

गणित में सुदृढीकरण और अभ्यास

हृदय कान्त दीवान

आमतौर पर यह माना जाता है कि गणित सीखने में सीखे जाने वाली अवधारणाओं को पुख्ता करने के लिए अभ्यास की आवश्यकता होती है। यद्यपि हम जानते हैं कि सीखने को इस रूप में देखने की ज़रूरत है कि यह सीखी गई बातों का जहाँ ज़रूरी हो वहाँ उपयोग करने की क्षमता हो, लेकिन बहुत से लोग कहते हैं कि उन्होंने जो गणित सीखा था, अब ज़रूरत पड़ने पर वे उसका उपयोग करने की स्थिति में नहीं हैं। उदाहरण के लिए किसी दुकानदार की तरह – जो बिक्री और खरीद का हिसाब फटाफट और कुशलता से कर लेता है – हममें से बहुत से लोग इतनी कुशलता से हिसाब करने की अपनी क्षमता के बारे में आश्वस्त नहीं रहते हैं। यहाँ तक कि जैसा हम स्कूल के समय लिखकर हिसाब करते थे, उस तरह हिसाब करने की क्षमता के बारे में भी आश्वस्त नहीं रहते और इसकी बजाय कैलकुलेटर का उपयोग करना पसन्द करते हैं।

हमारी समस्या यह है कि कक्षाओं में एक शिक्षक के रूप में और आमतौर पर इन विचारों को सीखने वाले बच्चों के साथ किए जाने वाले क्रियाकलाप में, हमें ऐसी परिस्थितियाँ बनाने के तरीके ढूँढ़ना मुश्किल और शायद महत्वहीन लगता है जो सीखने वाले के लिए सहज और स्वाभाविक हों। हमें न केवल यह सोचना मुश्किल लगता है कि बच्चे की सीखने में मदद कैसे करें, बल्कि हम अक्सर यह भी नहीं जानते कि ऐसा करने के लिए क्या किया जा सकता है और कैसे किया जा सकता है।

औपचारिक गणित शिक्षण में अभ्यास विद्यार्थी को विशिष्ट प्रकार के सवालों या यहाँ तक कि किसी खास सवाल को हल करने के लिए अपनी रणनीतियाँ खोजने में सक्षम बनाने की बजाय निश्चित प्रकार के तरीकों से पढ़ाने पर जोर देते हैं।

गणित सीखना यह सुनिश्चित करने पर आधारित होना चाहिए कि शिक्षार्थियों के दिमाग में बुनियादी अवधारणाओं का विकास और विस्तार हो। जैसे-जैसे अधिक जटिल अवधारणाओं से परिचय होता है, वैचारिक संरचना को संशोधित करने की आवश्यकता होती है जिसके लिए शुरुआती चरणों में बनाए गए विचारों में पुनः समायोजन करना पड़ता है।

अभ्यास इस तरह से होने चाहिए कि शिक्षार्थी लगातार इस दिशा में सोचने को मजबूर हो और अन्य तरीकों या फ़र्क से अवगत रहे। अभ्यास, शिक्षार्थी को जिन्हें हल किया जाना है उन गणितीय उद्देश्यों को खुद से पहचानने और कार्य की व्याख्या करने, चरणों का चयन करने और तदनुसार उत्तर पर पहुँचने में सक्षम बनाने योग्य होने चाहिए। कक्षाकार्य हो या होमवर्क, दिए गए कार्यों की प्रकृति ऐसी होनी चाहिए जिन्हें शिक्षार्थी केवल यांत्रिक रूप से प्रक्रियाएँ अपनाते हुए हल न करें, बल्कि उस कार्य की अन्तर्निहित अवधारणाओं के साथ गणित से जुड़े मुद्दों के बारे में भी सोचें और जुड़ें।

शिक्षण के मौजूदा तरीके

यहाँ जिन बातों को आवश्यक बताया गया है, गणित की कक्षाओं में अभ्यास की प्रकृति और स्वरूप आमतौर पर उससे बहुत अलग है। आपने भी कभी प्राथमिक कक्षा के पास से गुजरते हुए सुना होगा या अब भी सुन सकते हैं कि स्कूलों में एक शिक्षक या कोई शिक्षार्थी कुछ बोलता है और उसके पीछे समवेत स्वरों में पूरी कक्षा उसे दोहराती है। ये आवाज़ें ऊर्जा से भरपूर होती हैं। और जो कुछ भी बार-बार दोहराया जा रहा होता है उसमें हर कोई सक्रिय रूप से शामिल होता हुआ लगता है। संख्या नामों को क्रम से बोलना या उन्हें दोहराना अभ्यास के उपयोगी और महत्वपूर्ण तत्व माने जाते हैं। किसी एल्गोरिथम (किसी प्रक्रिया में नियमों का समूह) में चरणों के क्रम को याद रखने के लिए रट्टा-मंत्रों की भी रचना की जाती है। इसी एक लक्ष्य के लिए सभी स्कूल विभिन्न उपकरणों का उपयोग करते हैं, जैसे कुछ गैजेट का और कुछ टीएलएम का। साधारण ब्याज की गणना, पूर्ण या आंशिक संख्याओं के जोड़, घटा, गुणा और भाग या दशमलव संख्याओं के साथ काम करने के सभी सूत्रों के सुदृढीकरण के लिए सामग्री तैयार की गई हैं, जो उन्हीं चरणों को बार-बार दोहराने या उन्हीं तथ्यों को बार-बार याद करने में मदद करती है। इस स्थिति में सवाल उठते हैं कि क्या यह उस प्रकार का अभ्यास है जो गणित सीखने के लिए प्रासंगिक है? क्या इससे गणित की 'वास्तविक' शिक्षा में मदद मिलती है?

अवधारणाएँ और सुदृढ़ीकरण

यह पता लगाने के कई तरीके हैं कि गणित सीखने में प्रमुख क्या है और समझ को पुख्ता बनाने की योजना कैसे बनाई जा सकती है – जो गणित के सन्दर्भ में विशेष रूप से महत्वपूर्ण एक पहलू है। गणित सीखने का एक प्रमाण इस तथ्य में है कि शिक्षार्थी समस्याओं/सवालों को हल करने में सक्षम है। लेकिन इसमें दिक्कत इस बात की है कि हल किए जाने वाले सवालों की विविधता और प्रकार उस तरह के अभ्यास सवालों तक ही सीमित होते हैं जिस तरह के सवाल अध्यायों में उदाहरण के रूप में हल किए गए होते हैं और उन्हीं चरणों का अनुसरण करते हुए अभ्यास के सवालों को भी हल करना होता है। शिक्षक द्वारा अध्याय को इस तरीके से पढ़ाया जाता है कि सवालों को थोड़ा और विस्तार से बताते हुए हल तक पहुँचने की विधि/चरण समझाई जाती है। शिक्षक पुस्तक से कुछ अभ्यास सवालों को हल करके दिखा देते हैं और शिक्षार्थी उन हल को अपनी नोटबुक में उतार लेते हैं। निर्धारित पाठ्यपुस्तकें भी इस तरह से तैयार की गई हैं कि वे विस्तार से हल किए गए उदाहरण प्रस्तुत करती हैं और ऐसी तकनीकें प्रदान करती हैं, जिन्हें याद रखा जाना चाहिए और उनका पालन किया जाना चाहिए। कुछ पाठ्यपुस्तकें जो थोड़ी अलग तरह से लिखी गई हैं, सुझाए जाने पर भी उनका इस्तेमाल नहीं किया जाता है। यह स्पष्ट रूप से मान लिया जाता है कि किताबों में जिस तरह के विस्तृत उदाहरण और सवाल दिए गए हैं, वैसे ही सवाल आकलन में या यहाँ तक कि प्रतियोगिताओं में भी पूछे जाएँगे, जहाँ एकमात्र अपेक्षा 'परीक्षा में सफल होना' है।

सुदृढ़ीकरण के वर्तमान तरीके

यदि हम उन तरीकों की जाँच करते हैं जिनसे आमतौर पर समझ को पुख्ता किया जाता है, तो हमें अक्सर इसकी दो धाराएँ मिलती हैं: दोनों धाराओं का मुख्य सिद्धान्त सुदृढ़ीकरण के उद्देश्य के रूप में सवालों के हल पर पहुँचना है। और यह हासिल किया जाता है आकलन में सम्भवतः पूछे जाने वाले सवालों को हल करने के लिए सरल तरीके उपलब्ध करवाकर या तो हल को याद करके या एक सरल, यंत्रवत पालन की जाने वाली विधि से। इसका मतलब या तो एक ही प्रश्न को दोहराना या उनका तब तक बार-बार अभ्यास करना है जब तक कि टेस्ट में सही ढंग से हल करने के लिए महारत हासिल न हो जाए (इस मामले में, याद कर लिया जाता है)।

उदाहरण के लिए, जैसा कि उल्लेख किया गया है, कई स्कूलों में प्री-प्राइमरी से कक्षा-5 तक पीरियड का कुछ समय ज़ोर-ज़ोर से रट्टा-पाठ और कॉपी में बार-बार लिखने या उतारने के लिए होता है, जिसमें बच्चों को संख्या नाम, पहाड़े और यहाँ तक कि जोड़ की टेबल भी तुकबन्दी में सुनाने के तरीके बताए

जाते हैं। ये कार्य अक्सर बच्चों को मनोरंजक और विशेष रूप से दिलचस्प लगते हैं क्योंकि ये नियमित तौर पर किए जाने वाले और सरल होते हैं। बच्चे बार-बार लिखने के कार्यों को फटाफट पूरा करने के लिए अपनी रणनीति विकसित कर लेते हैं। ऐसे कक्षा अवलोकन हैं जो बताते हैं कि संख्याओं, उदाहरण के लिए 1 से 100 तक संख्याओं, को उतारते समय बच्चे एक-एक अंक लिखकर कार्य पूरा करते हैं, बिना यह सोचे कि वे दो अंकों की संख्याएँ लिख रहे हैं!

दूसरे प्रकार में किसी एक तरीके का अभ्यास करना शामिल होता है, जिससे उस तरीके पर पकड़ बनाई जा सके। इस कार्य में चरणों को याद होने तक कार्य को दोहराने के अवसर दिए जाते हैं। जब शुरुआती स्तर वाले शिक्षार्थियों को संक्रियाओं के संख्यात्मक योग हल करने के लिए दिए जाते हैं, तो अभ्यास इस पर केन्द्रित होता है कि उन्हें स्थानीय मान के अनुसार कॉलम में (एक के नीचे एक) लिखकर संख्याओं पर काम कराया जाए और यांत्रिक रूप से हासिल-उधार लेकर कॉलम-वार संक्रियाओं को हल किया जाए। शिक्षार्थियों का जोड़ी जाने वाली संख्याओं और जोड़ के परिणामों पर कोई ध्यान नहीं होता है। यही प्रक्रिया गुणा और भाग के साथ भी की जाती है, जिसमें वे जोड़ी जाने वाली और परिणाम के रूप में प्राप्त होने वाली संख्याओं के बारे में बिना किसी जानकारी के कड़ाई से विशेष एल्गोरिदम को लागू करते हैं। यहाँ तक कि आगे बढ़ने पर भिन्न संख्याओं और समीकरणों को हल करने में भी यही हालात बने रहते हैं। सुदृढ़ीकरण कार्य इस प्रकार बनाए गए हैं कि शिक्षार्थी केवल उदाहरणों के माध्यम से समझाई और सिखाई गई विधि को लागू कर सकता है। अक्सर, मिश्रित अभ्यास में वह विशेष विधि सुझाई जाती है जो किसी सवाल को हल करने के लिए सबसे उपयुक्त होगी। इस प्रकार के सुदृढ़ीकरण का उद्देश्य प्रत्येक निर्दिष्ट तरीकों में अपनाए जाने वाले चरणों को सीखना है।

स्पष्ट रूप से, दूसरे प्रकार के सुदृढ़ीकरण में शिक्षार्थियों को ऐसे सवाल मिलते हैं जो हल किए गए उदाहरणों जैसे ही होते हैं। हालाँकि इन सवालों में संख्याएँ बदली हुई हो सकती हैं, लेकिन हल करने के लिए अपनाई जाने वाली विधि में कोई बदलाव नहीं होता है। यह विधि हल करने की एक मानक प्रक्रिया हो सकती है या सवाल हल करने का कोई शॉर्टकट तरीका हो सकता है, जैसा कि भिन्न के सवाल हल करने के लिए शॉर्टकट तरीके बनाए जाते हैं। हल करने की प्रक्रिया के एक हिस्से के रूप में प्रत्येक संक्रिया के अलग-अलग चरण होते हैं। हालाँकि, इन विधियों को कक्षाओं में उन अवधारणाओं के रूप में नहीं पढ़ाया जाता है जो बाद में आने वाले नए विचारों की नींव रखती हैं, बल्कि ये अपने आप में पूर्ण प्रक्रियाओं या तैयार तकनीकों के रूप में सिखाई

जाती हैं जिनका एक मैनुअल की तरह पालन करना होता है। इसका मतलब यह है कि सुदृढ़ीकरण आगे की शिक्षा और गणित में रुचि के लिए वैचारिक रूप से मदद नहीं करता है। इसकी बजाय, यह अपेक्षा निर्धारित करता है कि बाद के सभी कार्य, जिसमें आकलन भी सम्मिलित हैं, इसी तरह के होंगे। शिक्षार्थियों को सोचने और/ या मिश्रित विधियों का उपयोग करने या दिए गए सवाल के लिए उपयुक्त विधि खोजने का प्रयास करने की आवश्यकता नहीं होती है। उम्मीद यह है कि प्रश्न स्पष्ट रूप से इंगित करेगा कि क्या करना है और यह ज़ाहिर रहता है कि किन प्रक्रियाओं और चरणों का पालन करना है।

वैचारिक क्षमता का विकास करना

उन शिक्षार्थियों के साथ बातचीत के दौरान, जिन्हें परिचित तरह के अभ्यासों से रेंडम लेकिन स्तर-उपयुक्त कुछ सवाल दिए गए थे, यह उभरकर आया कि वे इस बात से परेशान थे कि कि कौन-से सवाल में कौन-सी संक्रियाएँ लगानी हैं और किन संख्याओं पर लगानी हैं। उन्होंने यह तो 'सीखा' है कि विशिष्ट ज्ञात स्थितियों में सभी संक्रियाएँ/ प्रक्रियाएँ कैसे इस्तेमाल करनी हैं, लेकिन वे यह नहीं जानते हैं कि इनमें से प्रत्येक संक्रिया/ प्रक्रिया का वास्तव में क्या मतलब है। उन्हें भिन्नो पर संक्रिया लागू करने की प्रक्रियाओं का अभ्यास कराया गया है, लेकिन वे शायद ही यह जानते होंगे कि 'भिन्न' का मतलब हर और अंश दोनों को एक साथ रखने से है। या यह कि दशमलव संख्याओं में दशमलव बिन्दु के बाद वाले अंक उसी संख्या का हिस्सा हैं, वे स्वतंत्र संख्या नहीं हैं। यह सब उन्हें पता होना चाहिए लेकिन शिक्षार्थियों को संक्रियाएँ सिखाकर आगे बढ़ाने की हमारी जल्दबाज़ी में हम उन्हें अन्तर्निहित अवधारणाओं से जुड़ने ही नहीं देते हैं और उन्हें यांत्रिक रूप से पालन करने और संक्रियाओं के परिणाम देने के लिए नियम बताते हैं और वे यह बिना समझे कर देते हैं कि वे किन संख्याओं के साथ काम कर रहे हैं या जिस परिणाम पर वे पहुँच रहे हैं वे क्या हैं। विधियों, युक्तियों, शॉर्टकट्स और प्रक्रियाओं की अधिकता के कारण स्थिति और भी बदतर हो जाती है, जिसके परिणामस्वरूप प्रक्रियाएँ भ्रमित कर देती हैं और उन्हें इस बात का कोई अन्दाज़ा नहीं होता है कि परिणाम कितना आना चाहिए (या परिणामी संख्या कितनी बड़ी होना चाहिए)। नतीजतन, शिक्षार्थी अपने परिणामों की समीक्षा करने या अपनाई गई प्रक्रियाओं के बारे में सोचने में असमर्थ हैं।

मुद्दा यह है कि अगर हम स्कूली गणित को एक ऐसी गतिविधि के रूप में सोचते हैं जो सीखी गई बातों और जीवन के अनुभवों के बीच सम्बन्ध बनाती है, तो हमें शिक्षण की एक अलग पद्धति अपनानी होगी। इस

पद्धति में स्थान की समझ, गणितीय पैटर्न, सममिति, अनुपात और समानुपात आदि की अवधारणाएँ हों जो नोटबुक और कक्षाओं तक ही सीमित न रहें बल्कि ये शिक्षार्थियों द्वारा चीज़ों और उनके विचारों को व्यवस्थित करने, विचारों को सम्प्रेषित करने और उनके द्वारा बनाए गए डिज़ाइनों के साथ अन्तःक्रिया के अवसर उपलब्ध करवाएँ। इन विचारों/ अवधारणाओं को उस सहज तरीके का हिस्सा बनने की आवश्यकता है जिसमें एक शिक्षार्थी अपने आस-पास की दुनिया को देखता है और उसे आत्मसात करता है। इसका मतलब यह है कि शिक्षार्थी गणित करने और दुनिया को देखने के लिए इसका उपयोग करने में सहज हो जाता है। ऐसा करने में सक्षम होने के लिए यह आवश्यक है कि हम इस तथ्य को रेखांकित करें कि सीखने में समझ शामिल हो, अन्यथा यह सीखना नहीं है।

हमें यह याद रखने की आवश्यकता है कि अभ्यास और सुदृढ़ीकरण महत्वपूर्ण हैं, लेकिन केवल तभी जबकि वह यांत्रिक और दोहराव वाले न हों। बच्चों को दिए गए कार्यों से उनकी दिमागी कसरत होनी चाहिए और उन्हें गणित से सम्बन्धित इबारत को पढ़ने और समझने की क्षमता विकसित करने का अवसर देना चाहिए। इसके बाद शिक्षार्थियों को नए सवालों के हल निकालने के लिए कार्यविधियाँ तैयार करने में जोड़ना चाहिए, जिससे उन्हें नए सवालों का सामना करते समय आत्मविश्वास महसूस हो। गणित के पोजिशन पेपर (एनसीईआरटी 2006) के अनुसार, 'बच्चों को वैचारिक क्षमता और आत्मविश्वास विकसित करने के लिए सार्थक समस्याओं/ सवालों का निर्माण करने में सक्षम होना चाहिए।'

गणित में अभ्यास का क्या मतलब है

अभ्यास का मतलब उन सवालों/ समस्याओं से जूझने के अवसर होना चाहिए जो नए हों, ताकि शिक्षार्थी दी गई परिस्थिति और प्राप्त किए जाने वाले परिणाम में अन्तर कर पाने में सक्षम हों पाएँ। अभ्यास और सुदृढ़ीकरण की प्रक्रिया में गणित सम्बन्धी पढ़ने के कार्य, जैसे कि पाठ्यपुस्तकों और अन्य स्रोतों के अंश को पढ़ना, शामिल होने चाहिए। चुने गए टेक्स्ट वैचारिक समझ को बढ़ाने वाले, नई प्रकार की समस्याओं में संलग्न करने वाले, गणितज्ञों के बारे में और गणितीय विचारों का विकास जैसी अन्य चीज़ों से सम्बन्धित हो सकते हैं। गणित को करने और समझने के तरीकों को खोजने और उनके बारे में सोचने की क्षमता गणित में और उसके बारे में रुचि और जिज्ञासा बनाए रखती है। यह सुनिश्चित किया जाना चाहिए कि हल करने का केवल एक ही तरीका

न हो। जो बच्चे पीछे रह जाते हैं उनके पास अपनी गति से आगे बढ़ने का समय हो, भले ही कक्षा के कार्य उन बच्चों की गति से आगे बढ़ें जो अधिक प्रतिभाशाली दिखाई देते हैं। पाठ्यपुस्तकों और अन्य सामग्रियों से टेक्स्ट पढ़ना सीखने का उद्देश्य यह सुनिश्चित करना है कि बच्चे सक्षमता, आत्मविश्वास और रुचि के साथ गणितीय टेक्स्ट पढ़ने और समझने में सक्षम बनें।

गणितीय सामग्री पर छोटे समूहों के बीच अभ्यास और चर्चा करने से भी गणित में रुचि बनाए रखने में महत्वपूर्ण सहायता मिल सकती है। किसी सवाल/समस्या को हल करने या किसी पाठ को बारीकरी से समझने के लिए एक टीम के रूप में किया गया प्रयास कई उद्देश्यों को पूरा करता है। हालाँकि, पूरक के तौर पर सामूहिक काम के साथ-साथ व्यक्तिगत अभ्यास के लिए भी समय दिया जाना चाहिए, जिसके बाद किए गए काम की शिक्षक के साथ चर्चा हो या इसे पूरी कक्षा के सामने प्रस्तुत किया जाना चाहिए है।

दूसरा महत्वपूर्ण मुद्दा, जिसके बारे में हमें हर समय सोचते रहना चाहिए है, जाँच-पड़ताली कामों की प्रकृति और दिए गए सवालों के प्रकार। हमने जो चर्चा की है उससे कुछ बिन्दु स्पष्ट रूप से उभरकर आए हैं। उदाहरण के लिए, शिक्षार्थियों के साथ किए गए इन अभ्यास कार्यों से न केवल सवालों (न केवल दिए गए और पहले से हल किए गए सवाल बल्कि उचित स्तर के कोई भी नए सवाल) को हल करने की क्षमता विकसित करने में मदद मिलनी चाहिए, बल्कि इनसे कुछ हद तक सवाल को खोलकर उसे हल करने के कुछ चरण पता करने में भी मददगार होना चाहिए। इसलिए, अभ्यास का मतलब उन सवालों से जुड़ने के अवसर होना चाहिए जो नए हैं, ताकि शिक्षार्थी, जो दिया गया है और जो उन्हें प्राप्त करना है, दोनों में अन्तर करने में सक्षम हो पाएँ।

चिन्तन, पुनः अभिव्यक्ति और पुनर्गठन

जैसे-जैसे बच्चे गणित सीखते हैं, उन्हें उन अनेक तरीकों के बारे में सोचने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है जिनसे वे कोई विशेष संख्या प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए 5×2 , 10×1 , $6+4$, $15-5$ आदि द्वारा संख्या 10 प्राप्त की जा सकती है। या ये समझें कि सभी वर्ग आयत हैं और वे समान्तर चतुर्भुज और चतुर्भुज भी हैं क्योंकि उनमें वे भी गुण हैं जो किसी सामान्य चतुर्भुज में होते हैं, साथ-ही-साथ उनमें वे विशेष गुण भी हैं सभी चतुर्भुजों में नहीं होते। या ये कि भले ही आयत और वर्ग, दोनों की आमने-सामने की भुजाएँ और कोण बराबर होते हैं, परन्तु आयत की चारों भुजाएँ बराबर नहीं होतीं, अतः हर आयत वर्ग नहीं होता।

विभिन्न समूहों (सेट्स) के गुणों की कल्पना, सामान्यीकरण

और विशिष्टीकरण करने की यह क्षमता ऐसे सम्बन्ध बनाने में मदद करती है। यदि गणितीय अवधारणाओं के साथ सहजता और आत्मविश्वास है तो उनके बारे में सोचने से शिक्षार्थी में अधिक-से-अधिक सम्बन्ध या जुड़ाव बनाते रहेंगे। उदाहरण के लिए, किसी मिठाई का आधा हिस्सा, कक्षा का तीन-चौथाई हिस्सा जैसे रोजमर्रा के ठोस वस्तुओं के अनुभव से लेकर भिन्न को भाग का एक रूप तक की समझ बनाने में पिछली समझ में संशोधन की आवश्यकता होती है, जो अवधारणाओं के गुणों की समझ विकसित करती है। अभ्यास और सुदृढ़ीकरण को इनके प्रति सचेत रहते हुए, चिन्तन, पुनः अभिव्यक्ति और सुधार के अवसर प्रदान करने के अवसर उपलब्ध करवाने चाहिए। ऐसे अवसर केवल कुछ नियमों के आधार पर समस्याओं का समाधान करने से प्रदान नहीं किए जा सकते हैं।

सुदृढ़ीकरण के रूप में समझना

किसी भाषा में शब्दों के साथ खेल की तरह, गणित का एक आकर्षक पहलू यह है कि कोई भी गणितीय वस्तुओं के साथ खेल सकता है और सामान्यीकरण और सूत्रीकरण कर सकता है। यह सामान्यीकरण और सूत्रीकरण उन शिक्षार्थियों के लिए बिल्कुल नए हैं, जिन्होंने उन्हें अभी-अभी खोजा है। शिक्षार्थी को ज्ञान प्राप्त करने के तरीके को अभिव्यक्त करने की अनुमति देने से उन्हें आत्मविश्वास और स्पष्टता दोनों मिलती है, जिससे उनमें बुनियादी बातों की अधिक जटिल समझ पैदा होती है। बनाए गए सम्बन्धों के लिए शिक्षार्थी जो तार्किक कारण तैयार करते हैं, वे उनके स्वयं के लिए गणितीय प्रमाणों को समझने और विकसित करने की धारणा और क्षमता विकसित करने में मदद करते हैं। प्रमेयों, सर्वसमिकाओं व कथनों और इनके सिद्धिकरण (proofs) को किसी टास्क के रूप में याद रखने की तुलना में यह समझना कि किसी चीज़ को सिद्ध करने का मतलब क्या है और तार्किक, अनिवार्य सूत्र को इस तरह से सिद्ध करने की क्या ज़रूरत है अधिक सुदृढ़ीकरण करेगा।

इस प्रकार के सुदृढ़ीकरण और अभ्यास से किसी गणितीय कथन के अपवाद खोजने या दूसरों द्वारा दिए गए कथनों को खारिज करने के लिए गणितीय कथन तैयार करने में मदद मिलती है। इस तरह के अभ्यास इस पर समझ बनाने में भी मददगार होते हैं कि गणितीय कथन कैसे दिए जाते हैं और इसे विशिष्ट होने की आवश्यकता क्यों है।

निष्कर्ष

संक्षेप में कहें तो, अभ्यास आकर्षक होना चाहिए और इसके लिए सोच-विचार की आवश्यकता होनी चाहिए। इसे जिज्ञासा और खोजबीन की प्रवृत्ति को बढ़ावा देने वाला होना चाहिए। अभ्यास का अर्थ सूत्रों, नियमों और परिभाषाओं को

याद रखना नहीं है, बल्कि एक शिक्षार्थी को अपनी स्वयं की परिभाषाएँ, सामान्यीकरण और समस्याओं को हल करने के तरीके विकसित करने में सक्षम बनाना है। और किसी समस्या

को देखते समय इसे समझने की कोशिश करना, क्या खोजना है उसे समझना और आगे बढ़ने का रास्ता विकसित करना अभ्यास है।



हृदय कान्त दीवान 40 वर्षों से अधिक समय से विभिन्न क्षमताओं में शिक्षा के क्षेत्र में काम कर रहे हैं। वर्तमान में वे अनुवाद पहल, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के साथ काम कर रहे हैं। वे एकलव्य, भोपाल के संस्थापक-सदस्य और विद्या भवन सोसायटी, उदयपुर के शैक्षिक सलाहकार हैं। विशेष रूप से, वे शैक्षिक नवाचार और राज्य शैक्षिक तंत्रों में संशोधन के प्रयासों से जुड़े रहे हैं। उनसे hardy@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : यशोधरा कनेरिया **पुनरीक्षण :** उमा सुधीर **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय