त होते हैं :

$$\frac{10^k}{n} = a_1a_2a_3 \dots a_k.dddd \dots = A.dddd \dots, \qquad (2)$$

$$\frac{10^{k+1}}{n} = a_1a_2a_3 \dots a_k d.dddd \dots (10A + d).dddd \dots \qquad (3)$$

यहाँ $(10A + d)$ संख्या $a_1a_2a_3 \dots a_k d$ ही है, जो के बराबर है; यानी कि $10 \times a_1a_2a_3 \dots a_k + d = 10A + d$ ।

यदि हम समीकरण (3) में से समीकरण (2) को घटाते हैं तो दशमलव बिन्दु के बाद का हिस्सा $(.dddd \dots)$ लुप्त हो जाता है और हमें मिलता है :

$$\frac{10^{k+1} - 10^k}{n} = 10A + d - A = 9A + d \qquad (4)$$

इस सम्बन्ध से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि n, संख्या $10^{k+1} - 10^k = 10^k \times 9$ का एक भाजक है। चूँकि $10^k \times 9$ के अभाज्य भाजक 2, 5 और 3 हैं, फलस्वरूप n, संख्या 10 की घात के किसी भाजक और 9 के किसी भाजक (जो कि यहाँ केवल 3 या 9 ही हो सकते हैं, क्योंकि यदि भाजक 1 होगा तो दशमलव सान्त हो जाएगा) का गुणनफल है। इसलिए $n = 3 \times 2^a \times 5^b$ या $n = 3^2 \times 2^a \times 5^b$ होगा। यह निष्कर्ष हमारे अवलोकित परिणामों से मेल खाता है।

वास्तविक संख्याओं के साथ गणना करने से यह तर्क और भी स्पष्ट हो जाएगा । मान लीजिए $n = 18$। तब $\frac{1}{n} = \frac{1}{18} = 0.05555 \dots$, इसलिए $d = 5$ (यह पुनरावृत्ति खण्ड है) और $k = 1$ (क्योंकि दोहराए जाने वाले हिस्से से पहले केवल एक अंक है)। तो अब हम दोनों तरफ़ पहले $10^1 = 10$ और फिर $10^2 = 100$ से गुणा करते हैं। तब हमें मिलता है

$$\frac{10}{18} = 0.55555 \dots,$$

$$\frac{100}{18} = 5.55555 \dots$$

इन्हें घटाने पर, हमें मिलता है :

$$\frac{100}{18} - \frac{10}{18} = 5, \text{ अर्थात } \frac{90}{18} = 5$$

तो 18, संख्या $90 = 9 \times 10$ का एक भाजक है। ध्यान दीजिए कि $18 = 2 \times 9$। यह स्पष्ट करेगा कि हमारे यह कहने का क्या मतलब है कि n, संख्या 10 की घात के किसी भाजक और 9 के किसी भाजक का गुणनफल है। (यहाँ 10 का भाजक 2 है और संख्या 9 का भाजक स्वयं 9 है।)

(D) ***n के किन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड दो अंकीय होता है?***

इसका उत्तर देने के लिए हम उसी तरह के तर्क प्रस्तुत करेंगे जैसे हमने पहले किए थे। हम देखते हैं कि इस स्थिति में दशमलव प्रसार का रूप इस प्रकार का होना चाहिए:

$$0.a_1a_2a_3\ldots a_kd_1d_2d_1d_2\ldots \qquad (5)$$

यहाँ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k, d_1, d_2$ अंक हैं और पुनरावृत्ति खण्ड दो अंकीय संख्या $D = \overline{d_1d_2}$ है। मान लीजिए कि k-अंकों की संख्या $a_1a_2a_3\ldots a_k$ को हम A से दर्शाते हैं। सम्बन्ध

$$\frac{1}{n} = 0.a_1a_2a_3\ldots a_kd_1d_2d_1d_2\ldots$$

में 10^k और फिर 10^2 से गुणा करने पर हमें निम्नलिखित दो सम्बन्ध प्राप्त होते हैं :

$$\frac{10^k}{n} = A.d_1d_2d_1d_2\ldots, \quad (6)$$

$$\frac{10^{k+2}}{n} = (100A + D).d_1d_2d_1d_2\ldots \quad (7)$$

समीकरण (7) में से समीकरण (6) को घटाने पर हमें मिलता है

$$\frac{10^{k+2} - 10^k}{n} = 100A + D - A = 99A + D \qquad (8)$$

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि n, संख्या $10^{k+2} - 10^k = 10^k \times 99$ का एक भाजक है। अत: n, संख्या 10 की घात के किसी भाजक और 99 के किसी भाजक का गुणनफल है। यहाँ 99 का भाजक, संख्या 9 का भाजक नहीं हो सकता क्योंकि इस स्थिति में पुनरावृत्ति खण्ड एक अंकीय संख्या हो जाएगा। अत: 99 का भाजक इनमें से कोई एक होना चाहिए : 11, 33, 99। इन संख्याओं को 10 की घात के भाजकों के साथ गुणा करने पर हमें n के वांछित मान प्राप्त होते हैं। अत: n का मान इनमें से एक होना चाहिए : 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 110, 132, ... । यह निष्कर्ष हमारे अवलोकित परिणामों से एकदम मेल खाता है।

(E) n के किन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड तीन अंकीय होता है?

क्योंकि अब तलक आप इस रणनीति से परिचित हो चुके होंगे, अत: हम आरम्भिक पदों को छोड़ देते हैं। अब निष्कर्ष यह है कि $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड तीन अंकीय संख्या निश्चित रूप से तभी होगा जब n, संख्या $10^k \times 999$ (k के किसी मान के लिए) का भाजक हो, परन्तु संख्याओं $10^k \times 99$ और $10^k \times 9$ में से किसी का भी भाजक नहीं हो। चूँकि 999 का अभाज्य गुणनखण्ड $999 = 3^3 \times 37$ है, n के गुणनखण्ड में शामिल 999 का भाजक इन संख्याओं में से एक होना चाहिए : 27, 37, 111, 333, 999 । इन संख्याओं को 10 की घात के भाजकों से गुणा करने पर हमें n के वांछित मानों की प्राप्ति होती है। अत: n का मान इनमें से एक होना चाहिए : 27, 37, 54, 74, 108, 148, 135, 175,... । एक बार फिर यह निष्कर्ष हमारे द्वारा अवलोकित परिणामों से मेल खाता है।

(F) *n के किन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड चार अंकीय होता है?*

इसका उत्तर देने से पूर्व हमें यह अवलोकित तथ्य बता देना चाहिए कि $1 \leq n \leq 100$ के बीच n के किसी भी मान के लिए $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड चार अंकीय संख्या नहीं है।

अब समान चरणों का पालन करते हुए हम यह देखते हैं कि $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार के पुनरावृत्ति खण्ड में चार अंक निश्चित रूप से तभी होंगे जब किसी ऋणेत्तर पूर्णांक k के लिए n, संख्या $10^k \times 9999$ का भाजक हो, परन्तु संख्याओं $10^k \times 9$, $10^k \times 99$ एवं $10^k \times 999$ में से किसी का भी भाजक नहीं हो। चूँकि 9999 के अभाज्य गुणनखण्ड $9999 = 3^2 \times 11 \times 101$ है, अत: n में शामिल 9999 के भाजक इनमें से एक होना चाहिए : 101, 303, 909, 1111, 3333, 9999 । इन संख्याओं को 10 की घात के भाजकों से गुणा करने पर हमें n के वांछित मानों की प्राप्ति होती है। ध्यान दीजिए कि हमारे द्वारा सूचीबद्ध किए गए n के मानों में कोई भी दो अंकीय संख्या नहीं है (सूची में शामिल n का सबसे छोटा मान 101 है, जो कि तीन अंकीय संख्या है) यह अवलोकित निष्कर्ष को स्पष्ट करता है कि क्यूँ $1 \leq n \leq 100$ के बीच n के किसी भी मान के लिए $\frac{1}{n}$ का पुनरावृत्ति खण्ड चार अंकीय संख्या नहीं है। (*टिप्पणी* : यदि हम अपनी जाँच को एक और संख्या, यानी कि 101, तक जारी रखते तो हमें एक ऐसा उदाहरण मिल जाता जिसका पुनरावृत्ति खण्ड चार अंकीय होता।)

(G) *n के किन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड पाँच अंकीय होता है?*

इसका उत्तर देने के लिए सर्वप्रथम हम संख्या 99999 के गुणनखण्ड की जाँच करते हैं। विशेषत: हमें 99999 के वे भाजक ढूँढ़ने हैं जो संख्याओं 9999, 999, 99 एवं 9 के भाजक न हों। अब चूँकि 99999 के अभाज्य गुणनखण्ड $3^2 \times 41 \times 271$ हैं, अत: संख्याओं 41, $3 \times 41 = 123$, $3^2 \times 41 = 369$, 271, $3 \times 271 = 813$, $3^2 \times 271 = 2439$, 41×271, $3 \times 41 \times 271$, $3^2 \times 41 \times 271$ में से कोई-न-कोई संख्या अवश्य रूप से n की भाजक होगी। इन संख्याओं को 10 की घात के भाजकों से गुणा करने पर n के वे मान प्राप्त होते हैं जिनके लिए पुनरावृत्ति खण्ड 5 अंकीय होता है। हमें n के यह मान प्राप्त होते हैं : 41, 82, 123, 164, 205,... जो हमारे द्वारा अवलोकित परिणामों से मेल खाते हैं।

(H) *n के किन मानों के लिए $\frac{1}{n}$ के दशमलव प्रसार का पुनरावृत्ति खण्ड छह अंकीय होता है?*

इसका उत्तर देने के लिए हमें संख्या 999999 के गुणनखण्डों की जाँच करनी होगी। विशेषत: हमें 999999 के उन भाजकों को खोजना है जो 99999, 9999, 999, 99 या 9 के भाजक न हों। चूँकि $999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$ है। यहाँ पर जो अभाज्य संख्याएँ नई हैं, वह हैं 7 और 13 । अत: जिन भाजकों को हम ढूँढ़ रहे हैं, वे हैं : 7, 13, 21, 29, 63, 77, 91, 117,... । इन संख्याओं को 10 की घात के भाजकों से गुणा करने पर हमें n के वांछित मानों

की प्राप्ति होती है। बाक़ी उन स्थितियों के बारे में आप पता कीजिए जब पुनरावृत्ति खण्ड 7, 8, 9 या 10 अंकों का हो। प्रत्येक स्थिति में ऊपर बताई गई पद्धति अपनाई जा सकती है । इस कार्य में आपको निम्न अभाज्य गुणनखण्डों की आवश्यकता पड़ेगी : $9999999 = 3^2 \times 239 \times 4649$, $99999999 = 3^2 \times 11 \times 73 \times 101 \times 137$, $999999999 = 3^4 \times 37 \times 333667$ तथा $9999999999 = 3^2 \times 11 \times 41 \times 271 \times 9091$।

हम आशा करते हैं कि आपको अपने प्रयासों में सफलता मिले।

शैलेश शिराली और **पद्मप्रिया शिराली** ऋषि वैली स्कूल में स्थित कम्युनिटी मैथेमैटिक्स सेंटर (केएफआई) की देखरेख करते हैं। वर्तमान में वे पुणे के पास स्थित सह्याद्रि स्कूल (केएफआई) में कार्यरत हैं। उनसे shailesh.shirali@gmail.com और padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : सम्पदा श्रीवास्तव **पुनरीक्षण तथा कॉपी एडीटिंग :** कविता तिवारी
सम्पादन : राजेश उत्साही