अंक 18 | मार्च 2024
चौ-मासिक | बेंगलूरु
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय का प्रकाशन

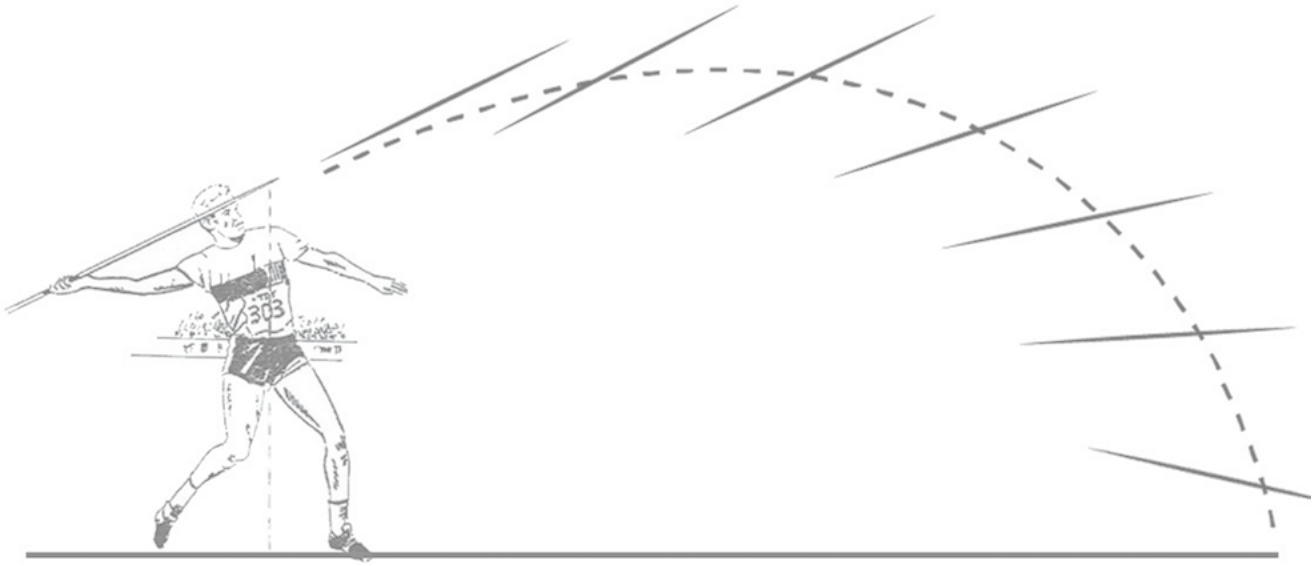
Azim Premji University

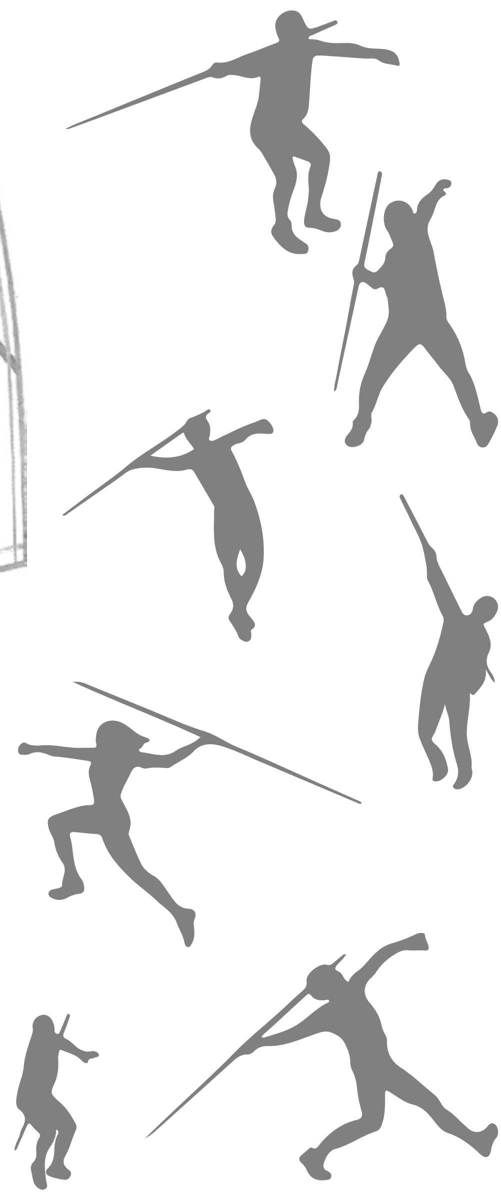
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित का लक्ष्य

पुलआउट
गुणन में महारत





'लेकिन इसका क्या मतलब है???' यह सवाल कई गणित शिक्षक सुनते हैं, जब वे अपने विद्यार्थियों को उन अवधारणाओं और एल्गोरिदम की 'उपयोगिता' के बारे में समझाने के लिए संघर्ष करते हैं जिन्हें वे विद्यार्थी सीख रहे हैं। मनुष्य की हर गतिविधि में गणित की सर्वव्यापकता, इस प्रश्न का उत्तर देना आसान और कठिन दोनों बनाती है। आसान इसलिए क्योंकि यह बहुत स्पष्ट है और कठिन इसलिए क्योंकि इसे संक्षेप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है। उदाहरण के लिए इस छवि को लें : हम इस खेल में आकृतियाँ, कोण, संख्याएँ, माप, डेटा, पैटर्न, इतिहास और संस्कृति को आपस में जुड़ा हुआ देखते हैं। फिर भी जब हम इस खेल में ख़ुद को बेहतर बनाने का प्रयास करते हैं तो गणित के प्रति कितने सचेत होते हैं?

सम्पादक की ओर से...

एट राइट एंगल्स, पेशेवर शिक्षकों और शिक्षक-प्रशिक्षकों को अच्छी गुणवत्ता वाले शिक्षण संसाधन प्रदान करने के अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन के प्रयास का हिस्सा है। हमारा उद्देश्य शिक्षा, शिक्षणशास्त्र और ज़मीनी अनुभवों पर चल रहे वर्तमान विमर्श और नज़रियों पर स्कूली शिक्षकों, पेशेवरों और शिक्षाविदों के बीच संवाद को बढ़ावा देना है। हम चाहते हैं कि शिक्षकों की क्षमता निर्माण हो और सीखने-सिखाने की अधिक अनुभवात्मक और सार्थक प्रक्रियाओं में मदद मिले। उद्देश्यपूर्ण और जुनून से भरे शिक्षण का जश्न मनाने के लिए, *एट राइट एंगल्स* भारत और जिस समाज में हम रहते हैं उसके यथार्थ में रची-बसी अनुभवात्मक और व्यावहारिक समझ को उभारता है।

जैसा कि नवम्बर 2023 के सम्पादकीय में थोड़े विस्तार से बताया गया था, *एट राइट एंगल्स* का मार्च 2024 का अंक पिछले अंकों से काफ़ी अलग है। इसलिए, यहाँ पर सभी पिछले अंकों के लिए मुख्य सम्पादक के रूप में सक्रिय नेतृत्व और मार्गदर्शन के लिए शैलेश शिराली को धन्यवाद देना लाज़मी है। पत्रिका आज आपके सामने जिस रूप में है, उसे बनाने में महत्त्वपूर्ण योगदान देने के लिए सम्पादन समिति के सदस्यों तथा के. सुब्रमण्यम, पृथ्वीजीत डे, शशिधर जगदीशन, ए. रामचन्द्रन और जोनाकी घोष को भी हमारा धन्यवाद। जब भी सम्भव होगा हम आगे भी उनसे सुझाव और सहयोग लेते रहेंगे।

हमारे मुख्य पाठक सार्वजनिक शिक्षा तंत्र में प्राथमिक और उच्च प्राथमिक विद्यालयों के शिक्षक हैं। इसलिए इस अंक की और इसके बाद के अंकों की सामग्री उनके और ज़मीनी स्रोत व्यक्तियों के लिए सीधे प्रासंगिक होगी; ये स्रोत व्यक्ति शिक्षकों के साथ काम करके उन्हें बेहतर ढंग से पढ़ाने में मदद करते हैं ताकि उनके विद्यार्थी बेहतर ढंग से सीख सकें। इसे ध्यान में रखते हुए, हमने कुछ सूत्र एनसीएफ़ 2023 के गणित खण्ड से भी लिए हैं।

तो, इस अंक का हमारा **विशेष** खण्ड सन्दीप दिवाकर द्वारा इस पर बात करते हुए शुरू होता है कि *कक्षा-1 और कक्षा-2 के लिए गणित की नई पाठ्यपुस्तकों में क्या नया है?* हृदय कान्त दीवान अपने आलेख *गणित में सन्दर्भगत सवाल* में इस बात पर चर्चा कर रहे हैं कि शिक्षक और स्कूली परिवेश के स्थानीय सन्दर्भ में शिक्षणशास्त्रीय, सामग्री और प्रक्रिया सम्बन्धी चुनौतियों को कैसे सम्बोधित किया जाए। रीमा कौर का आलेख *गणितीय शब्दावली कौन पढ़ाता है?* विषयों को अलग-अलग करने वाली अदृश्य रेखाओं की पड़ताल करता है।

कक्षा में खण्ड गुणा और भाग की अवधारणाओं पर केन्द्रित है। अर्धेन्दु शेखर दाश *भाग एल्गोरिदम के शिक्षकीय दृष्टिकोण* पर अपने विचार साझा कर रहे हैं और जितेन्द्र वर्मा ने किसी संख्या की *7 से विभाज्यता* को जाँचने के तीन तरीक़ों का वर्णन और व्याख्या की है। स्वाती सरकार दो संख्याओं के *गुणनफल को इष्टतम बनाने* पर एक खेल के बारे में बता रही हैं साथ ही उन्होंने *बहु-अंकीय विभाजक द्वारा विभाजन सिखाने* के फ़ायदे भी बताए हैं। इन सभी लेखों में मानसिक चित्रण, अनुमान, विवेक बुद्धि और तर्क के प्रक्रिया कौशलों पर ज़ोर दिया गया है।

कक्षा में खण्ड के समाप्त होने के बाद **समीक्षा** खण्ड शुरू होता है जिसमें एफ़एलयू — फ़्लैट्स, लॉन्ग और यूनिट्स या मूल बेस 10 नम्बर ब्लॉक की समीक्षा की गई है।

हमारे नए खण्ड **गणित का मज़ा** में, हम मोहन आर. के दो लेखों — *भाला फेंक,* और *अनुमान —फ़र्मी अनुमान समस्याएँ* के साथ इस विषय का आनन्द लेंगे। गणित अनदेखे तरीक़ों से किस तरह काम करता है? और किसी समस्या को कितने तरीक़ों से हल किया जा सकता है — जानने के लिए मुर्गियों और ख़रगोशों के बारे में कहानी पढ़ें!

हम हमेशा की तरह अंक का समापन **पुलआउट** के साथ कर रहे हैं जहाँ हम जानेंगे कि *गुणन में महारत* की जाँच कैसे

करें? पद्मप्रिया शिराली कई तरीक़ों के बारे में बता रही हैं — वे सभी तरीक़े उच्च-स्तर का चिन्तन कौशल विकसित करते हुए कवायद और अभ्यास करवाते हैं लेकिन उनमें से कोई भी थकाने वाला या तनावपूर्ण नहीं है।

जैसे ही हम इस नए अवतार में ढलेंगे, हम आशा करते हैं कि हम आपके लिए कम्प्यूटेशनल थिंकिंग पर और अधिक लेख, आपकी कक्षाओं के लिए वर्कशीट के साथ कुछ टियरआउट्स और एक सम्पूर्ण प्रॉब्लम कॉर्नर भी लेकर लाएँगे। अभी के लिए, फ़िलर्स में सवालों का मज़ा लें और अपने हल AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजने में न हिचकिचाएँ।

स्नेहा टाइटस

मुख्य सम्पादक, *एट राइट एंगल्स*

अनुवाद : अमेय कान्त **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

मुख्य सम्पादक
स्नेहा टाइटस
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज,
बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु – 562 125
sneha.titus@apu.edu.in

सह-सम्पादक
मोहन आर.
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज,
बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु – 562 125
mohan.r@apu.edu.in

सम्पादकीय कार्यालय
पब्लिकेशन, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु - 562 125 कर्नाटक
ईमेल: publications@apu.edu.in
वेबसाइट: www.azimpremjiuniversity.edu.in

सम्पादन समिति

अजय कुमार के.
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु
ajaykumar.k@apu.edu.in

अर्धेन्दु शेखर दाश
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,
धमतरी, छत्तीसगढ़
arddhendu@azimpremjifoundation.org

अशोक प्रसाद
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,
गढ़वाल, उत्तराखण्ड
ashok.prasad@azimpremjifoundation.org

हृदय कान्त दीवान
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,
भोपाल, मध्य प्रदेश
hardy@azimpremjifoundation.org

मोहम्मद उमर
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,
सिरोही, राजस्थान
mohammed.umar@azimpremjifoundation.org

पद्मप्रिया शिराली
सह्याद्रि स्कूल, केएफ़आई
padmapriya.shirali@gmail.com

रुद्रेश एस.
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,
कलबुर्गी, कर्नाटक
rudresh@azimpremjifoundation.org

सन्दीप दिवाकर
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन,
भोपाल, मध्य प्रदेश
sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org

स्वाती सरकार
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु
swati.sircar@apu.edu.in

सुधीश वेंकटेश
मुख्य संचार अधिकारी एवं प्रबन्ध सम्पादक
अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन, बेंगलूरु
sudheesh.venkatesh@azimpremjifoundation.org

हिन्दी अंक सम्पादक
राजेश उत्साही
अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय,
भोपाल, मध्य प्रदेश
utsahi@azimpremjifoundation.org

हिन्दी अनुवाद
एकलव्य फ़ाउंडेशन
समन्वय : प्रतिका गुप्ता

डिज़ाइन
एमएपी सिस्टम्स, बेंगलूरु, कर्नाटक

हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक
आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय का प्रकाशन है। इसका उद्देश्य शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों, विद्यार्थियों और गणित के प्रति रुचि रखने वाले लोगों तक पहुँचना है। यह अलग-अलग विचारों और दृष्टिकोणों की अभिव्यक्ति के लिए एक मंच प्रदान करता है तथा नए और सुविज्ञ दृष्टिकोण, विचारोत्तेजक नज़रिए और नवाचार की कहानियों को प्रोत्साहित करता है। कोशिश है कि यह पत्रिका 'अकादमिक' और 'पेशेवर' उन्मुख होने के बीच सन्तुलन बना सके।

एट राइट एंगल्स *अंक 18, मार्च 2024 का यह* ***हिन्दी अनुवाद*** *जून, 2024 में प्रकाशित हुआ है।*

नोट : इस अंक में व्यक्त किए गए सभी विचार और राय लेखकों के अपने हैं और अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन किसी भी रूप में इसके लिए उत्तरदायी नहीं है।

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University
A Publication of Azim Premji University

इस अंक में

विशेष

हमारा पहला खण्ड गणितीय शिक्षा पर केन्द्रित विविधतापूर्ण लेखों का पिटारा खोलता है। इस पिटारे में पाठ्यपुस्तकों के समालोचनात्मक विश्लेषण से लेकर कक्षाओं में गणित की अभ्यास पद्धति के विभिन्न पहलुओं पर चर्चा तक मौजूद है। गणित के अभ्यासरत शिक्षाविदों द्वारा लिखे गए इन लेखों का उद्देश्य समालोचनात्मक नज़रिया साझा करना है।

कक्षा में

इस भाग के लेख प्रभावशाली शिक्षण की रूपरेखा तैयार करने और उन्हें लागू करने में मददगार हैं। ये शिक्षण के प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुभवों पर आधारित हैं, जिनमें सफल योजनाएँ भी हैं और सुधार के अवसर और विचार भी। ये विषयों के बारे में शिक्षकों की समझ को सुदृढ़ करते हैं और सम्बल देते हैं, साथ ही ये उनके शिक्षाशास्त्रीय ज्ञान को भी मज़बूत करते हैं।

निरंतर...

गणित का मज़ा

यह एक ऐसा खण्ड है जिसमें गणित के मज़े और सुन्दरता को उत्सव की तरह प्रस्तुत किया गया है। आपको इस भाग में हल्के-फुल्के क़िस्से, कॉमिक स्ट्रिप्स, कार्टून, निबन्ध और इन सबके पीछे के सुन्दर तर्क मिलेंगे जो गणित की प्रकृति को बढ़ावा देते हैं।

समीक्षा

हमारा समीक्षा खण्ड गणित में शैक्षणिक संसाधनों पर दृष्टिकोण का एक विविधतापूर्ण दायरा प्रस्तुत करता है। इस खण्ड में हम पाठ्यपुस्तकों, गणित और गणित-शिक्षा की किताबों, सीखने-सिखाने की सामग्रियों (TLMs), दिलचस्प वेबसाइट्स और शैक्षणिक खेलों और सॉफ़्टवेयर जैसे विभिन्न संसाधनों की समीक्षा प्रस्तुत करते हैं। हम न सिर्फ़ अनुभवी शिक्षाविदों और विषय विशेषज्ञों का मूल्यांकन पेश करते हैं बल्कि शिक्षा के क्षेत्र में काम करने वालों और काम करने का जज़्बा रखने वालों के नज़रिए भी प्रस्तुत करते हैं। यह समावेशी तरीक़ा नज़रियों की समृद्ध विविधता को सुनिश्चित करता है। यह हमारे पाठकों को व्यापक और सुलभ समीक्षा प्रदान करता है जो शैक्षणिक सामग्रियों में उनकी पसन्द का बोध करवा सकती हैं।

पुलआउट

पुलआउट खण्ड में, गणित में बुनियादी अवधारणाओं को सिखाने के लिए करके सीखना (Hands On) एवं गतिविधि-आधारित तरीक़े को शामिल किया गया है। यह खण्ड आमतौर पर प्रचलित गणित की ग़लत धारणाओं और उनको सुलझाने के तरीक़ों, मैनिप्यूलेटिव्स और उनसे विद्यार्थियों में गणित की समझ बढ़ाने और गणितीय कौशल का विकास करने के तरीक़ों पर; और इन सबसे बढ़कर गतिविधि-आधारित शिक्षा में लेखन और दस्तावेज़ीकरण कौशल को शामिल करने के तरीक़ों पर बात करता है। पुलआउट थीम आधारित खण्ड है और, जैसा कि इसके नाम से ही ज़ाहिर है, इसे मुख्य पत्रिका से अलग करके इस्तेमाल किया जा सकता है।

गणित की नई पाठ्यपुस्तकों में नया क्या है?

सन्दीप दिवाकर

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2020 ने विकास के शुरुआती चरण (3 से 8 वर्ष) के दौरान सीखने की एक मज़बूत नींव विकसित करने के महत्त्व को पहचाना है। बच्चों के समग्र विकास को ध्यान में रखते हुए, राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा - फ़ाउंडेशनल स्टेज, 2022 (एनसीएफ़-एफ़एस, 2022) में शारीरिक, सामाजिक, भावनात्मक, नैतिक, संज्ञानात्मक, भाषा, सौन्दर्य, सांस्कृतिक मूल्य और सीखने की सकारात्मक आदतें जैसे विकासात्मक डोमेन से जुड़े पाठ्यचर्या लक्ष्यों, दक्षताओं और सीखने के परिणामों की सिफ़ारिश की गई है। इसके साथ ही, गणित के लिए पाठ्यपुस्तकों सहित शिक्षण सामग्री विकसित करते समय सभी डोमेन के एकीकरण पर ज़ोर दिया गया है।

> *"पाठ्यपुस्तकें अपेक्षित पाठ्यचर्या लक्ष्यों, दक्षताओं और सीखने के परिणामों को प्राप्त करने के लिए एक संगठित, सिलसिलेवार, सुसंगत और सार्थक सीखने का अनुभव प्रदान करके शिक्षक की मदद करती हैं। पाठ्यपुस्तकें बच्चों का मार्गदर्शन भी करती हैं और विश्वसनीय सन्दर्भ बिन्दु भी प्रदान करती हैं। कक्षा में उपयोग की जाने वाली शिक्षण सामग्रियों में से पाठ्यपुस्तक एक है जो कक्षा प्रक्रियाओं, शिक्षणशास्त्र और आकलन की योजना बनाने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है।"*

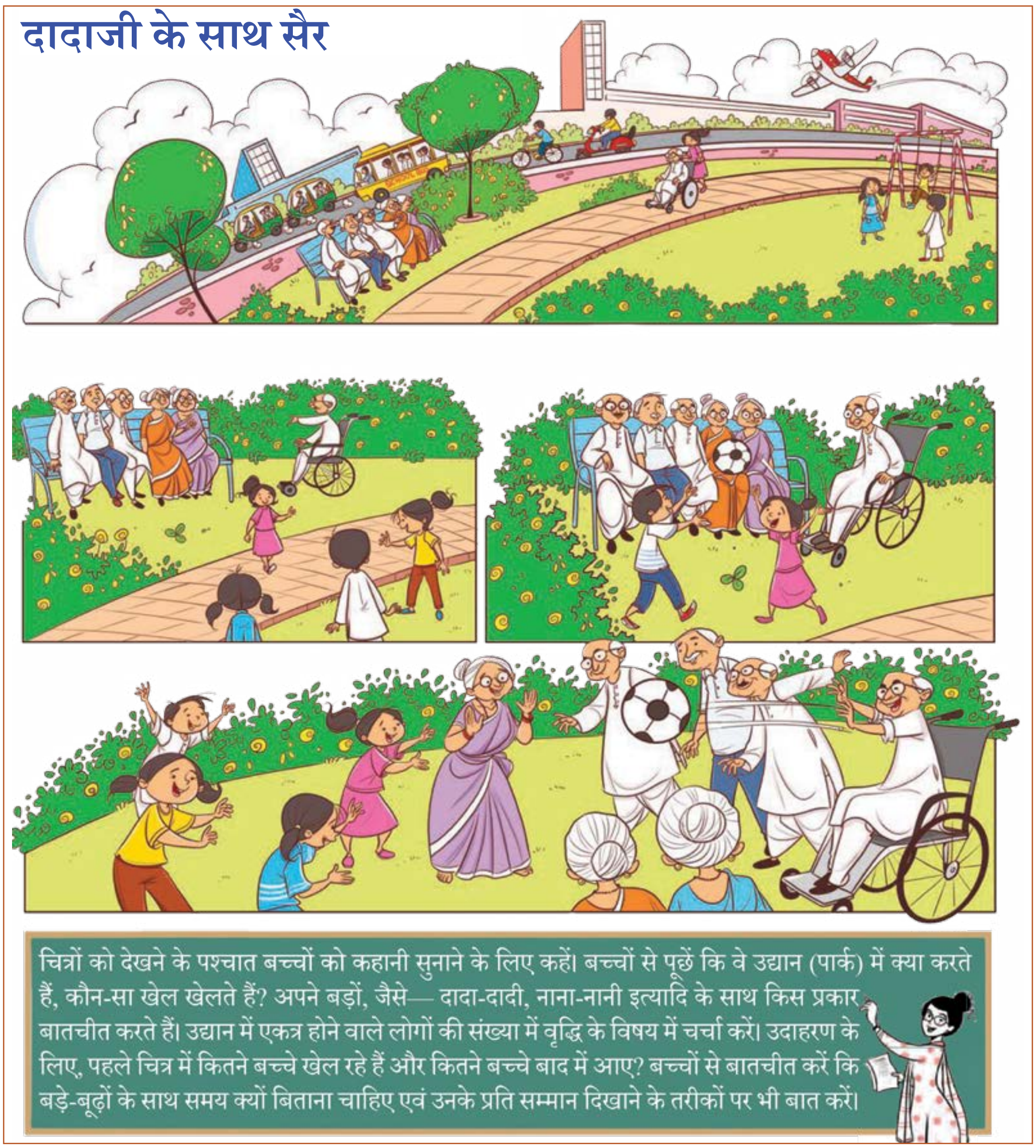
राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा – फ़ाउंडेशनल स्टेज, 2022 में गणित शिक्षण विधियों के सम्बन्ध में निम्नलिखित सुझाव दिए गए हैं :

1. अनुभव → बोली जाने वाली भाषा → चित्र → संकेत भाषा।
2. गणित सीखने को बच्चे के वास्तविक जीवन और पूर्व ज्ञान से जोड़ना।
3. गणित को समस्या समाधान के साधन के रूप में देखना।

4. चर्चा और तर्क का उपयोग करके गणितीय संवाद में शामिल होना।

5. गणित सीखने के प्रति सकारात्मक दृष्टिकोण विकसित करना।

नई नीतियों को ध्यान में रखते हुए, एनसीईआरटी ने साल 2023 में कक्षा-1 और 2 के लिए नई पाठ्यपुस्तकें (आनन्दमय गणित/जॉयफुल मैथमेटिक्स) विकसित की हैं। इन किताबों में ऐसी कई गतिविधियाँ हैं जो बच्चों के सर्वांगीण विकास के लिए अनुभव-आधारित शिक्षा पर ध्यान देने के साथ कक्षा के भीतर और बाहर संगठित होकर काम करने और सीखने को प्रोत्साहित करती हैं। पुस्तक में बच्चे के आस-पास के सन्दर्भ के ज़रिए भाषा और उम्र के अनुरूप शारीरिक और मानसिक विकास को भी शामिल करने का प्रयास किया गया है क्योंकि गणित की शिक्षा को इनसे अलग नहीं किया जा सकता है। पुस्तक पाठ्यपुस्तक और अभ्यास-पुस्तक दोनों तरह से काम करती है और बच्चों को खेल के ज़रिए सीखने, चित्र बनाने, रंग भरने और लिखने के लिए उचित अवसर प्रदान करती है।



चित्र-1 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-1, अध्याय 5, पेज 48

चित्रों की यह सुन्दर शृंखला (**चित्र-1**) पुरानी पीढ़ी को शामिल करने व उनकी प्रासंगिकता और उनकी देखभाल करने के महत्त्व को बड़ी ही बारीकी से उभारती है। साथ ही, यह बच्चों को गिनती के अभ्यास का मौक़ा भी देती है।

गतिविधियाँ इस तरह कराई जाएँ कि सभी बच्चे गतिविधियों में किसी दिव्यांगता (यदि है) के बावजूद भी सक्रिय भागीदारी करें। उदाहरण के लिए, गेंद पर घुंघरू बांध सकते हैं एवं टोकरी के अंदर का तल बाहर के तल से अलग कर सकते हैं। इसका उद्देश्य यह है कि अलग उत्पन्न आवाज़ से गेंद के अंदर या बाहर गिरने का पता लगाया जा सके।

चित्र-2 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-1, अध्याय 1, पेज 4। इसमें और अन्य अध्यायों में समावेशन के सुझाव दिए गए हैं।

आओ बातचीत करें

क. चित्र में क्या हो रहा है?
ख. दिए गए चित्र में आप क्या-क्या वस्तुएँ देख रहे हैं?
ग. चित्र में कितने घर हैं?
घ. चित्र में कितने लोग हैं?
ङ. अनुमान लगाइए कि पेड़ की पत्ती बनाने के लिए कितनी रेखाएँ खींची गई हैं?
च. क्या आप इस प्रकार की चित्रकारी का नाम जानते हैं?
छ. 'वरली' चित्रकारी भारत के किस क्षेत्र में प्रसिद्ध है?

चित्र-3 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-1, अध्याय 8, पेज 96

ध्यान दें कि इस सरल गतिविधि में कला और संस्कृति को जिस तरह से शामिल किया गया है **(चित्र-3)** उससे विद्यार्थियों में अवलोकन, संवाद और तर्क करने की क्षमता विकसित होती है और साथ ही उनका सामान्य ज्ञान भी बढ़ता है।

परियोजना कार्य

क. कुछ कंकड़, फूल, पत्तियाँ, गिलास, कटोरियाँ, तीलियाँ, चूड़ियाँ, सिक्के, बोतल के ढक्कन इत्यादि इकट्ठे कीजिए एवं उनसे कुछ पैटर्न बनाइए। अपनी पसंद के आभूषणों, फूलों आदि में पैटर्न देखकर बनाइए।
ख. अपने आस-पास में कुछ प्राकृतिक पैटर्नों, जैसे— पत्तियों, तितलियों, जानवरों की त्वचा, बिल्ली, कुत्ता, जेब्रा, चीता एवं परदों, साड़ियों, दुपट्टा, टाइल्स, मधुमक्खी के छत्ते इत्यादि में पैटर्न ढूँढ़िए और अवलोकन कीजिए।
ग. अपने आस-पास की कुछ वस्तुओं को इकट्ठा कीजिए एवं एक कोलाज बनाइए।
घ. क्या आप अलग-अलग क्रियाओं का उपयोग करके पैटर्न बना सकते हैं, जैसे— ताली बजाना, चुटकी बजाना।

हमारे चारों ओर आकार ही आकार हैं। मंदिर, मस्जिद, गिरजाघर, गुरुद्वारे, ऐतिहासिक इमारतों में बने पैटर्नों की खोजबीन करके बच्चों को भारतीय सांस्कृतिक विरासत की सराहना करने के लिए प्रेरित करें।

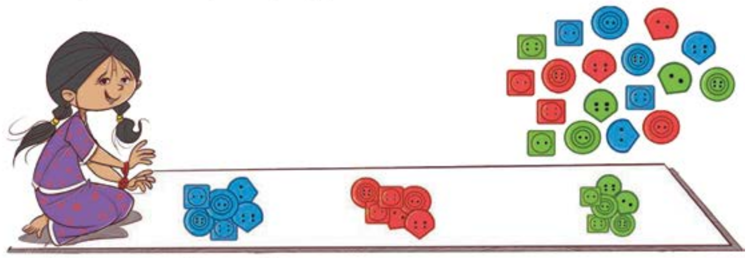
चित्र-4 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-1, अध्याय 9, पेज 104। बच्चे विविधता को अपनाते हुए अपने आसपास की दुनिया में गणित देख पाते हैं।

कई शिक्षकों ने टिप्पणी की थी कि पिछली किताबों में शब्दों की अधिकता (शब्दबहुल) थी और कक्षा में दिए गए कामों को पूरा करने में व्यावहारिक बाधाएँ आ रही थीं। शिक्षक पुरानी किताबों में अभ्यास कार्य की कमी को भी उजागर करते रहे हैं। नई पाठ्यपुस्तकों में इन विचारों पर ध्यान देने की कोशिश की गई है। अधिकांश पाठ कविता, खेल, कहानी या बच्चे के आस-पास की दुनिया से सम्बन्धित गतिविधि से शुरू होते हैं। उदाहरण के लिए कक्षा-1 की पाठ्यपुस्तक की शुरुआत में, बिल्ली इधर-उधर छिपती है और कभी खिड़की के ऊपर, कभी बिस्तर के नीचे, कभी कार के ऊपर, कभी कालीन के नीचे दिखाई देती है। इसी प्रकार, संख्यात्मक अवधारणाओं को समझने के लिए, आसानी से उपलब्ध सामग्रियों जैसे- कंकड़, पत्ते, बटन आदि के उपयोग का सुझाव दिया गया है। स्थानीय रूप से उपलब्ध सामग्रियों (कार्ड, लकड़ी के टुकड़े, उँगलियाँ, बटन, ...) के साथ-साथ गिनमाला (संख्या शृंखला), बिन्दीदार कार्ड और संख्या पट्टियों जैसी कम लागत वाली सीखने-सिखाने की सामग्री/टीएलएम पर भी प्रकाश डाला गया है। गतिविधियों, खुले सवालों, जाँच-पड़ताल और चर्चा के माध्यम से तार्किक सोच, विश्लेषण और गणितीय संवाद के कौशल विकसित करने पर ज़्यादा ध्यान दिया गया है।

चित्र-5 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-2, अध्याय 9, पेज 19। आकृतियों के बारे में समझ विकसित करना।

आओ करें

सुआली ने इन बटनों को इस तरह समूहों में बाँटा—



सुआली ने ऐसे समूह क्यों बनाए हैं?

सुआली अब इन बटनों के समूहों को अलग-अलग तरीकों से बनाना चाहती है। आप चित्र बनाकर उसकी सहायता कीजिए—

चित्र-6 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-1, अध्याय 1, पेज 9

ऐसी खेल-आधारित गतिविधियाँ (**चित्र-5** और **चित्र-6**) विद्यार्थियों को गणित के प्रति एक आत्मविश्वासपूर्ण दृष्टिकोण विकसित करने की गुंजाइश देती हैं।

परियोजना कार्य

0 से 9 तक के दस संख्या कार्ड लीजिए।

कार्डों को इस प्रकार व्यवस्थित करिए जैसा कि बाजू में दिखाया गया है।

ऐसा करने के कई तरीके हो सकते हैं। आप ऐसा कितने तरीकों से कर सकते हैं?

☐ + ☐ = 9

☐ + ☐ + ☐ = 9

☐ + ☐ = 9

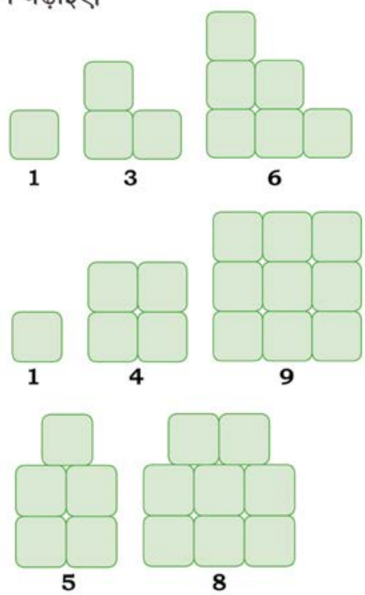
चित्र-7 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-1, अध्याय 5, पेज 56

पाठ्यपुस्तक में पहले अंक लिखने और एक अंक की संख्याओं को जोड़ने का अभ्यास दिया गया है। अध्याय 3 में, विद्यार्थियों ने एक प्रोजेक्ट के रूप में अपने ख़ुद के नम्बर कार्ड तैयार किए हैं, इसलिए इस परियोजना के लिए सामग्री कोई बाधा नहीं है (**चित्र-7**)। ध्यान दें कि यह मज़ेदार और खुले तरीक़े से जोड़ का अभ्यास करने का मौक़ा देता है। अपने जवाबों की तुलना करने से विद्यार्थियों को चर्चा करने और अपनी रणनीतियों को सही ठहराने का मौक़ा मिलता है।

पैटर्न्स की खोज

पता कीजिए निम्नलिखित आकृति में ब्लॉकों की संख्या कैसे बढ़ रही है और इसे आगे बढ़ाइए।

क. ख. ग.



चित्र-8 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-2, अध्याय 3, पेज 31

अलग-अलग तरह से सीखने वाले विद्यार्थी इस तरह के मानसिक चित्रण (**चित्र-8**) द्वारा संख्या पैटर्न को बेहतर ढंग से पकड़ पाएँगे। यह उम्मीद की जाती है कि शिक्षक भी ऐसी पहेलियों से प्रेरित काउण्टरों और बिल्डिंग ब्लॉकों का उपयोग करके खुद करके सीखने वाली शिक्षा दे पाएँगे।

संख्या खेल— मैं कौन हूँ?

क. मैं दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या हूँ।

ख. मैं दो अंकों की सबसे बड़ी संख्या हूँ, परंतु मेरे अंक अलग-अलग हैं।

ग. मैं दो अंकों की सबसे छोटी संख्या हूँ।

घ. मैं दो अंकों की सबसे छोटी संख्या हूँ, परंतु मेरे अंक एक जैसे हैं।

ङ. मैं दो अंकों की ऐसी सबसे छोटी संख्या हूँ, जिसमें दहाई का अंक 3 है।

च. मैं दो अंकों की ऐसी सबसे बड़ी संख्या हूँ, जिसमें इकाई के स्थान पर 2 है।

आप भी ऐसे ही अपने कुछ प्रश्न बनाइए।

चित्र-9 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-2, अध्याय 1, पेज 13

समस्या प्रस्तुत करना अवधारणात्मक समझ का एक महत्त्वपूर्ण सूचक/संकेतक है और पाठ्यपुस्तक इसके लिए मौक़े प्रदान करती है। उदाहरण के लिए **चित्र-9** देखें।

दोनों कक्षाओं की पाठ्यपुस्तकों के अन्त में पहेलियाँ हैं जो बच्चों को अपने तर्क लागू करने और उन्हें हल करने का मौक़ा देती हैं। इन पहेलियों से यह भी उम्मीद है कि शिक्षक भी ऐसी पहेलियाँ बना सकते हैं और बच्चों को हल करने के लिए दे सकते हैं। राष्ट्रीय स्तर पर तैयार की गई इन पाठ्यपुस्तकों में भारत भर की विविधता को शामिल करने की कोशिश की गई है, लेकिन इनकी अपनी सीमाएँ भी हैं। जैसे कि जो सन्दर्भ एक इलाक़े के लिए परिचित हैं वे दूसरे इलाक़े के लिए अनजाने हो सकते हैं। इसलिए शिक्षकों को कक्षा में पढ़ाते समय स्थानीय खेल-खिलौनों और स्थानीय स्तर पर उपलब्ध सामग्रियों को शामिल करने के निर्देश भी दिए गए हैं। बेशक, शिक्षकों के लिए यह ज़रूरी हो जाता है कि वे पाठ्यपुस्तकों में दिए गए शिक्षण संकेतों को ध्यान में रखते हुए पाठों की पूर्व-योजना बनाएँ।

पाठ्यपुस्तकों का पिछला सेट लगभग 16 साल पहले इसी दृष्टिकोण के साथ विकसित किया गया था। हालाँकि, उसने वास्तव में इन विचारों को काम-काजी विचारों में तब्दील नहीं किया था, जो सिखाई जाने वाली अवधारणाओं के आधार पर शिक्षण विधि और आकलन दोनों में मदद कर सकें। नई पाठ्यपुस्तकों में जो दृष्टिकोण दिखाई देता है, लगभग वही (पुराने) थीम अध्यायों में भी अपनाया गया था, लेकिन शिक्षकों ने दरअसल इन बातों की सराहना नहीं की थी। अब जबकि गणित शिक्षा के लक्ष्यों को कक्षा-1 और 2 की पाठ्यपुस्तकों के अध्यायों में शामिल कर लिया गया है, यह उम्मीद की जाती है कि शिक्षक इस लॉन्चिंग पैड का इस्तेमाल करके *बच्चों की गणितीय समझ और मात्राओं, आकारों और मापन के ज़रिए दुनिया को पहचानने की क्षमता विकसित कर पाएँगे*, जैसा कि एनसीएफ़-एफ़एस के पाठ्यचर्या लक्ष्य में लिखा गया है।

सम्पादक टीप : पाठ्यपुस्तकों से लिए गए सभी चित्र एनसीईआरटी की अनुमति से प्रकाशित किए गए हैं।

Reference:

1. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2023). *aanandamay ganit (class I and Class 2)* *https://ncert.nic.in/textbook.php?ahjm1=11-13*

सन्दीप दिवाकर अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन, भोपाल (मध्य प्रदेश) में 2012 से गणित के रिसोर्स पर्सन के रूप में काम कर रहे हैं। उन्हें उच्चतर माध्यमिक विद्यालय में गणित पढ़ाने का अनुभव है और उन्होंने राज्य शिक्षा केन्द्र (एससीईआरटी) भोपाल में बतौर व्याख्याता 15 साल तक काम किया है। सन्दीप शिक्षक-प्रशिक्षकों, शिक्षकों और बच्चों के लिए एससीएफ, पाठ्यपुस्तकों, प्रशिक्षण मॉड्यूल और सीखने-सिखाने की सामग्री के विकास से जुड़े रहे हैं। उनके लेख *शैक्षिक पलाश, प्राथमिक शिक्षक, शैक्षिक संदर्भ* आदि में प्रकाशित हुए हैं। उनसे sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : सीमा **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** प्रतिका गुप्ता

विशेष

गणितीय शब्दावली कौन पढ़ाता है?

रीमा कौर

आइए नीचे दिए गए शब्दचित्र को देखें।

शब्दचित्र -1

क्रिस्टीना अभी कक्षा 1 में है। सत्र के अन्त में अभिभावक-शिक्षक बैठक के दौरान, उसकी क्लास टीचर (जो उसकी गणित टीचर भी हैं) ने उसके माता-पिता से कहा, *"क्रिस्टीना सरल इबारती सवालों को समझ ही नहीं पाती, चाहे मैं उन्हें कितनी भी बार बोर्ड पर हल करूँ। कृपया इस समस्या को सुलझाने के लिए अँग्रेज़ी शिक्षक (यानी भाषा शिक्षक) से बातचीत करें, अन्यथा इससे भविष्य में कई और समस्याएँ पैदा होंगी।"* यह थोड़ी हैरान करने वाली बात थी, क्योंकि क्रिस्टीना घर पर अधिकांश जोड़ और घटाव के सवालों का तेज़ी से और सही ढंग से उत्तर देती है, चाहे वह 3+5 हो या 7-3। क्रिस्टीना की माँ ने उसकी नोटबुक की बारीकी से जाँच की और उन्हें निम्नलिखित बातें पता चलीं :

> जेनिफर ने सुबह 8 बार रस्सी कूदी। फिर उसने शाम को 3 बार रस्सी कूदी। वह दिन में कितनी बार रस्सी कूदी?
>
> *क्रिस्टीना का उत्तर : 5*
>
> लिनपू नदी किनारे जाता है और 7 मछली पकड़ता है। उसका दोस्त नदी किनारे जाता है और 3 मछली पकड़ता है। लिनपू ने कितनी मछली ज़्यादा पकड़ीं?
>
> *क्रिस्टीना का उत्तर : 10*
>
> प्रसिदा की प्लेट में 5 इडली हैं। वह 2 इडली खा जाती है। अब उसके पास कुल कितनी इडली हैं?
>
> *क्रिस्टीना का उत्तर : 7*

की-वर्ड : बुनियादी साक्षरता और संख्याज्ञान, गणितीय शब्दावली, फ़ाउंडेशनल स्टेज, प्रारम्भिक बाल्यावस्था शिक्षा

क्रिस्टीना जो ग़लतियाँ करती है उन्हें हम आमतौर पर जोड़ और घटाव सीखने के शुरुआती चरणों से जोड़ते हैं। जहाँ त्रुटियाँ हमेशा सीखने के लिए उपयोगी होती हैं, वहीं वे हमें यह जाँचने का अवसर भी प्रदान करती हैं कि क्या ऐसे कोई अन्तर्निहित शैक्षणिक कारण हैं जो शिक्षार्थियों के मन में ग़लत धारणाओं को जन्म दे रहे हैं। क्रिस्टीना की माँ के अनुभव और नोटबुक के जवाबों, दोनों से ही यह स्पष्ट लगता है कि क्रिस्टीना जोड़ और घटाव जानती है। वह बस यह नहीं जानती कि कब किसका उपयोग करना है। इबारती सवाल (word problems) को हल करने में असमर्थता सम्भवतः गणित के शिक्षण से सम्बन्धित सामान्य प्रक्रियाओं से उत्पन्न होती है (Shirali, 2016) (10), जिसका क्रिस्टीना की शिक्षिका ने भी अनुसरण किया होगा :

- गणितीय अवधारणाओं को पढ़ाते समय भ्रमित करने वाली शब्दावली का उपयोग करना या संकेत शब्दों को रटने के लिए प्रोत्साहित करना, जैसे 'अधिक' और 'कुल' का अर्थ जोड़ना होता है।
- दैनिक जीवन के शब्दों और गणितीय अवधारणाओं के बीच के अन्तर को स्पष्ट नहीं करना। उदाहरण के लिए, यहाँ क्रिस्टीना ने सम्भवतः ग़लती से 'स्किप' शब्द का अर्थ 'घटाना' समझ लिया है।
- निर्देशों का पालन, चित्रण (visualization) और समस्या-समाधान जैसे महत्त्वपूर्ण कौशल विकसित किए बिना केवल प्रक्रियाओं के रूप में जोड़ और घटाव सिखाना।
- शब्दावली विकास को गणितीय समस्या के रूप में नहीं, बल्कि सिर्फ़ भाषा की समस्या के रूप में देखना।
- ग़लत तरीके से तैयार किए गए इबारती सवाल, जो अक्सर विद्यार्थियों के सन्दर्भ से सम्बन्धित नहीं होते हैं।
- गणितीय प्रश्नों को हल करने की विचार प्रक्रिया को 'बोलकर न सोचना' या दर्शाना/मौखिक रूप से प्रदर्शित नहीं करना, जबकि ऐसा करने से बच्चे न केवल प्रश्न हल करने के चरणों को बेहतर ढंग से समझ सकते हैं, बल्कि वैचारिक स्पष्टता भी विकसित कर सकते हैं।
- विद्यार्थियों के लिए अपनी विचार प्रक्रियाओं को साझा करने के अवसर तैयार न करना।
- बच्चों की गणितीय प्रश्नों को तैयार करने और हल करने की अपनी क्षमता को कम आँकना।

शब्दावली और समझ के बीच का सम्बन्ध जटिल है। जिन बच्चों के पास समृद्ध शब्दावली होती है, वे न केवल बातचीत में भाग लेने, खेलने, चुटकुले सुनाने और कहानियाँ सुनने व सुनाने जैसी समृद्ध भाषायी परिस्थितियों के साथ गहराई से जुड़ पाते हैं, बल्कि गणितीय प्रश्नों से अर्थ निकालने में भी सक्षम होते हैं। जैसा कि क्रिस्टीना के मामले में था, कई शिक्षार्थियों को गणना के लिए कोई ख़ास समस्या का सामना नहीं करना पड़ता, लेकिन उन्हें भाषा को समझने और उपयोग करने में संघर्ष करना पड़ता है। यह देखा गया है कि शब्दावली के स्पष्ट निर्देश से शिक्षार्थियों, जिनमें विकलांग बच्चे भी शामिल हैं, के बीच सभी विषयों में समझ में सुधार होता है। (Powell & Driver 2014) (9)।

हालाँकि फ़ाउंडेशनल और प्रारम्भिक चरण (प्री-स्कूल से कक्षा 5 तक) में भी शिक्षकों को इस स्पष्ट अपेक्षा के साथ भर्ती किया जाता है कि वे सभी विषयों को पढ़ाएँगे, लेकिन इसमें कुछ ज़मीनी स्तर की वास्तविकताएँ हैं, जैसे :

1. अपेक्षित सेवापूर्व योग्यताएँ होने के बावजूद स्कूल के सभी विषयों को पढ़ाने के लिए शिक्षकों की तैयारी नहीं होती।
2. शिक्षकों द्वारा कई कक्षाओं में केवल एक/दो विषय पढ़ाना, यानी अलग-अलग विषय पढ़ाने वाले अलग-अलग शिक्षक। यह परिदृश्य शब्दचित्र-1 के समान है जहाँ गणित शिक्षक भाषा शिक्षक पर ज़िम्मेदारी डाल देती है। इसके परिणामस्वरूप विषयों के बीच स्पष्ट विभेदन होता है। इसके परिणामस्वरूप विषयों के बीच स्पष्ट अलगाव हो जाता है जो न केवल इस बात में परिलक्षित होता है कि समय को कैसे व्यवस्थित किया जाता है (समय-सारणी) बल्कि इस बात में भी परिलक्षित होता है कि विभिन्न विषयों को कैसे पढ़ाया जाता है — जहाँ कई सहज अवसर होने के बावजूद विषयों के बीच कोई अन्तर्सम्बन्ध नहीं बनाए जाते — विशेष रूप से फ़ाउंडेशनल और प्रारम्भिक चरण की कक्षाओं में।
3. विभिन्न विषयों में शिक्षकों की रुचि के अलग-अलग स्तर। दूसरे शब्दों में, शिक्षक कुछ विषयों को पढ़ाने में अधिक रुचि लेते हैं और अन्य में नहीं।
4. स्वयं शिक्षकों में गणित का डर रहता है, जो बच्चों में स्थानान्तरित होता है।

इसके बजाय क्रिस्टीना की शिक्षिका क्या कर सकती हैं?

क्रिस्टीना की शिक्षिका को निश्चित रूप से मदद मिलेगी यदि वह अपनी शिक्षण विधियों को फ़ाउंडेशनल स्टेज के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा - (एनसीएफ़-एफ़एस) 2022 (6) में सूचीबद्ध पाठ्यचर्या के उद्देश्यों और दक्षताओं से प्राप्त करती हैं। गणित से जुड़ा पाठ्यचर्या का उद्देश्य (CG-8, संज्ञानात्मक विकास के क्षेत्र के अन्तर्गत) शिक्षार्थियों से अपेक्षा करता है कि वे ऐसी गणितीय समझ और क्षमताएँ विकसित करें ताकि मात्राओं, आकारों और मापों के माध्यम से दुनिया को समझ सकें। इस उद्देश्य से जुड़ी 13 दक्षताओं में से, जोड़ और घटाव से जुड़ी दक्षता (C-8.6) स्पष्ट रूप से बताती है कि बच्चों को धाराप्रवाह रूप से और लचीली रणनीतियों का उपयोग करके जोड़-घटाव करने में सक्षम होना चाहिए। इस दक्षता को एक अन्य दक्षता (C-8.13) के साथ देखा जाना चाहिए, जो बच्चों से सरल गणितीय प्रश्नों को तैयार करने और हल करने में सक्षम होने की अपेक्षा करती है। इसके अलावा, मात्राओं, आकारों, स्थान और मापों से सम्बन्धित अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को समझने और व्यक्त करने के लिए पर्याप्त और उचित शब्दावली विकसित करने की एक और पूरी दक्षता (C-8.12) है। हालाँकि, CG-8 को पृथक करके नहीं पढ़ा जा सकता है। पिछला पाठ्यचर्या उद्देश्य (CG-7) बच्चों को गणित के लिए उनकी समझ और क्षमताओं को विकसित करने में मदद करने में महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाता है, क्योंकि यह इस बारे में है कि बच्चे कैसे अपने आस-पास की दुनिया का निरीक्षण कर सकते हैं और श्रेणियों व उनके सम्बन्धों को समझने के लिए तार्किक रूप से सोच सकते हैं।

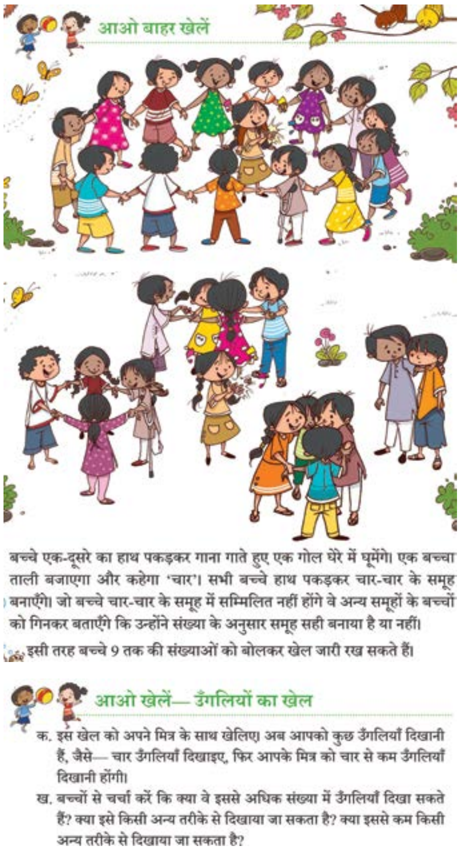
ऊपर सार रूप में बताए गए सीखने के मानक एक स्पष्ट तरीक़े का सुझाव देते हैं जिसे शिक्षक को गणित पढ़ाते समय अपनाने की आवश्यकता है :

- दुनिया में मौजूद मात्राओं, आकारों और मापों से परिचित होने के लिए दैनिक जीवन की भाषा का उपयोग करते हुए बात करना।
- यह पहचानना कि वास्तविक जीवन के मूर्त अनुभवों और दुनियाभर की जानकारी को बेहतर वैचारिक स्पष्टता विकसित करने के लिए गणितीय अवधारणाओं के शिक्षण के साथ कैसे एकीकृत किया जा सकता है।
- गणित सीखने को अन्य विषयों के साथ एकीकृत करना और इसे एक अलग समय में विकसित होने वाली अलग-अलग अवधारणाओं और कौशलों के रूप में नहीं देखना, यानी कहानियों, कविताओं, गेम्स, खेल और कला के माध्यम से गणित सीखने के अवसरों की खोज करना।
- यह समझने के लिए भाषा शिक्षक (यदि वे अलग हों) के साथ मिलकर काम करना, कि कैसे सभी कक्षाएँ शब्दावली विकास और समझ विकसित करने में व्यापक तरीक़े से मदद कर सकती हैं।

नीचे, कक्षा 1 (8) के लिए एनसीईआरटी द्वारा तैयार की गई गणित की नई पाठ्यपुस्तकों के कुछ नमूने दिए गए हैं, जहाँ गणित

कॉमिक स्ट्रिप का उपयोग करते हुए संख्याएँ गिनना (पेज 18 और 19)

'क्या है लम्बा, क्या है गोल?' के लिए गुनगुनाने योग्य कविता (पेज 11)


आओ बाहर खेलें

बच्चे एक-दूसरे का हाथ पकड़कर गाना गाते हुए एक गोल घेरे में घूमेंगे। एक बच्चा ताली बजाएगा और कहेगा 'चार'। सभी बच्चे हाथ पकड़कर चार-चार के समूह बनाएँगे। जो बच्चे चार-चार के समूह में सम्मिलित नहीं होंगे वे अन्य समूहों के बच्चों को गिनकर बताएँगे कि उन्होंने संख्या के अनुसार समूह सही बनाया है या नहीं।

इसी तरह बच्चे 9 तक की संख्याओं को बोलकर खेल जारी रख सकते हैं।

आओ खेलें— उँगलियों का खेल

क. इस खेल को अपने मित्र के साथ खेलिए। अब आपको कुछ उँगलियाँ दिखानी हैं, जैसे— चार उँगलियाँ दिखाइए, फिर आपके मित्र को चार से कम उँगलियाँ दिखानी होंगी।

ख. बच्चों से चर्चा करें कि क्या वे इससे अधिक संख्या में उँगलियाँ दिखा सकते हैं? क्या इसे किसी अन्य तरीके से दिखाया जा सकता है? क्या इससे कम किसी अन्य तरीके से दिखाया जा सकता है?

समूहीकरण (grouping) और अधिक-कम से सम्बन्धित इनडोर और आउटडोर खेल (पेज 21 और पेज 24)

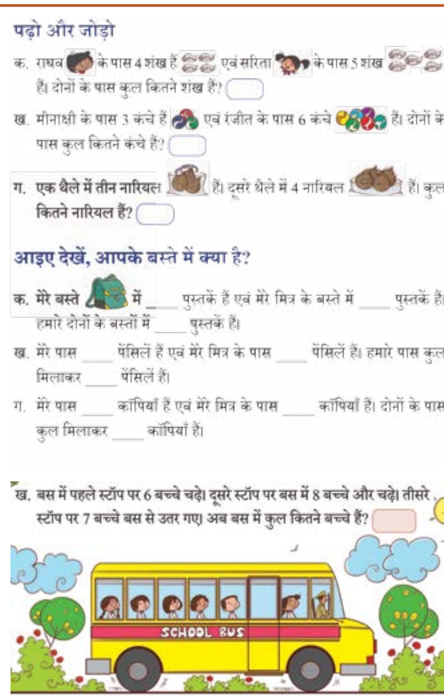

ऊपर दिए गए चित्र में उन वस्तुओं के पास △ बनाइए जो संख्या में सात हैं और नीचे 7 लिखिए।

7 सात 7 7 7 7 7

ऊपर दिए गए चित्र में उन वस्तुओं के पास ○ बनाइए जो संख्या में आठ हैं और नीचे 8 लिखिए।

8 आठ 8 8 8 8 8

चित्र-आधारित गिनती और लेखन (पेज 27)


पढ़ो और जोड़ो

क. राघव के पास 4 शंख हैं एवं सरिता के पास 5 शंख हैं। दोनों के पास कुल कितने शंख हैं?

ख. मीनाक्षी के पास 3 कंचे हैं एवं रंजीत के पास 6 कंचे हैं। दोनों के पास कुल कितने कंचे हैं?

ग. एक थैले में तीन नारियल हैं। दूसरे थैले में 4 नारियल हैं। कुल कितने नारियल हैं?

आइए देखें, आपके बस्ते में क्या है?

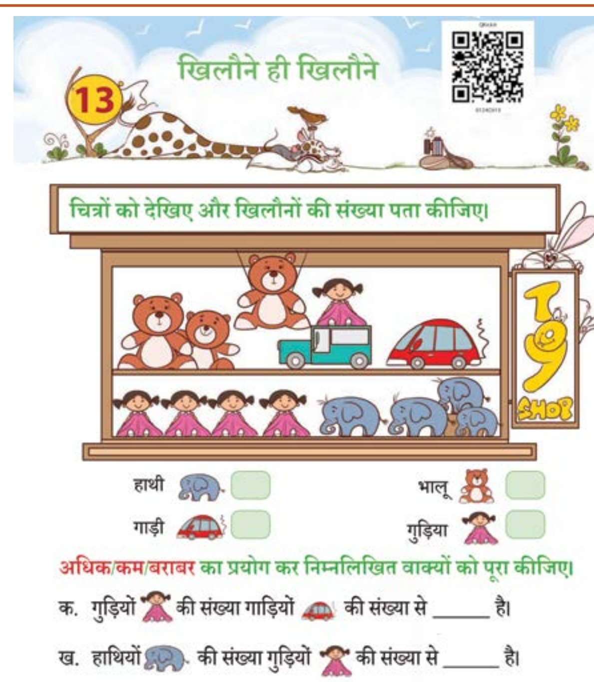
क. मेरे बस्ते में ____ पुस्तकें हैं एवं मेरे मित्र के बस्ते में ____ पुस्तकें हैं। हमारे दोनों के बस्तों में ____ पुस्तकें हैं।

ख. मेरे पास ____ पेंसिलें हैं एवं मेरे मित्र के पास ____ पेंसिलें हैं। हमारे पास कुल मिलाकर ____ पेंसिलें हैं।

ग. मेरे पास ____ कॉपियाँ हैं एवं मेरे मित्र के पास ____ कॉपियाँ हैं। दोनों के पास कुल मिलाकर ____ कॉपियाँ हैं।

ख. बस में पहले स्टॉप पर 6 बच्चे चढ़े। दूसरे स्टॉप पर बस में 8 बच्चे और चढ़े। तीसरे स्टॉप पर 7 बच्चे बस से उतर गए। अब बस में कुल कितने बच्चे हैं?

'कुल' और 'कुल मिलाकर' के लिए सरल कहानी-आधारित प्रश्न (पेज 57 और पेज 71)


13 खिलौने ही खिलौने

चित्रों को देखिए और खिलौनों की संख्या पता कीजिए।

हाथी भालू

गाड़ी गुड़िया

अधिक/कम/बराबर का प्रयोग कर निम्नलिखित वाक्यों को पूरा कीजिए।

क. गुड़ियों की संख्या गाड़ियों की संख्या से ______ है।

ख. हाथियों की संख्या गुड़ियों की संख्या से ______ है।

'अधिक', 'कम' और 'बराबर' के लिए खिलौने की दुकान का परिदृश्य (पेज 120)

पढ़ाने के लिए कहानियों, कविताओं, चित्रों, क़िस्सों और कॉमिक स्ट्रिप्स जैसे विविध सन्दर्भों का उपयोग किया गया है। नमूनों में भाषा के उपयोग और बच्चों के वास्तविक जीवन के अनुभव से प्राप्त सन्दर्भों की समृद्धि पर ध्यान दें। हाल ही में विकसित ये पाठ्यपुस्तकें एनसीएफ़-एफ़एस 2022 में परिभाषित पाठ्यचर्या के उद्देश्यों और दक्षताओं के अनुरूप हैं।

रणनीतियाँ

आइए तीन ऐसी विशिष्ट रणनीतियों पर नज़र डालें जो फ़ाउंडेशनल स्टेज में गणित से सम्बन्धित शब्दावली को मज़बूत करने के लिए उपयोगी हैं। ये रणनीतियाँ ऊपर दिखाए गए पाठ्यपुस्तक के नमूनों में भी परिलक्षित होती हैं। जैसी कि पहले चर्चा की गई है, इनका उपयोग सभी शिक्षकों द्वारा समय-सारणी में विभिन्न अवधियों (periods) /ब्लॉकों में किया जा सकता है। कृपया ध्यान दें कि ये रणनीतियाँ उन गणितीय खेलों के अतिरिक्त हैं जिनके आप कई उदाहरण प्राप्त कर सकते हैं।

चित्रों के बारे में पढ़ना/बात करना

चित्रों पर चर्चा करने से विद्यार्थियों को चित्रित जानकारी का दृश्य विश्लेषण और व्याख्या करने के लिए प्रोत्साहित करके उनकी गणितीय सोच को बढ़ाया जा सकता है, जिस पर शिक्षक की रचनात्मकता के आधार पर आगे और प्रश्न बनाए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, सौम्या मेनन (4) द्वारा बनाई गई 'मार्केट मेहेम' (Market Mayhem) की नीचे दी गई तस्वीर ऊपर उल्लिखित कई गणितीय अवधारणाओं के लिए एक समृद्ध सन्दर्भ प्रदान करती है। क्या आप सोच सकते हैं कि आप अपनी कक्षा में इस चित्र का उपयोग कैसे करेंगे?

बाल साहित्य

गणित पढ़ाने के लिए बच्चों के साहित्य का चयन करते समय, उन कहानियों/क़िस्सों को प्राथमिकता दें जिनमें स्वाभाविक रूप से गणितीय अवधारणाएँ शामिल हों। बच्चों के दैनिक जीवन से जुड़े शब्दों को शामिल करने, गणित को अधिक प्रासंगिक बनाने और परिचित सन्दर्भों के माध्यम से समझ को बढ़ाने के अवसरों की तलाश करें। उदाहरण के लिए, ड्राफ्ट सिक्किम प्री-स्कूल पाठ्यचर्या (एससीईआरटी, 2024) (11) में सीखने के अनुभव *'कुन लामो, कुन छोटो?' (कौन लम्बा है, कौन छोटा है?)* में निहित नेपाली कहानी जंगल में एक अकेली डण्डी के बारे में है, जो इधर-उधर उछलती है और अलग-अलग लम्बाइयों की अन्य डण्डियों से मिलती है, जो उसके हाथ और पैर बन जाती हैं। शिक्षक कहानी सुनाती हैं और साथ-साथ बच्चों द्वारा बाहर से एकत्र की गई असली डण्डियों का उपयोग करके एक आकृति बनाती हैं। बाद की गतिविधियों में बच्चे स्वयं डण्डियों की आकृतियाँ बनाते हैं और आकृति के शरीर, बाँहों और पैरों के लिए उपयोग की जाने वाली डण्डियों की लम्बाइयों की तुलना करते हैं। शिक्षक नेपाली में *'लामो'* और *'छोटो'* जैसे शब्दों का उपयोग करती हैं लेकिन साथ में अँग्रेज़ी शब्दों से भी अवगत कराती हैं।

यहाँ अनुपमा अजिंक्या आप्टे (1) की *'गुल्ली का ग़ज़ब पिटारा' (Gulli's Box of Things)* नामक कहानी का एक और उदाहरण है, जहाँ गुल्ली द्वारा अपने छोटे-से बक्से में एकत्र की गई वस्तुओं के वर्गीकरण का वर्णन करते समय 'छोटा', 'बड़ा', 'चौड़ा', 'ऊपर' जैसे शब्दों का उपयोग किया जाता है।

"क्या हुआ मंगल चाचा?" एक रविवार को गुल्ली ने पूछा।

"मुझे इस पैकट से तेल निकालकर बोतल में डालना है, और देखो ना बोतल का मुँह बहुत छोटा है! मुझे यकीन है कि आज मेरी रसोई ज़रूर गन्दी हो जाएगी।" मंगल चाचा ने कहा।

"चिन्ता न करें चाचा, मैं बस यूँ गया और यूँ आया।" गुल्ली बोला।

टन-टना टन! धड़ाम-धूम! आओ देखें क्या निकलता है गुल्ली के गज़ब पिटारे से!!

अरे, यह क्या! एक बड़ी, चौड़े मुँह वाली कीप। इसमें ऊपर से कुछ भी उड़ेलें और देखें कितनी सफ़ाई से वह बूँद-बूँद करके नीचे आता है!

नमूने की तीसरी कहानी जेन डि सूज़ा (Jane De Suza) (5) की *'चौंका देने वाला रिपोर्ट कार्ड' (The Very Shocking Report Card)* एक लड़के पट्टू के बारे में है, जो अपना रिपोर्ट कार्ड प्राप्त करने से डर रहा है क्योंकि वह जानता है कि उसे बहुत अच्छे नम्बर नहीं मिलेंगे। कहानी गणितीय और सामाजिक-भावनात्मक व नैतिक विकास को जोड़ती है। यह जोड़ और घटाव जैसी सरल गणनाएँ करने का अवसर भी प्रदान करती है।

इसीलिए इस बार पापा पट्टू के साथ चल पड़े थे टीचर से रिपोर्ट कार्ड खुद ही लेने को। पापा ने रिपोर्ट कार्ड में नज़रें गड़ाईं। उनकी पपीते की फाँक बराबर हँसी, सिकुड़कर बस पतली-सी नींबू की फाँक जितनी रह गई।

10 में से 3 पढ़ने में। दो लड़ते हुए साँडों की तरह पापा की भँवें एक-दूसरे से आ मिलीं।

10 में से 4 कविता आवृति में। तूफान में हिलते पेड़ की तरह पापा का सिर इस तरफ से उस तरफ हिलने लगा।

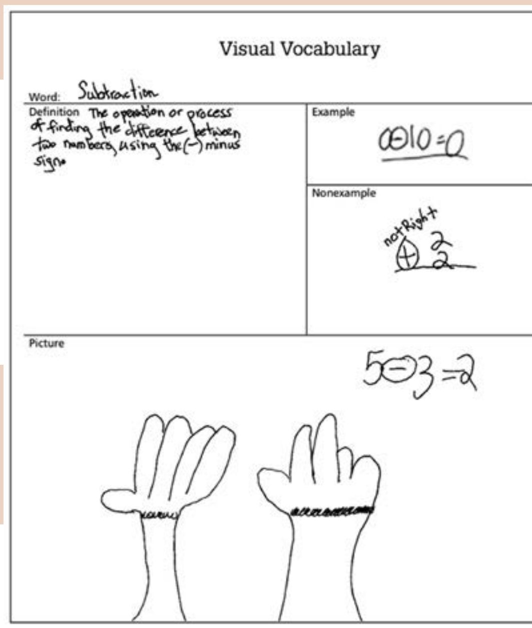
10 में से 2 श्रुतलेख में। रेलगाड़ी के इंजन की तरह एक वहूउउउश-सी आवाज़ निकली पापा के मुँह से।

घर जाते समय, पट्टू का सामना अपने पड़ोस के अलग-अलग लोगों से होता है और उनकी बातचीत के माध्यम से, पापा को एहसास होता है कि पट्टू एक विचारशील बच्चा है जो हर किसी का ख़्याल रखता है। घर आकर, पट्टू अपनी माँ को अपने नम्बर बताने से डरता और शर्मिन्दा होता है। लेकिन वहाँ पापा एक अलग ही रिपोर्ट कार्ड सामने रखते हैं...

"10 में से 9 साझेदारी में," पापा ने कहा।

"10 में से 10 दयालु होने के लिए,"

"10 में से 11 बड़ों के प्रति श्रद्धा और सम्मान के लिए।"



चित्र संयोजक (Graphic organizers)

चित्र संयोजक आरेखों, तालिकाओं, मानचित्रों आदि के रूप में विषयवस्तु के दृश्य चित्रण होते हैं। वे बच्चों के लिए सन्दर्भ-आधारित शब्दावली का उपयोग करके गहरी वैचारिक समझ विकसित करने और प्रदर्शित करने के लिए एक नया और आकर्षक उपकरण हैं (Bay-Williams & Livers, 2009) (2)। चित्रात्मक वर्णन, विशेष रूप से फ़ाउंडेशनल स्टेज के छोटे बच्चों द्वारा किए गए, शब्दावली को दृश्यमान बनाते हैं और चित्रों को पढ़ने के समान ही समझ में योगदान करते हैं। 1997 में किए गए एक अध्ययन में, चित्र संयोजकों के माध्यम से शब्दावली निर्देश प्राप्त करने वाले शिक्षार्थियों ने परिभाषाओं के माध्यम से शब्दावली निर्देश प्राप्त करने वाले शिक्षार्थियों से काफ़ी बेहतर प्रदर्शन किया (Monre & Pendergrass, 1997, जैसा कि Powell & Driver 2014 में उद्धृत किया गया है) (9)।

दिए गए चित्र संयोजक (Bruun et al., 2015) (3) में, विद्यार्थी घटाव की अवधारणा पर काम करता है, इसे परिभाषित करता है, एक उदाहरण और ग़ैर-उदाहरण के साथ अपने ख़ुद के गणितीय सवाल तैयार करता है, और घटाव को प्रदर्शित करने वाली

एक तस्वीर तैयार करता है। शिक्षक इस संयोजक का उपयोग विद्यार्थी के तर्क का पता लगाने के लिए कर सकते हैं *(बच्चा उदाहरण के तौर पर '0 - 10 = 0' क्यों देता है? क्या बच्चा '10 - 10 = 0', या '10 - 0 = 0' लिखने का इरादा रखता था, या फिर कोई अन्य कारण है?)*; ग़लत धारणाओं की पहचान कर सकते हैं *(चित्र में, उदाहरण '5 - 3 = 2' सही है, लेकिन चित्र में दो मुड़ी हुई उँगलियाँ और तीन खुली उँगलियाँ क्यों दिखाई दे रही हैं? उत्तर तक पहुँचने के लिए बच्चे की प्रक्रिया क्या है?)*; और शिक्षण योजना पर अन्तर्दृष्टि प्राप्त कर सकते हैं *(क्या परिभाषाओं को पढ़ाया जाना चाहिए और उन्हें पुनरुत्पादित किए जाने की उम्मीद की जानी चाहिए? क्या बच्चे अपनी स्वयं की परिभाषाओं पर पहुँच सकते हैं?)*।

सारांश

फ़ाउंडेशनल स्टेज में गिनती, संख्याओं की पहचान और मात्राओं की तुलना से सम्बन्धित मूलभूत पूर्व-संख्यात्मक अवधारणाएँ बच्चों को जोड़ने और घटाने जैसी सफल गणनात्मक क्षमताएँ, बुनियादी आकारों और माप की समझ और प्रारम्भिक गणितीय सोच-विचार विकसित करने में सक्षम बनाती हैं। भाषा के उपयोग से उत्पन्न ग़लतफ़हमियाँ गणितीय समझ में बाधा उत्पन्न कर सकती हैं। विद्यार्थियों के वास्तविक जीवन के अनुभवों से सम्बन्धित विषयवस्तु का उपयोग करने वाले स्पष्ट शब्दावली निर्देशों और विभिन्न अनुभव (यहाँ मुख्य शब्द ''एकाधिक या विभिन्न' है, न कि 'दोहराए हुए' है!) प्रदान करने वाली विविध रणनीतियों को दैनिक कार्यक्रम में शामिल किया जाना चाहिए और विशेष रूप से किसी एक शिक्षक या पीरियड/कक्षा पर ही नहीं छोड़ा जाना चाहिए। पाठ्यचर्या के उद्देश्यों और दक्षताओं के अनुरूप एक पद्धति विकसित करने से शिक्षार्थियों को स्कूली शिक्षा के लिए एनसीएफ़ (एनसीएफ़-एसई, 2023) (6) यानी बुनियादी संख्याज्ञान; गणितीय सोच; समस्या-समाधान; गणितीय अन्तर्ज्ञान; और आनन्द, जिज्ञासा, और आश्चर्य! में दिए गए गणित शिक्षा के प्रमुख पाठ्यचर्या उद्देश्यों की दिशा में प्रगति करने में मदद मिल सकती है।

सम्पादक टीप : पाठ्यपुस्तकों से लिए गए सभी चित्र एनसीईआरटी की अनुमति से प्रकाशित किए गए हैं।

References

1. Apte, A. A. (2015, June 22). Gulli's box of things. https://storyweaver.org.in/. https://storyweaver.org.in/en/stories/486-gulli-s-box-of-things
2. Bay-Williams, J. M., & Livers, S. D. (2009). Supporting mathematics vocabulary acquisition. *Teaching Children Mathematics*, *16*(4), 238–246. https://doi.org/10.5951/tcm.16.4.0238
3. Bruun, F., Diaz, J., & Dykes, V. J. (2015). The language of mathematics. *Teaching Children Mathematics*, *21*(9), 530–536. https://doi.org/10.5951/teacchilmath.21.9.0530
4. Menon, S. (2016, November 21). Market mayhem. *https://storyweaver.org.in/.* https://storyweaver.org.in/en/stories/9740-market-mayhem
5. De Suza, J. (2018, February 8). The very shocking report card. https://storyweaver.org.in/. https://storyweaver.org.in/en/stories/26976-the-very-shocking-report-card
6. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2022). Foundational Stage National Curriculum Framework. https://ncert.nic.in/pdf/NCF_for_Foundational_Stage_20_October_2022.pdf
7. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2023). School Education National Curriculum Framework. https://ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf
8. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2023). *aanandamay ganit (class I) https://ncert.nic.in/textbook.php?ahjm1=11-13*
9. Powell, S. R., & Driver, M. K. (2014). The influence of mathematics vocabulary instruction embedded within addition tutoring for First-Grade students with mathematics difficulty. *Learning Disability Quarterly*, *38*(4), 221–233. https://doi.org/10.1177/0731948714564574
10. Shirali, P. (2016). Teaching word problems: A practical approach. *At Right Angles, 5*(1). http://publications.azimpremjiuniversity.edu.in/id/eprint/3124
11. State Council for Educational Research & Training (SCERT). (2024). *Draft Sikkim Preschool Curriculum*.

रीमा कौर अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु के स्कूल ऑफ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर (SCE-URC) में सहायक प्रोफ़ेसर हैं। उन्होंने गुरु गोबिंद सिंह इंद्रप्रस्थ विश्वविद्यालय, दिल्ली से बीएड और भारत रत्न डॉ. बी. आर. अम्बेडकर विश्वविद्यालय दिल्ली से शिक्षा में एमए किया है। उनकी रुचि के क्षेत्र हैं प्रारम्भिक भाषा और साक्षरता तथा प्रारम्भिक बाल्यावस्था शिक्षा। रीमा का कहना है कि वह स्कूल में गणित से भयभीत रहती थीं, उन्हें विश्वास नहीं हो रहा है कि अब उन्होंने गणित की एक पत्रिका में लेख लिखा है। उनसे rima.kaur@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जितेन्द्र 'जीत' **पुनरीक्षण :** भरत त्रिपाठी **कॉपी एडिटर :** अफ़साना पठान

गणित में सन्दर्भगत सवाल : स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा का दृष्टिकोण

हृदय कान्त दीवान

नीति और कार्यवाई सम्बन्धी संवाद और कार्यक्रम गणित में अधिगम और क्षमता की कमी पर ध्यान देने की कोशिश कर रहे हैं। जब से पाठ्यचर्या रूपरेखाओं में इस पर ज़ोर दिया जाने लगा है कि कौन-सा गणित और उसे कैसे पढ़ाया जाए, तब से ही यह इसके समानान्तर एक प्रक्रिया के रूप में चिन्ता का विषय रहा है। महत्त्वपूर्ण गणित किसे माना जाए, ख़ासतौर से गणित शिक्षण के सन्दर्भ में, इसकी समझ विकसित हो रही है। जब इस्तेमाल में आसान कैलकुलेटर अब सुलभ हैं, तब क्या इस बात की आवश्यकता है कि फ़ाउंडेशनल गणित शिक्षा का ध्यान केवल कलन विधियों (एल्गोरिद्म) या गणना युक्तियों को रटने पर केन्द्रित रहे?

स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (NCF-SE) 2023 के अनुसार, *सवाल तैयार करने, कई वैकल्पिक हल तैयार करने, इष्टतम हल चुनने के लिए विभिन्न हलों का मूल्यांकन करने और हल लागू करने की क्षमता सभी पाँच लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए अपरिहार्य है। जिन सवालों के लिए मात्रात्मक मॉडल की आवश्यकता होती है, उनके लिए विभिन्न गणितीय प्रक्रियाओं में महारत की आवश्यकता होती है, जो जोड़ और घटाव के सरल अंकगणितीय कौशल से लेकर बीजगणितीय समीकरणों के अधिक जटिल हल तक में उपयोग होती है। सवालों को हल करने के लिए कम्प्यूटेशनल मॉडल के उपयोग के लिए कम्प्यूटेशनल कौशल की आवश्यकता होगी। तार्किक कौशल में औपचारिक और अनौपचारिक दोनों तरह से तर्कों का निर्माण और मूल्यांकन शामिल है।*

इस दृष्टिकोण और इससे भी अधिक के साथ हम विद्यार्थी में इन क्षमताओं के विकास के लिए चुने गए सवालों पर दिए गए ज़ोर पर ग़ौर करते हैं। सन्दर्भ की दृष्टि से प्रासंगिक सवाल महज़ इबारती सवाल नहीं होते हैं जिन्हें आकर्षक चित्रों के साथ प्रस्तुत किया जाता है। बेशक, उन्हें बच्चों के जीवन के अनुभवों से

की-वर्ड : *इबारती सवाल, सन्दर्भ, अर्थपूर्ण बनाना*

उभरना चाहिए। साथ ही, बच्चे को यह समझ आना चाहिए कि सवाल हल करने की ज़रूरत क्या है और ये हल उसके दैनिक जीवन और निर्णयों पर कैसे प्रभाव डाल सकते हैं।

गणित की सामान्य कक्षा विद्यार्थियों को ऐसे अवसर नहीं देती है। लगभग सभी स्कूलों में, बच्चों और शिक्षकों के पास गणित और सवाल हल करने का मज़ा लेने के लिए समय नहीं होता है। न तो पढ़ाई जाने वाली अवधारणाओं के बारे में आराम से संवाद के लिए समय आवंटित किया जाता है और न ही इन अवधारणाओं को बच्चों के परिवेश से जोड़ा जाता है। उदाहरण के लिए, मैथ मैजिक शृंखला (**चित्र-1**) का एक सवाल वैसे तो इसलिए तैयार किया गया है कि बच्चे उसके सन्दर्भ से सम्बन्धित गणितीय कार्य करें, लेकिन इसे अक्सर यांत्रिक रूप से पढ़ाया जाता है। सवाल एक ऐसी मुद्रा पर टिका है जो अब भारत में प्रचलन में नहीं है। इस वजह से बच्चों के लिए इससे जुड़ पाना तब तक मुश्किल होता है जब तक कि यह दादा-दादी या नाना-नानी के साथ व्यापक मुद्दों पर संवाद या महँगाई जैसे बड़े मुद्दों पर चर्चा का हिस्सा न बने।

रुपए और पैसे

कितने  से एक रुपया बनेगा?

क्या 50 पैसा एक रुपए का आधा है?

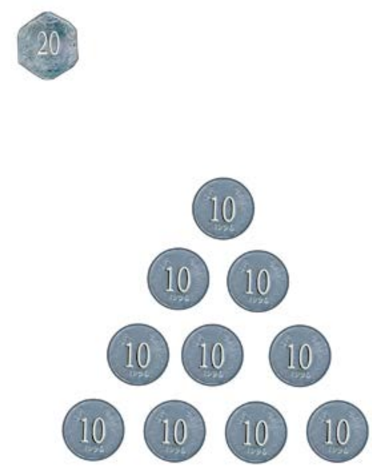
कितनी  से एक रुपया बनेगा?

25 पैसे एक रुपए का ______ हिस्सा है।

20 पैसे एक रुपए का ______ हिस्सा है।

कितने 10 पैसों से एक रुपया बनेगा?

इसलिए 10 पैसे एक रुपए का ______ हिस्सा है।

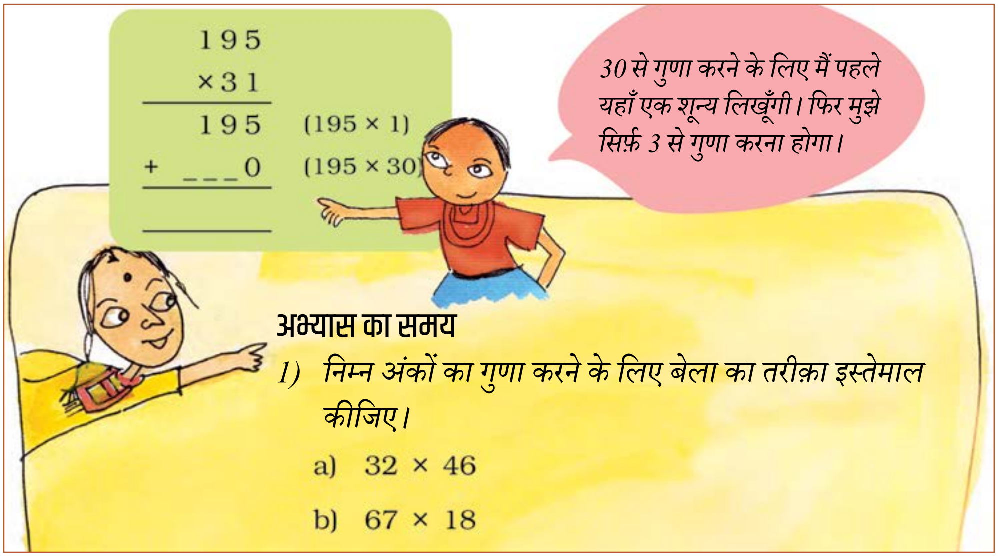


चित्र-1 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-5, अध्याय-4, पेज-65

दूसरा, विद्यार्थियों को समस्या की प्रकृति जानने और उसमें से समस्या से प्रासंगिक जानकारी निकालने का कोई अवसर नहीं दिया जाता है। ऐसा होगा तभी वे सवाल का उद्देश्य समझ पाएँगे और यह समझ पाएँगे कि उपलब्ध जानकारी से चाही/माँगी गई जानकारी तक कैसे पहुँचा जा सकता है। प्रयास तो यह होता है कि कलन विधियों को चरणबद्ध तरीक़े से लागू करने और एक मशीनी कवायद (ड्रिल) की तरह चरणों को याद रखने की क्षमता विकसित कर दी जाए। सन्देश है, "चरणों से भटकें नहीं, उन्हें सटीक ढंग से लागू करें।" सलाह यह है कि अपनी अवधारणात्मक समझ का उपयोग न करें और हल के लिए एक अलग विधि न अपनाएँ, क्योंकि आप ग़लती कर सकते हैं। कक्षा की प्रक्रियाएँ और तथाकथित सीखने-सिखाने की सामग्री (टीएलएम), अक्सर इसी उद्देश्य से तैयार की जाती हैं। एक तरह से, उनसे उम्मीद की जाती है कि वे शिक्षार्थियों के सामने कलन विधि के 'ठोस' चरण प्रस्तुत करें और उन्हें याद रखने में मदद करें। वे न तो प्रक्रिया और चरण समझाने की कोशिश करती हैं और न ही बच्चों को वैकल्पिक रणनीतियों का उपयोग करने की गुंजाइश देती हैं। सवाल भी इस तरह से तैयार किए जाते हैं कि यंत्रवत् कलन विधियों के अभ्यास पर ज़ोर दिया जा सके। उदाहरण के लिए, एनसीईआरटी की कक्षा-5 की पाठ्यपुस्तक का आगे दिया पृष्ठ (**चित्र-2**), हालाँकि केवल गुणन की कलन विधि के संखण्डन और खण्डों में इसके अभ्यास पर केन्द्रित है, फिर भी शिक्षक के लिए कलन विधि सम्बन्धी 'क्यों' पर चर्चा करने के लिए पर्याप्त गुंजाइश दे सकता है, लेकिन यह कितनी बार किया जाता है?

अमित कुलश्रेष्ठ पेशे से एक गणित शिक्षक और शोधकर्ता हैं। उन्हें गणित में आनन्द भी आता है। पत्रिका *पाठशाला भीतर और बाहर* [1] में उनके लेख और उसी पर बाद के एक वेबिनार [2] का सारांश नीचे दिया गया है।

ज़्यादातर विद्यार्थियों को इबारती सवाल हल करने के तरीक़े



चित्र-2 : एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक कक्षा-5, अध्याय-13, पेज-171

बताने की जल्दी में, शिक्षक सुझाव देते हैं कि वे महत्त्वपूर्ण शब्दों (की-वर्ड) की तलाश करें ताकि यह तय करने में मदद मिल सके कि किन संक्रियाओं का उपयोग करना है। उनका तर्क है कि कक्षा में पूरा ध्यान वास्तव में इस बात पर रहता है कि बच्चों को सही संख्याएँ निकालने, सही कलन विधियाँ लागू करने और सवाल हल करने के लिए ज्ञात मानक नियमों को याद रखने का अभ्यास कराया जाए। कक्षा का ध्यान स्पष्टीकरण देने और उत्तर तक पहुँचने के लिए अपनाए जाने वाले चरणों पर केन्द्रित होता है। बच्चों को इस बात की गुंजाइश देने के लिए कोई स्थान नहीं होता है कि वे दिए गए सवालों पर विचार करें और अपनी रणनीति और दृष्टिकोण विकसित करें। हालाँकि, वर्तमान राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा सहित राष्ट्रीय पाठ्यचर्या दस्तावेज़ दृढ़तापूर्वक तर्क देते हैं कि बच्चों को न केवल *गुंजाइश* दी जानी चाहिए बल्कि सवाल हल करने के लिए अपनी रणनीति विकसित करने और खोजने के लिए **प्रोत्साहित** किया जाना चाहिए। उन्हें यह समझना सीखना चाहिए कि सवाल हल करने के लिए कई रणनीतियाँ हो सकती हैं और कभी-कभी, कई उत्तर भी हो सकते हैं। स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2023) यह सलाह भी देती है कि कक्षाएँ कई तरीक़ों को प्रोत्साहित करें ताकि विद्यार्थी अपनी रणनीतियाँ तैयार कर सकें। गणित के लिए एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकें और साथ ही स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा बच्चों के लिए सवाल बनाने में सक्षम होने की आवश्यकता पर ज़ोर देती हैं।

यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं जो बताते हैं कि सवाल अक्सर ऐसे शब्दों में लिखे जाते हैं और उनमें ऐसी स्थितियाँ शामिल होती हैं जो बच्चों के सन्दर्भ में स्वाभाविक नहीं होती हैं।

1. एक पेड़ पर 114 पक्षी बैठे थे। 21 और पक्षी उड़कर पेड़ पर आए। पेड़ पर कुल मिलाकर कितने पक्षी थे?

यह सम्भव नहीं है कि कोई भी पेड़ की तरफ़ उड़ते पक्षियों को गिन सके। इसलिए, सवाल का सन्दर्भ किसी भी वास्तविक अनुभव, जिससे बच्चे जुड़ सकें, की बजाय महज़ औपचारिकता अधिक लगता है।

2. जेन के पास 63 मीटर रिबन है। यदि वह इसमें से 56 मीटर 21 सेमी रिबन काटती है, तो रिबन की लम्बाई कितनी बचेगी?

भले ही हम नाम बदल दें (जैसा कि अक्सर स्थानीय सन्दर्भ शामिल करने के लिए किया जाता है), सवाल में संख्याओं का कोई मतलब नहीं है। 63 मीटर के रिबन के बारे में आमतौर पर नहीं सुना जाता है और फिर 56 मीटर और 21 सेमी की लम्बाई को काटना भी स्वाभाविक नहीं लगता।

3. एक किराना दुकान में सुबह 2510 किलो 350 ग्राम गेहूँ था। दिन भर में 890 किलो 600 ग्राम गेहूँ बिक गया। शाम को दुकान में कितना गेहूँ बचा था?

यह स्टॉक में गेहूँ की एक विचित्र मात्रा है और बेची गई मात्रा भी उतनी ही विचित्र है! आमतौर पर दुकानें गेहूँ का स्टॉक ग्राम की बजाय बोरियों की संख्या में रखती हैं।

4. विशाल 48 सेमी ऊँचाई की एक पुस्तक मीनार बनाना चाहता है। यदि प्रत्येक किताब की मोटाई 12 मिमी है, तो चाही गई ऊँचाई की मीनार बनाने के लिए उसे कितनी किताबों की ज़रूरत होगी?

5. एक किराना दुकान पर 144 किलो 780 ग्राम वज़नी फ्रोज़न सब्ज़ियों का एक डिब्बा डिलीवर किया गया। यदि डिब्बे के अन्दर समान वज़न के 15 बैग थे, तो प्रत्येक बैग का वज़न क्या था?

ये दोनों सवाल सन्दर्भगत माने जाते हैं। लेकिन यह स्पष्ट है कि इनका उद्देश्य विद्यार्थियों को एक संख्या का दूसरी से विभाजित करने का अभ्यास कराना है। निश्चित रूप से किसी भी विचारशील विद्यार्थी को आश्चर्य होगा कि एक विशिष्ट ऊँचाई की मीनार कौन बनाना चाहेगा? यदि इसकी ज़रूरत है भी, तो किसी के पास एक ही ऊँचाई की इतनी सारी किताबें क्यों होंगी और उसे थप्पी में पुस्तकों की संख्या पता करने की ज़रूरत क्यों होगी? सब्ज़ियों के डिब्बों के इतने सटीक वज़न की ज़रूरत क्यों होगी?

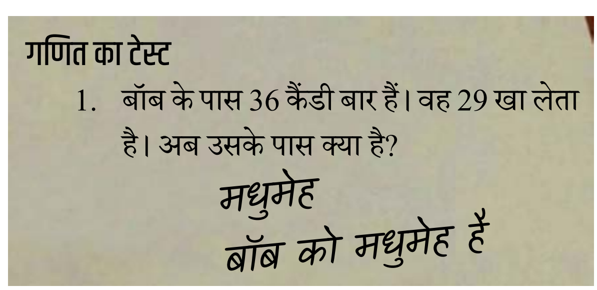
6. एक कमरे की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई क्रमशः 24, 18 और 12 फीट है। सबसे लम्बा टेप कौन-सा होगा जिसका उपयोग इन्हें मापने के लिए किया जा सकता है?

इसके बारे में मुद्दा यह है कि जब बच्चे मापने वाले टेप का उपयोग करते हुए देखते हैं तो उनका सामान्य अनुभव यह होता है कि छोटी दूरी को मापने के लिए बहुत लम्बे टेप का उपयोग किया जा सकता है। यदि हम टेप को उठाना नहीं चाहते हैं और टेप के पिछले स्थान के अन्तिम बिन्दु से माप जारी नहीं रखना चाहते हैं तो हमें एक लम्बे टेप की ज़रूरत होती है। अन्यथा, हम किसी भी टेप का उपयोग कर सकते हैं और लम्बाई माप सकते हैं। इसलिए, हम 24 फीट से अधिक लम्बाई वाले किसी भी टेप का उपयोग कर सकते हैं, जिसमें 24 फीट लम्बा टेप भी शामिल है। सवाल तैयार करने वालों का इरादा यह परीक्षण करना था कि क्या बच्चा 24, 18 और 12 का महत्तम समापवर्तक ढूँढ़ सकता है और क्या वह उसे सबसे लम्बे टेप के रूप में उपयोग कर सकता है ताकि अलग-अलग भागों/ टुकड़ों में मापने की ज़रूरत न हो। सवाल की शब्दावली उसके उद्देश्य से मेल नहीं खाती है। सवाल की भाषा कभी-कभी अस्पष्ट हो सकती है, लेकिन अपेक्षित जवाब बहु-विकल्पों की अनुमति नहीं देता है।

स्पष्ट रूप से, यहाँ विचार यह है कि बच्चों से कुछ संक्रियाएँ कराई जाएँ और वह भी कुछ विशिष्ट प्रकार की संख्याओं के साथ और सन्दर्भ केवल एक दिखावा है जो संख्याओं की अवधारणा या धारणा की समझ प्राप्त करने में कोई मदद नहीं करता है। यह उन्हें प्रक्रियात्मक स्पष्टता भी प्रदान नहीं करता है, क्योंकि वे जवाब के रूप में प्राप्त संख्या को समझ नहीं पाते हैं और यह जानने का कोई तरीक़ा नहीं है कि यह लगभग सही भी है या नहीं।

चित्र-3

हालाँकि इन सभी को सवाल की भाषा समझने का अभ्यास कहा जा सकता है, लेकिन यह गणित को जीवन से जोड़ने और सम्बन्ध समझने के मामले में मदद नहीं कर पाते हैं। वास्तव में, जटिल संख्याओं और कलन विधियों के बोझिल उपयोग से ये सवाल अक्सर और ज़्यादा पेचीदा हो जाते हैं। अक्सर यह तार्किक रूप से स्पष्ट नहीं होता है कि हल तक कैसे पहुँचा जाए और शिक्षक के लिए समाधान के चरणों की रूपरेखा बताना आवश्यक हो जाता है। विद्यार्थी इसे याद कर लेते हैं। लेकिन उन्हें यह स्पष्ट नहीं होता है कि इस तरीक़े में सुझाई गई विशिष्ट विधि का पालन करने की ज़रूरत क्यों है और इससे जवाब कैसे मिल जाता है।



चित्र-4

यहाँ कुछ सवाल सुझाए गए हैं जो बच्चे के सन्दर्भ से बेहतर ढंग से सम्बद्ध हो सकते हैं।

1. सुरेश रोज़ सुबह नहाने के लिए बाल्टी और मग का इस्तेमाल करता है। उसने देखा कि भरी हुई बाल्टी से

उसे पूरे 12 मग पानी मिला। एक दिन, उसने पाया कि उसे केवल 9 मग पानी मिला। उसे एहसास हुआ कि मग नया था। पुराने की तुलना में नए मग में क्या अन्तर रहा होगा?

यह अलग-अलग पात्रों में पानी भरने से सम्बन्धित हो सकता है और दिलचस्प संवादों के साथ-साथ अन्य अनुभव भी प्रदान कर सकता है और धारिता को अनुपातों और भिन्नों से भी जोड़ सकता है।

2. वर्गाकार टाइलों का उपयोग करके आप 144 वर्गमीटर क्षेत्रफल वाले वर्गाकार फ़र्श को भरने के लिए विभिन्न साइज़ की कितनी टाइलों का उपयोग कर सकते हैं?
3. क्या कोई आयताकार टाइल भी 144 वर्गमीटर के समान फ़र्श क्षेत्रफल को भर सकती है? प्रत्येक स्थिति में किस साइज़ के आयतों और कितने आयतों की आवश्यकता होगी?
4. यह देखते हुए कि फ़र्श का क्षेत्रफल a^2 वर्ग मीटर है, जहाँ 'a' एक पूर्ण संख्या है, वर्गाकार टाइलों की सम्भावित साइज़ क्या है जो सतह को भर सकेगी?

ध्यान दें कि सवाल हर चरण में अधिक जटिल (और अधिक दिलचस्प) होते जा रहे हैं। यदि हम स्वयं इन सवालों को हल करने का प्रयास करें, तो हम देख सकते हैं कि यह संयोजनों की संख्या की ओर ले जाता है और ये अपने आप में अन्वेषण के अवसर होते हैं। या कोई इससे आगे जा सकता है और इसे इस तरह से हल करने का एक तरीक़ा ढूँढ़ने का प्रयास कर सकता है जो संख्याओं के सम्भावित संयोजनों या वर्गाकार टाइलों के आकार के लिए एक सामान्य सूत्र निर्माण की गुंजाइश देता हो।

ऐसे सवाल समय की माँग हैं जो गणितीय वस्तुओं और अवधारणाओं को समझने और जिज्ञासा और रोमांच की भावना विकसित करने में विद्यार्थियों को सक्षम बनाते हों।

ऐसे सवाल तैयार करने के दौरान एक अच्छा मार्गदर्शक प्रश्न यह है : अभ्यास कार्य देने का उद्देश्य क्या है और हम गणित की प्रकृति और उसके अधिगम को कैसे देखते हैं? सवाल हल करने के लिए शिक्षार्थी को क्या करना होगा? किसी कार्य के उद्देश्य गणित की नींव की हमारी समझ और अधिगम के मार्ग की हमारी कल्पना से उत्पन्न होते हैं। और आपने शिक्षार्थी को जो कार्य दिया है उसमें यह स्पष्ट होना चाहिए कि शिक्षार्थी को क्या करना है।

इस समय इस प्रकार के सवाल यदि पूरी तरह से अनुपस्थित नहीं तो दुर्लभ ज़रूर हैं जिनके इर्द-गिर्द सन्दर्भगत संवाद सुगम बनाए जा सकते हैं। यह सच है कि इन्हें तैयार करना आसान नहीं है, साथ ही यह भी सम्भव नहीं है कि इन पर चर्चा के लिए ज़्यादा समय दिया जा सके। आकलन के बारे में चिन्ता के चलते गणित सीखने-सिखाने की पूरी प्रक्रिया मुख्यतः याद रखने और कलन विधि पर केन्द्रित रहती है, इसलिए समझने और गणित के बारे में अन्वेषण करने और सहज महसूस करने की किसी भी वास्तविक क्षमता की कमी बनी रहती है। स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (NCF-SE) 2023 बताती है कि *"अधिकांश आकलन तकनीकें और सवाल तथ्यों, प्रक्रियाओं और सूत्रों को याद रखने पर केन्द्रित रहती हैं।"* अलबत्ता, आकलन का ध्यान समझ, तर्क और इस बात पर केन्द्रित होना चाहिए कि विभिन्न सन्दर्भों में किसी गणितीय तकनीक का उपयोग कब और कैसे किया जाए। यह कोई नया विचार नहीं है और सदी की शुरुआत से ही और भारत के कुछ स्थानों में इससे भी पहले व्यक्त किया गया है, लेकिन इसे स्थापित करने का तरीक़ा ढूँढ़ना बेहद कठिन रहा है। यदि ऐसा किया जाता है, तो स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (NCF-SE) में परिभाषित गणित शिक्षा के लक्ष्यों को पूरा करने की कहीं अधिक सम्भावना होगी।

सम्पादक टीप : पाठ्यपुस्तकों से लिए गए सभी चित्र एनसीईआरटी की अनुमति से प्रकाशित किए जा रहे हैं।

References

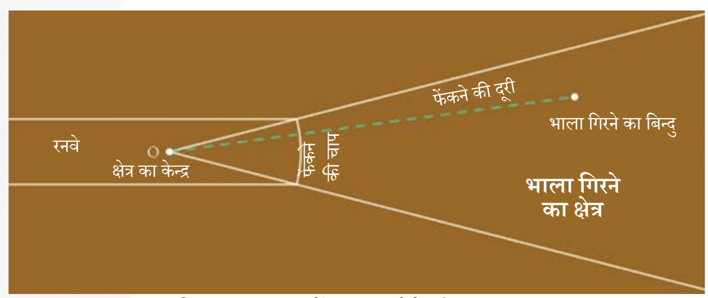
1. https://cdn.azimpremjiuniversity.edu.in/apuc3/media/publications/downloads/Pathshala-Bheetar-Aur-Bahar_17-Issue-Sept-2023.pdf
2. https://www.youtube.com/watch?v=4tKptfJLPW4&list=PLVI4qkjTdM728SukvE9lLM7eBzg-8BKvM&index=1
3. National Council for Educational Research and Training (NCERT). (2023). https://ncert.nic.in/textbook.php?ahjm1=11-13

हृदय कान्त दीवान अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन के सदस्य हैं। उनसे hardy@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

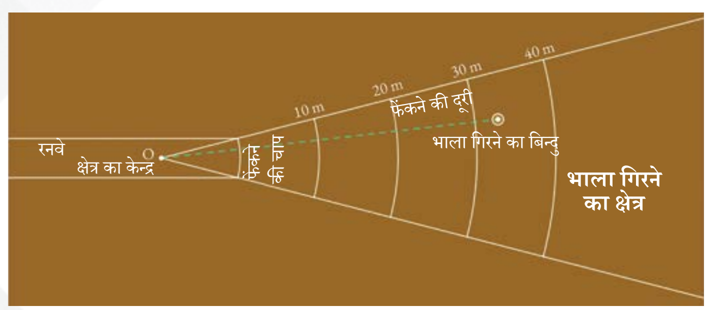
अनुवाद : सुबोध जोशी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

क्या भाला फेंक को टूटे टेप से मापा जा सकता है?

स्कूल के खेल समारोह के दिन, शारीरिक शिक्षा शिक्षिका ने देखा कि मापने का टेप टूटा हुआ है और उसे अभी तक बदला नहीं गया है। भाला फेंक स्पर्धा 30 मिनट में शुरू होने वाली है, और नया टेप लाने का समय नहीं है। स्पर्धा में जहाँ से भाला फेंका जाता है, उसके केन्द्र से लेकर जहाँ भाला गिरता है वहाँ तक की दूरी मापने की आवश्यकता होती है (देखें **चित्र-1**)। यह दूरी आमतौर पर 10 से 60 मीटर तक होती है। समस्या यह है कि टूटा हुआ टेप केवल 12 मीटर तक ही माप सकता है।



चित्र-1: भाला फेंक स्पर्धा के लिए ख़ाका



चित्र-2 : संशोधित ख़ाका

इस समस्या के समाधान के लिए शिक्षिका ने भाला फेंक क्षेत्र का ख़ाका बदल दिया। उन्होंने रस्सी की मदद से बिन्दु O से उसके आस-पास वृत्ताकार चाप बनाईं, उन्होंने हर चाप के बीच 10 मीटर का फ़ासला रखा (देखें **चित्र-2**)। ऐसा करने के पीछे उनकी सोच थी कि अब जहाँ भी भाला गिरेगा वहाँ से केवल निकटतम चाप तक की दूरी मापनी होगी।

इस बदले हुए ख़ाके के साथ स्पर्धा शुरू होती है। हालाँकि, स्पर्धा के अन्त में, उपविजेता ने शिक्षिका की विधि की निष्पक्षता पर सवाल उठाया। उसका सवाल था कि (दूरी मापने के लिए) निकटतम चाप पर बिन्दु कैसे चुना गया और इस तरीक़े की वैधता पर भी सवाल था।

प्रश्न :
यदि शारीरिक शिक्षा शिक्षिका द्वारा उपयोग की गई विधि गणितीय रूप से सही है तो क्या आप उनकी ओर से चाप पर बिन्दु चुनने की विधि बता सकते हैं, साथ ही क्या इसके निष्पक्ष और सही होने को सिद्ध कर सकते हैं?

अनुवाद : शौर्या बरतारिया **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अफसाना पठान

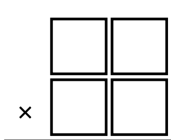
उत्तर के लिए पेज 59 देखें।

गुणनफल को इष्टतम बनाना

पार्श्विक सोच के कुछ शानदार उपयोग

स्वाती सरकार

“रैण्डम डिजिट्स” नामक खेल उच्च स्तरीय चिन्तन कौशल की माँग करता है। यह खेल सभी खिलाड़ियों के लिए एक साझा बोर्ड के साथ शुरू होता है। बोर्ड मूलतः दो बहु-अंकीय पूर्ण संख्याओं के साथ जोड़, घटा या गुणा करने के लिए है। इसमें संक्रियाएँ निर्धारित होती हैं। साथ ही यह भी निर्धारित होता है कि संक्रिया के लिए इस्तेमाल होने वाली प्रत्येक पूर्ण संख्या कितने अंकों की होगी। अलबत्ता, इन संख्याओं के अंकों की जगह ख़ाली छोड़ दी जाती है। जैसे ही सुगमकर्ता प्रत्येक अंक का नाम बताता है, खिलाड़ी तुरन्त उन्हें बोर्ड पर रखते हैं। एक बार रखे जाने के बाद अंक की स्थिति नहीं बदली जा सकती। अग्रणी (पहला) अंक शून्य नहीं हो सकता; अर्थात इसे किसी भी संख्या के सबसे बाएँ खाने में नहीं रखा जा सकता। यदि किसी खिलाड़ी को ऐसा करने के लिए मजबूर किया जाता है, तो उसे अयोग्य घोषित कर दिया जाता है। यदि खिलाड़ी योग, अन्तर या गुणनफल को अधिकतम करने का विकल्प चुनते हैं, तो विजेता वह होता है जिसका परिणाम अधिकतम है (योग, अन्तर और गुणनफल)। अलबत्ता, खिलाड़ी न्यूनतम परिणाम का लक्ष्य भी चुन सकते हैं। दोनों ही मामलों में, खिलाड़ियों को यह सोचना पड़ता है कि अपने परिणाम को इष्टतम बनाने के लिए प्रत्येक अंक को कहाँ रखा जाए। प्रत्येक खेल के बाद सर्वोतम परिणाम पर चर्चा करना एक अच्छा विचार होगा। खेल पर अधिक विवरण https://shorturl.at/hkxV3 पर देखा जा सकता है।



चित्र-1

हम 2-अंकीय × 2-अंकीय गुणन के लिए उक्त खेल खेल रहे थे और गुणनफल को अधिकतम करना चाहते थे। दिए गए अंक 2, 5, 8 और 9 थे, हालाँकि ज़रूरी नहीं कि इसी क्रम में हों। अधिकतम सम्भव गुणनफल पर चर्चा

की-वर्ड : *तर्क करना, सम्बन्ध बनाना, रणनीति बनाना, गणित के खेल*

करते समय, यह बिल्कुल स्पष्ट था कि 2 और 5 को इकाई के स्थान पर होना चाहिए, जबकि 8 और 9 को दहाई के स्थान पर होना चाहिए। उच्च अंक अग्रणी (पहले) अंक होने चाहिए और निम्न अंक इकाई स्थान पर होने चाहिए, यह निष्कर्ष हमें ऐसी चर्चाओं से मिल जाता है लेकिन 95 × 82 या 92 × 85 में से कौन-सा बड़ा है? बिना गणना किए हम इसका पता कैसे लगा सकते हैं?

एक खिलाड़ी ने तर्क दिया कि 92 × 85 बड़ा होगा क्योंकि 92 – 85 = 7 का अन्तर छोटा है (95 – 82 = 13 के अन्तर की तुलना में)। उसने तर्क दिया कि गुणनफल को अधिकतम करने के लिए, संख्याओं के बीच के अन्तर को कम-से-कम किया जाना चाहिए।

क्या यह सही है?

1. क्या आप निम्नलिखित की जाँच कर सकते हैं?

   क. 73 × 52 = ---------------- बनाम 72 × 53 = ----------------

   ख. 61 × 84 = ---------------- बनाम 64 × 81 = ----------------

   ग. 92 × 41 = ---------------- बनाम 91 × 42 = ----------------

   घ. 85 × 72 = ---------------- बनाम 82 × 75 = ----------------

2. क्या यह 2-अंकों से आगे सामान्यीकृत होता है?

   क. 95 × 3 = ---------------- बनाम 93 × 5 = ----------------

   ख. 84 × 2 = ---------------- बनाम 82 × 4 = ----------------

   ग. 743 × 12 = ---------------- बनाम 123 × 74 = ----------------

   घ. 854 × 23 = ---------------- बनाम 234 × 85 = ----------------

3. क्या यह तब भी सामान्यीकृत होता है जब सबसे बड़ा अंक (पहला) अग्रणी अंक नही होता?

   क. 36 × 4 = ---------------- बनाम 34 × 6 = ----------------

   ख. 59 × 28 = ---------------- बनाम 58 × 29 = ----------------

   ग. 190 × 46 = ---------------- बनाम 140 × 96 = ----------------

4. 27 × 35 = ----------------के अन्तराल के साथ 35 - 27 = ---------------- बनाम 73 × 52 = ---------- के अन्तराल के साथ 73 – 52 = 21? इस मामले में यह काम क्यों नही करता?

यह विचार उस जाने-माने परिणाम से लिया गया है कि किसी आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होता है यदि वह एक वर्ग है। खोज-बीन करके कोई भी देख सकता है कि वास्तव में, जैसे-जैसे कोई आयत, एक वर्ग के करीब आता जाता है, उसका क्षेत्रफल बढ़ता जाता है। अब एक आयत एक वर्ग के करीब तभी पहुँचता है जब क्रमागत भुजाओं के किसी भी जोड़े की लम्बाई अधिक-से-अधिक बराबर हो जाती है। या दूसरे शब्दों में, जब दो क्रमागत भुजाओं की लम्बाई के बीच अन्तर कम-से-कम होता जाता है।

लेकिन इष्टतम बनाने के इस काम को करने के लिए एक और शर्त है जिसे पूरा किया जाना चाहिए। शर्त है कि भुजाओं की लम्बाईयाँ बदलने के साथ आयत का परिमाप नहीं बदलना चाहिए।

इसका हमारी समस्या से क्या सम्बन्ध है?

दो आयतों पर विचार करें।

	आयत क	आयत ख
लम्बाई-चौड़ाई	95 सेमी × 82 सेमी	92 सेमी × 85 सेमी
परिमिति	2 (95 सेमी+82 सेमी) = 2 × 177 सेमी	2 (92 सेमी + 85 सेमी) = 2 × 177 सेमी
क्षेत्रफल	95 सेमी × 82 सेमी = 7790 सेमी^{2}	92 सेमी × 85 सेमी = 7820 सेमी^{2}

चूँकि हमने पहले ही 2 और 5 को इकाई के रूप में तथा 8 और 9 को दहाई के रूप में तय कर लिया था, जोड़ के क्रम-विनिमय और साहचर्य गुणों के संयोजन का उपयोग करते हुए हमें एक ही योग प्राप्त होता है, अर्थात

$$95 + 82 = 90 + 5 + 80 + 2$$
$$= 90 + 2 + 80 + 5$$
$$= 92 + 85$$

यह योग और कुछ नहीं बल्कि आयत A और B के परिमाप का आधा है। इसलिए इस मामले में निश्चित परिमाप की शर्त पूरी होती है। अब क्षेत्रफल और कुछ नहीं बल्कि इन संख्याओं का गुणनफल है। इसलिए, जब संख्याएँ क़रीबी होती हैं तो क्षेत्रफल अधिकतम हो जाता है।

इसलिए सामान्य तौर पर कहें तो यदि दो संख्याओं का योग समान है, तो उनका गुणनफल तब अधिकतम होता है जब उनका अन्तर सबसे कम होता है।

नोट : क्या ऊपर दिए प्रश्न 4 में संख्याओं की दो जोड़ियों के लिए योग समान रहता है?

एक टॉपिक से आगे जाना आसान नहीं होता। लेकिन इस खिलाड़ी ने ध्यान दिया कि 2-अंकीय × 2-अंकीय गुणा के खेल में (जब बड़े अंकों को दहाई के स्थान पर रखा गया हो) संख्याओं का योग बराबर रहता है। अत: वह इसे निश्चित परिमाप की शर्त से जोड़ पाया। उसने ध्यान दिया कि गुणनफल और कुछ नहीं बल्कि आयत का क्षेत्रफल है। और इस आधार पर उसने क्षेत्रफल के परिणाम को गुणनफल को अधिकतम करने में उपयोग कर लिया। किसी अंकगणितीय सवाल को हल करने में यह क्षेत्रमिति का बेहतरीन उपयोग है!!

सोचने के लिए

1. 2, 5, 8, 9 के लिए न्यूनतम गुणनफल क्या होगा?
2. यदि आप 2-अंकीय × 2-अंकीय के लिए गुणनफल को इष्टतम करना चाहते हैं तो आप कैसे रणनीति बनाएँगे?
3. आप 2-अंकीय × 3-अंकीय के गुणनफल को इष्टतम करने की रणनीति कैसे बनाएँगे?

खेलों के इस समूह का मूल विचार विद्यार्थियों को बेईमानी (cheating) करने या एक-दूसरे से नक़ल करने से रोकना था। अलबत्ता, यह उससे कहीं अधिक साबित हुआ।

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्राध्यापक हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला चित्रकला है)। वे भारतीय सांख्यिकी संस्थान से बी.स्टैट-एम.स्टैट और वाशिंगटन विश्वविद्यालय सिएटल से गणित में एमएस हैं। वे एक दशक से अधिक समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित विषय पर काम कर रही हैं। विशेष रूप से ओरिगामी आधारित किसी भी चीज़ में उनकी गहरी रुचि है। स्वाती से swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमांशु बावनकर **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** प्रतिका गुप्ता

भाग कलन विधि को सिखाने के ढंग पर कुछ विचार

अर्धेन्दु शेखर दाश

राष्ट्रीय शिक्षा नीति (एनईपी—2020) बुनियादी गणितीय कौशलों में सीखने के गम्भीर संकट को सामने रखती है। तमाम सरकारी और ग़ैर-सरकारी सर्वे भी यही बताते हैं। यह संकट इतना गम्भीर क्यों है? एक बार बुनियादी गणितीय कौशलों में पिछड़ने के बाद, वर्षों तक विद्यार्थियों के सीखने का प्रगति-पथ बढ़ता हुआ न होकर सपाट ही बना रहता है, और वे कभी भी उस स्तर तक नहीं पहुँच पाते हैं, जिस स्तर पर शिक्षण चल रहा होता है। यह कई विद्यार्थियों के लिए स्कूल नहीं जाने का या स्कूल को पूरी तरह छोड़ देने का बड़ा कारण बन जाता है।

भाग (division), गणित का ज़रूरी विषय है। बदक़िस्मती से प्राथमिक स्कूलों के ज़्यादातर बच्चे इसमें अक्सर ग़लतियाँ करते और इससे जूझते मिलते हैं। यह लेख मुख्य रूप से जिन बातों पर केन्द्रित है, वे हैं — भाग कलन विधि (division algorithm) का इस्तेमाल करते हुए विद्यार्थी किस तरह की ग़लतियाँ करते हैं, इन ग़लतियों के क्या सम्भावित कारण हैं और कौन-से शिक्षणशास्त्रीय तौर-तरीक़ों से इनका समाधान किया जा सकता है। साथ ही यह लेख इबारती सवालों (word problems) को हल करने के अलग-अलग सन्दर्भों में भागफल का आकलन करने, नतीजे का सत्यापन करने और भाग की अवधारणा को समझने के महत्त्व को प्रमुखता से प्रस्तुत करता है।

आइए, एक सवाल से शुरू करते हैं : यदि कोई विद्यार्थी भाग कलन विधि का इस्तेमाल करता है तो क्या वह जाँच सकता है कि भागफल सही है या नहीं? इसका जवाब है हाँ, वह भागफल के आकलन और सत्यापन से ऐसा कर सकता है। हालाँकि, हमारी अधिकतर कक्षाओं में पढ़ाने के दौरान आकलन और सत्यापन पर ज़्यादा ध्यान नहीं दिया जाता है।

की-वर्ड : *प्रक्रियागत समझ; अवधारणात्मक समझ; भाग कलन विधि; टीएलएम*

गणित में आकलन सटीक जवाब को जाँचने के क्रम में किसी अनुमानित उत्तर का मोटा-मोटा परिकलन (calculation) करने की प्रक्रिया है। इसके लिए सोचने का ऊँचे दर्जे का कौशल चाहिए। भाग करना सिखाने का बहुत ज़रूरी हिस्सा भागफल का आकलन करना सिखाना है। इस कौशल का इस्तेमाल करके विद्यार्थी भाग के सवाल का अनुमानित जवाब पा सकते हैं। इससे वे यह भी जाँच सकते हैं कि उनका जवाब कितना सही है। भागफल का आकलन करने का एक तरीक़ा भाज्य (dividend) और भाजक (divisor) को उनकी क़रीबी संख्या से सन्निकटन करना है। आइए, 242 ÷ 22 के भाग के सवाल में भागफल के आकलन को समझते हैं। भाज्य 242 और भाजक 22 को उनकी सबसे क़रीबी दहाई (Tens) संख्या पर सन्निकटन करने पर हमें क्रमशः 240 और 20 की संख्याएँ मिलती हैं। ऐसे में, हम मन-ही-मन 240 ÷ 20 का परिकलन करेंगे, जो कि 24 ÷ 2 = 12 होगा। इस तरह, 242 को 22 से भाग देने पर भागफल का आकलन 12 होगा।[1] यह करने के लिए विद्यार्थी को संख्याओं का सन्निकटन करने के लिए, दहाई की घातों (powers) से भाग देने और पहाड़ों (Tables) में माहिर होना ज़रूरी है।

भाग का एक और महत्त्वपूर्ण पहलू 'नतीजे का सत्यापन' है। भाग सिखाते वक़्त हमें विद्यार्थियों से कहना चाहिए कि वे पता लगाएँ कि भाज्य, भाजक, भागफल और शेष के बीच क्या सम्बन्ध है। भाग के विभिन्न सवालों में इनके बीच सम्बन्ध पर ध्यान देकर इनके सम्बन्ध का पता लगाया जा सकता है। इस बानगी के आधार पर विद्यार्थी इनके सम्बन्ध को ऐसा पाएँगे— "भाज्य = भाजक × भागफल + शेष"। और इस तरह, वे इस सम्बन्ध का इस्तेमाल करके भागफल का सत्यापन करने के लिए प्रोत्साहित होंगे। उदाहरण के लिए, 517 को 5 से भाग देने पर किसी विद्यार्थी को भागफल 13 और शेष 2 प्राप्त होता है तो वह विद्यार्थी भागफल का सत्यापन इस प्रकार कर सकता है —

$$\text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष} = 5 \times 13 + 2$$
$$= 65 + 2 = 67$$

यह भागफल 517 के बराबर नहीं है। यह नतीजा विद्यार्थी को सतर्क कर देता है कि भागफल सही नहीं है।

भाग की **अवधारणा को समझने की अहमियत :** इबारती सवालों को हल करने में विद्यार्थियों के लिए चुनौती यह समझना है कि कौन-सी संख्या संक्रिया (number operation) का इस्तेमाल किया जाए। ज़्यादातर विद्यार्थी सवाल के भीतर के संकेत-शब्दों (cue words) से अन्दाज़ा लगाने की कोशिश करते हैं और उस शब्द से जुड़ी संक्रिया का इस्तेमाल करते हैं। लेकिन यह ज़रूरी नहीं है कि वह शब्द उस संक्रिया को इंगित कर रहा हो और इस ओर भी इशारा कर रहा हो कि इसमें कौन-सी संख्याएँ शामिल हैं। आइए, इस बात को यहाँ दो उदाहरणों से समझते हैं।

उदाहरण 1 : यदि 40 केकों को समान रूप से 4 थैलों में रखा गया है, तो हर थैले में कितने केक होंगे?

उदाहरण 2 : राजेश 40 केक बनाता है और उन्हें 10-10 के डिब्बों में रखता है। उसे कितने डिब्बे चाहिए होंगे?

उदाहरण 1 में क्रिया विशेषण 'समान रूप से' इस ओर इंगित करता है कि प्रश्न को हल करने के लिए भाग की ज़रूरत है, जबकि उदाहरण 2 के प्रश्न में ऐसा कोई संकेत-शब्द नहीं दिया गया है, तो विद्यार्थी को प्रश्न का हल करने के लिए इसमें बताई गई स्थिति को समझना पड़ेगा। इसलिए, भाग की अवधारणा के विभिन्न सन्दर्भों को समझने की आवश्यकता है और बतौर शिक्षक, भाग के बारे में पढ़ाते समय हमें इनमें से कुछ सन्दर्भों के बारे में बच्चों के साथ चर्चा करने की ज़रूरत है।

प्राथमिक कक्षाओं में भाग सिखाने के लिए जिन दो सन्दर्भों का इस्तेमाल किया जाता है, वे 'समान सहभाजन' (equal sharing) और 'समान समूहन' (equal grouping) से जुड़े हुए हैं।

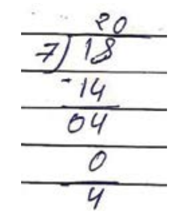
समान सहभाजन : इस सन्दर्भ में हमें मालूम करना होता है कि जब किसी दी गई तादाद को कई समान हिस्सों में बाँटा जाता है तो हर हिस्से में उस तादाद की कितनी मात्रा होती है। उदाहरण के लिए, एक टोकरी में 6 आम हैं और इन्हें 3 विद्यार्थियों में

1. नोट : यहाँ 242 ÷ 22 के उदाहरण का इस्तेमाल किया गया है। जब 242 को 240 और 22 को 20 में सन्निकटन किया जाता है, तो जो उत्तर मिलता है वह सही जवाब के काफ़ी क़रीब होता है। लेकिन, यह ज़रूरी नहीं है कि हर बार मामला ऐसा ही हो। मिसाल के तौर पर, 242 को 16 से भाग दें, तो 16 भी 20 पर सन्निकटित होता है। इससे अनुमानित उत्तर 12 मिलता है, जबकि 242 ÷ 16 तक़रीबन 15 के बराबर होता है। यहाँ महत्त्वपूर्ण यह है कि हम उस अनुमानित सीमा को पा सकते हैं, जिसके बीच सही उत्तर आता है। कृपया इसी अंक में 'बहु-अंकीय विभाजकों' (Multi-Digit Divisors) पर लेख को पढ़ें, जिसमें आकलन पर ज़्यादा विस्तार से चर्चा की गई है।

बाँटना है। हर विद्यार्थी को कितने आम मिलेंगे? इस सन्दर्भ की समझ बनाने का सबसे आसान तरीक़ा यह है कि एक बार में हर विद्यार्थी को एक-एक आम देते हुए तब तक आम बाँटे जाएँ, जब तक कि सभी आम समान रूप से न बँट जाएँ।

समान समूहन : इस सन्दर्भ में हमें यह मालूम करना होता है कि किसी दी गई तादाद में से किसी तय माप के कितने हिस्से प्राप्त किए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि एक टोकरी में 6 आम हैं और हम 2-2 आमों के पैकेट बना रहे हैं, तो हम कितने पैकेट बनाएँगे? यह सवाल 6 आमों में से 2-2 आमों के समूहों का पता लगाने के बारे में है। बार-बार घटाते हुए, इसका पता लगाया जा सकता है।

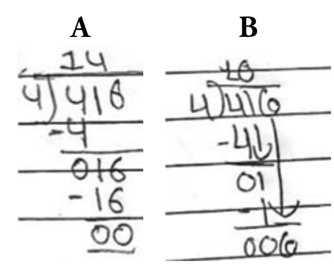
भाग कलन विधि को अमल में लाते समय होने वाली ग़लतियाँ : मैंने पाया है कि विद्यार्थी भाग कलन विधि में ग़लतियाँ इसलिए करते हैं क्योंकि उन्हें भाग, घटाना, गुणा और स्थानीय मान की अवधारणाओं की ठीक से समझ नहीं होती है। हम पाते हैं कि अगर भागफल में 'शून्य' को छोड़ दिया जाए तो 416 ÷ 4 के भाग का उत्तर 14 आता है; लेकिन जैसा कि पहले बताया गया है, हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि 416 ÷ 4 का उत्तर 14 नहीं हो सकता है। इसकी जाँच इस तथ्य से होती है कि 14 × 4 = 56 होता है, जो भाज्य 416 के बराबर नहीं है (देखें **चित्र-2A**)। या फिर विद्यार्थी यह आकलन कर सकते हैं कि भागफल 14 नहीं हो सकता है क्योंकि जब हम 400 ÷ 4 का भाग करते हैं तो भागफल 100 आता है, यानी इस सवाल में भागफल 100 से ज़्यादा ही होना चाहिए।



चित्र-1

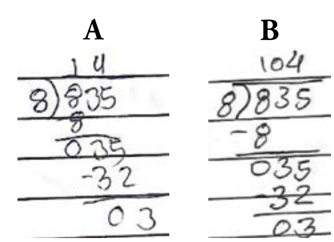
मैंने कक्षा 4 के विद्यार्थियों को पूर्णांकों का भाग करने के लिए कुछ सवाल दिए। मैंने दो बिन्दुओं पर विद्यार्थियों के जवाबों का विश्लेषण किया — बच्चे क्या जानते हैं, और उन्हें क्या समझने की ज़रूरत है। आइए, बच्चों के कुछ जवाबों पर ग़ौर करते हैं।

18 ÷ 7 के भाग के प्रश्न का पहला जवाब (**चित्र-1**) बताता है कि विद्यार्थी को भाग की प्रक्रिया तो मालूम है, लेकिन उसकी पूरी समझ नहीं है। यहाँ विद्यार्थी को यह नहीं पता है कि कब सारे स्थानों का भाग पूरा होता है, और क्या भाग का एक और चरण करने की ज़रूरत है या नहीं। इसके साथ ही, भागफल में लिखा नतीजा दिखाता है कि विद्यार्थी को भाग के गुण की जानकारी नहीं है — कि पूर्णांकों के भाग में भागफल हमेशा भाज्य से कम होगा। उत्तर को सत्यापित करने के लिए आकलन का इस्तेमाल भी किया जा सकता है।



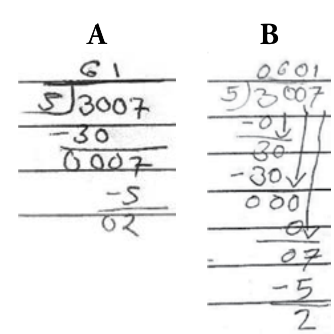
चित्र-2

मैं 416 ÷4 के सवाल के दो जवाबों को यहाँ पेश कर रहा हूँ। पहला जवाब (**चित्र-2A**) दिखाता है कि विद्यार्थी ने एक बार में एक ही स्थान का भाग करने का तरीक़ा नहीं अपनाया है। जब 4 सौ का 4 से भाग दिया गया तो सैकड़े के स्थान पर भागफल 1 आया। लेकिन फिर, दहाई और इकाई के स्थानों को एक करते हुए 16 इकाई बना ली गई, जिसे 4 से भाग दिया गया, और इसका नतीजा भागफल में इकाई अंक में 4 आया। यहाँ विद्यार्थी से स्थानीय मान की प्रणाली के आधार पर भागफल नहीं लिखा गया। उसने 104 के बजाय इसे 14 मान लिया। दूसरे जवाब (**चित्र-2B**) के मामले में हम देखते हैं कि विद्यार्थी ने 4 को 0 से गुणा करने में ग़लती की है। बच्चे अक्सर ऐसी ग़लती करते हैं। ऐसा ज़्यादातर इसलिए होता है क्योंकि पहाड़े सिखाते वक़्त हम गुणा की शुरुआत 0 के बजाय 1 से करते हैं। बाद में, इस विद्यार्थी ने इकाई के स्थान पर 6 को छोड़ दिया, और यह मान लिया कि भाग पूरा हो गया है। इन दोनों ही मामलों में भागफल का आकलन विद्यार्थियों के लिए मददगार साबित होता।



चित्र-3

अब 835 ÷8 का सवाल लेते हैं। पहले जवाब (**चित्र-3A**) में हम समझ सकते हैं कि बच्चे से यह ध्यान रखने में चूक हुई है कि 8 के बाद सिर्फ़ 3 दहाई होगी जिसमें 8 का भाग देना है; इसने भागफल में दहाई के स्थान पर 0 दिया होता। इसके बजाय विद्यार्थी ने 35 इकाई का 8 से भाग दे दिया। जबकि दूसरे जवाब (**चित्र-3B**) में बच्चा 35 इकाई में 8 का भाग देते समय सही भागफल को लिख पाया।



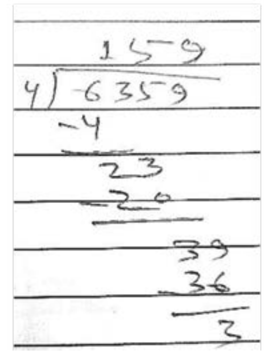
चित्र-4

चित्र-4 में दिए गए दो जवाबों में अन्तर भागफल के सत्यापन की ज़रूरत का मज़बूत पक्ष पेश करता है। **चित्र-4B** सही प्रक्रिया और भागफल को दिखाता है, और बताता है कि बच्चे ने हर स्थान के चरण-दर-चरण भाग की पालना की है। **चित्र-4A** में जिस विद्यार्थी का जवाब दर्शाया गया है, उसे इस तरह से अपने भाग की जाँच करने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है-

$$\text{भाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेष} = 5 \times 61 + 2$$

$$= 305 + 2 = 307$$

यह भागफल 3007 के बराबर नहीं है। इस नतीजे से विद्यार्थी को सतर्क हो जाना चाहिए कि भागफल सही नहीं है।



चित्र-5

चित्र-5 में, 6359 ÷ 4 के भाग में बच्चे से शायद इसलिए ग़लती हुई है क्योंकि उसने अंकों को उनके सही स्थान पर नहीं लिखा है, यानी इकाई के नीचे इकाई, दहाई के नीचे दहाई आदि। अंकों को अपनी सही जगह पर नहीं रखने के कारण विद्यार्थी दहाई के स्थान पर मौजूद 5 को लिखने से चूक गया होगा। चार या अधिक अंकों वाली संख्याओं के भाग में आमतौर पर इस प्रकार की ग़लतियाँ देखने को मिलती हैं। इससे पता चलता है कि बड़ी संख्याओं के भाग का काम शुरू करने से पहले, यह आकलन करने पर ज़ोर दिया जाना चाहिए कि इससे किस तरह का जवाब मिल सकता है। अपेक्षित उत्तर का आकलन करके ही कलन विधि की औपचारिक प्रक्रिया शुरू करनी चाहिए।

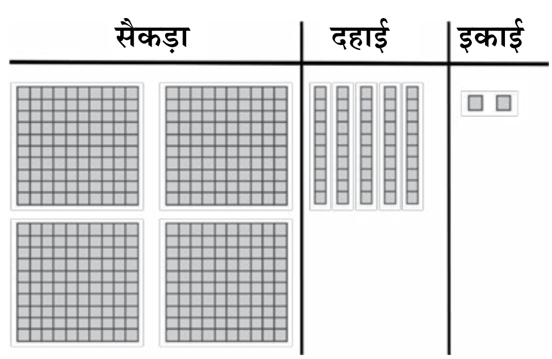
ऊपर दिए गए जवाबों से हम इस नतीजे पर पहुँच सकते हैं कि बच्चे जो बुनियादी ग़लतियाँ करते हैं वे इस प्रकार हैं—

- स्थानीय मान की ठीक से समझ न होना।
- यह स्पष्ट न होना कि शून्य से गुणा करने पर क्या होता है? कुछ विद्यार्थी ऐसा मानते हैं कि $4 \times 0 = 1$ या 4 होता है।
- यह नहीं समझ पाना कि सभी स्थानों का भाग हो चुका है या नहीं। भाग कलन विधि में, एक बार में एक स्थान का भाग करना अच्छा रहता है। इसमें महारत होने के बाद आप दो स्थानों को मिलाकर भी भाग दे सकते हैं, लेकिन भागफल लिखते समय सावधानी बरतनी चाहिए।
- भाग के प्रश्न के उत्तर को जाँचने के लिए आकलन के कौशल का इस्तेमाल नहीं करना।

यह समझना महत्त्वपूर्ण है कि भाग की कलन विधि सिखाते वक़्त विद्यार्थियों के साथ कैसे काम किया जाए, जिससे कि वे इस प्रक्रिया की अवधारणा को समझ पाएँ और उनसे कम-से-कम ग़लतियाँ हों।

शिक्षण के तरीक़े में, हम शुरुआत में ठोस वस्तुओं को लेते हैं और फिर उन्हें भाग कलन विधि के प्रतीकात्मक स्वरूपों से जोड़ते हैं। भाग कलन विधि की अवधारणा और प्रक्रिया को समझाने में काम आ सकने वाली शिक्षण अधिगम सामग्रियों (टीएलएम) में से एक डींस ब्लॉक (Dienes blocks) है। इसके ज़रिए विद्यार्थी पूरी प्रक्रिया को अपने सामने साकार होते देख सकते हैं और कलन विधि को इस तरह समझ सकते हैं कि जिसके बाद वे कितने भी अंकों वाली संख्या की भाग कलन विधि को कर सकते हैं। यहाँ शिक्षक को चाहिए कि वह पूरे समूह के साथ चर्चा के बाद विद्यार्थियों को विभिन्न सवालों के लिए टीएलएम के साथ काम करवाएँ।

आइए, ‘452 ÷ 4 = ?’ के उस उदाहरण को देखें, जिसका इस्तेमाल मैंने अपनी शिक्षण पद्धति को बतलाने के लिए किया था। हमारी शुरुआती चर्चा में, विद्यार्थियों का आकलन होता है कि इस प्रश्न का उत्तर 100 से कुछ ज़्यादा होगा। शिक्षक उनसे डींस ब्लॉक का इस्तेमाल करते हुए 452 को दिखाने के लिए कहते हैं। इसके बाद, सैकड़ा, दहाई और इकाई के ब्लॉकों के ज़रिए ज़मीन पर स्थानीय मान

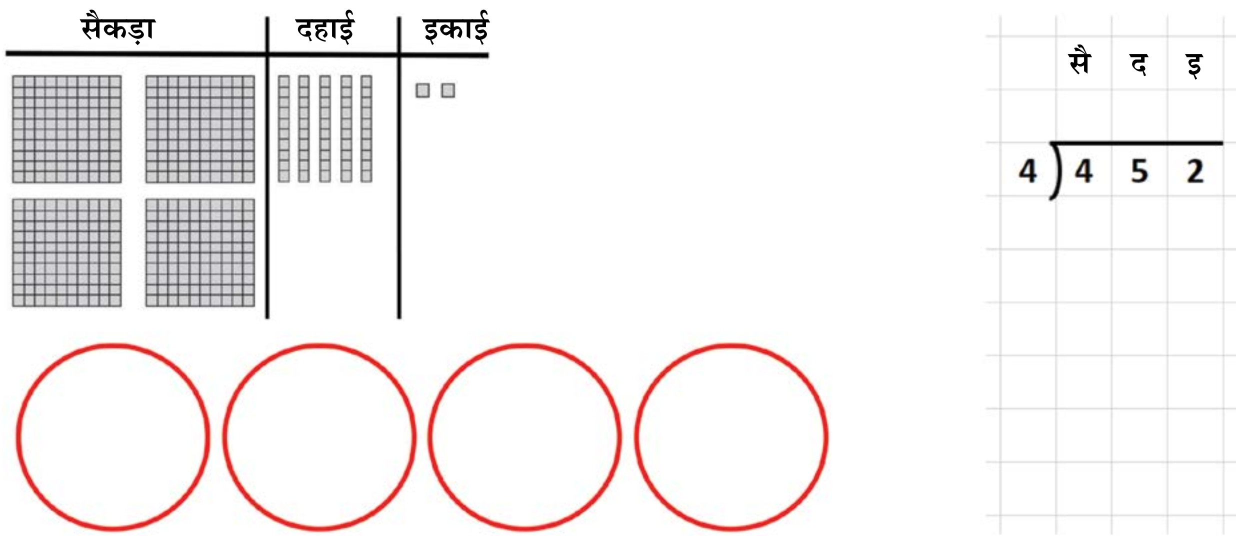


चित्र-6

का चार्ट बनाया जाता है, जिसमें विद्यार्थी उपयुक्त डींस ब्लॉक रखते हैं। इस प्रक्रिया के दौरान अवधारणात्मक समझ को जाँचने के लिए कुछ सवाल पूछे जाते हैं, जो इस प्रकार हैं—

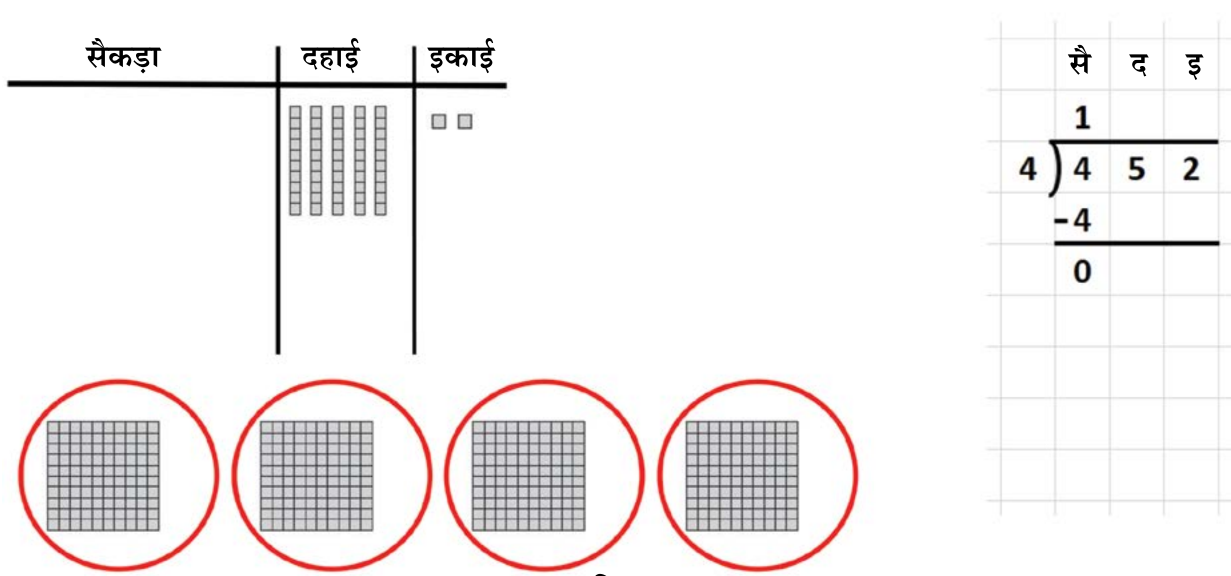
- 452 में कितने सैकड़ा, दहाई और इकाई हैं?
- क्या हम 12 = ... इकाई लिख सकते हैं?
- क्या हम 52 = 4 दहाई + 12 इकाई लिख सकते हैं?

इसके बाद, शिक्षक भाग कलन विधि की अवधारणा पर चर्चा करने के लिए समान सह-भाजन की अवधारणा का इस्तेमाल करते हैं। समान सह-भाजन की प्रक्रिया को दिखाने के लिए शिक्षक चार वृत्त बनाते हैं, और प्रश्न के प्रतीकात्मक स्वरूप को भी लिखते हैं और उन्हें इस प्रक्रिया से जोड़ते हैं।



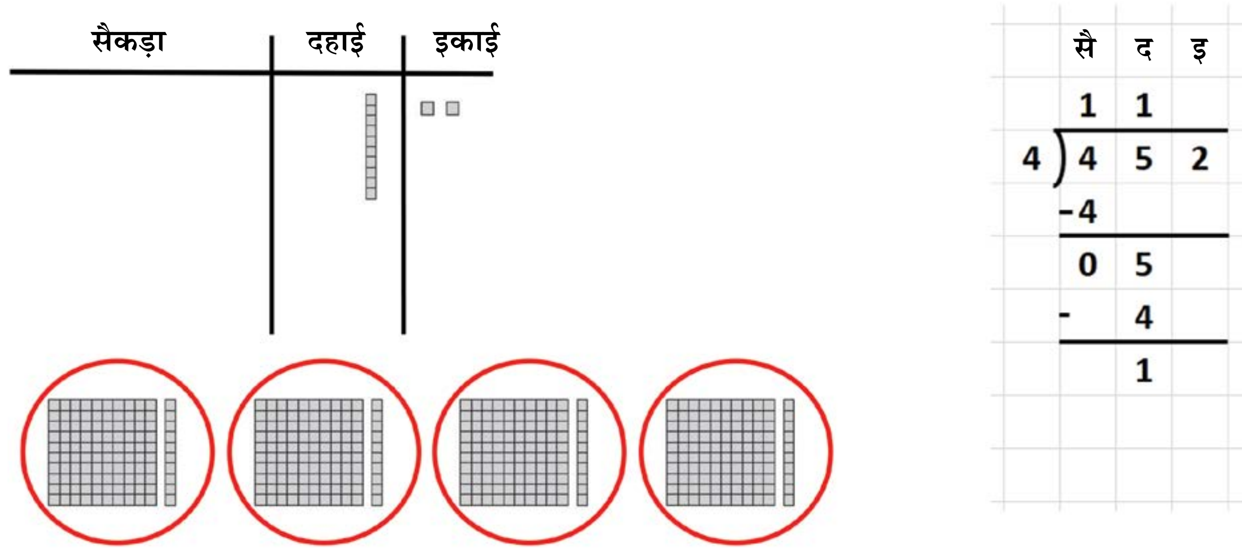
चित्र-7

चरण 1 : पहले, 4 सैकड़े को 4 से भाग करिए। यानी, 4 सैकड़े को 4 समूहों में बाँटिए। हम पाते हैं कि हर समूह में 1 सैकड़ा है, जिसका मतलब हुआ कि भागफल 1 है और शेष शून्य है। इस प्रक्रिया को समझाते हुए हम साथ-साथ ही प्रतीकात्मक स्वरूप को भी लिखते जाते हैं।



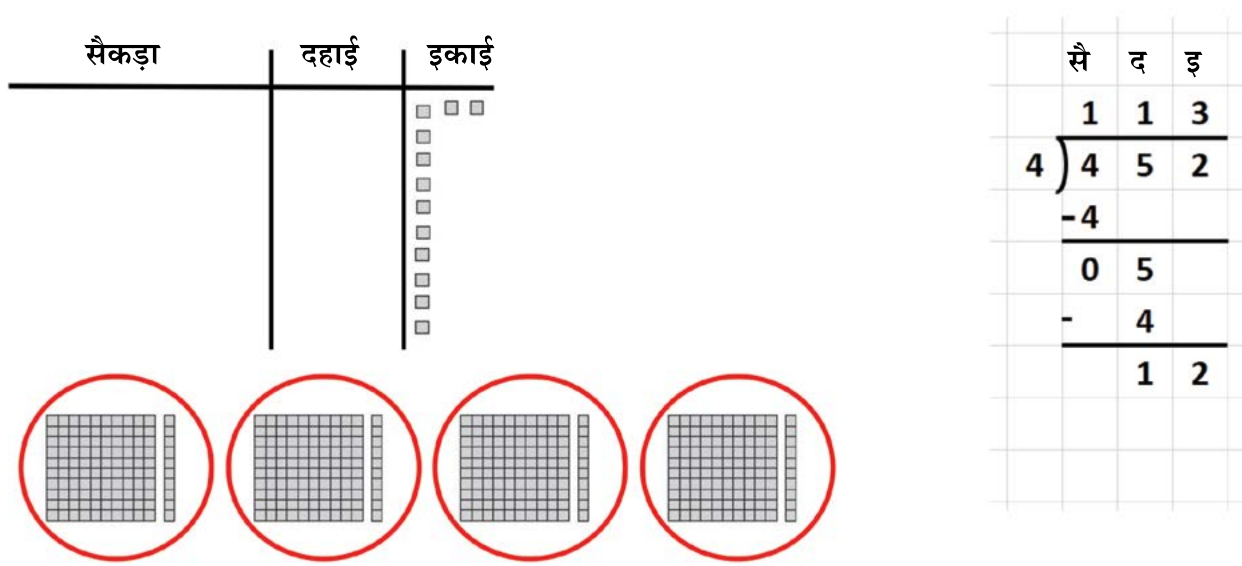
चित्र-8

चरण 2 : अब हम दूसरे स्थान की ओर बढ़ते हैं, यानी कि दहाई का स्थान (देखें **चित्र-8**)। यहाँ 5 दहाई हैं, और हमें इन्हें 4 से भाग करना है (यानी, 4 समूहों में बाँटना है)। सभी ब्लॉकों को देखने पर, हम इस नतीजे पर पहुँचते हैं कि हमारे पास हर समूह में 1 दहाई है। तो हम भागफल में दहाई के स्थान पर 1 लिखते हैं और शेष 1 दहाई रहती है।



चित्र-9

चरण 3 : यहाँ, शेष दहाई को 4 समूहों में बाँटा नहीं जा सकता है लेकिन उसको इकाई में बदला जा सकता है। तो, वहाँ पहले से मौजूद 2 इकाई में 10 दहाई को जोड़ने पर हमें 12 इकाई मिलती हैं।

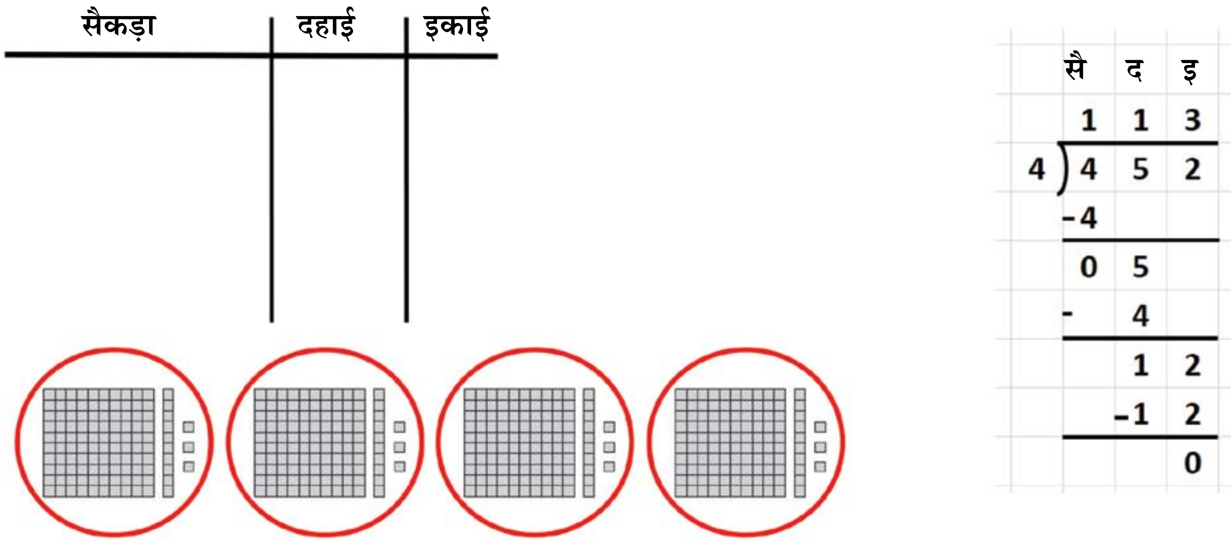


चित्र-10

चरण 4 : अब हम 12 इकाई को 4 समूहों में बाँटेंगे। हमें हर समूह में 3 इकाई मिलेगी; यानी भागफल में इकाई के स्थान पर 3 है और शेष कुछ भी नहीं है।

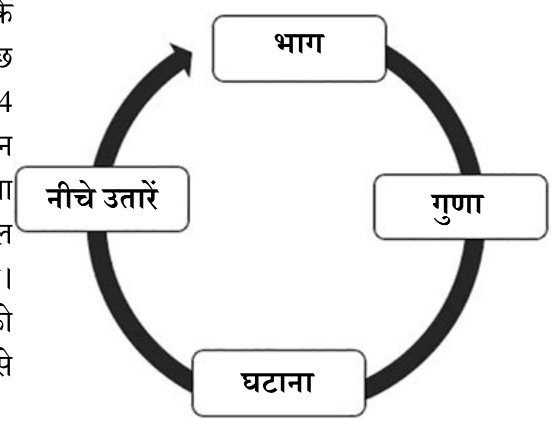
इस तरह, जब हम 452 का 4 से भाग करते हैं तो हमें 1 सैकड़ा, 1 दहाई और 3 इकाई मिलते हैं; यानी, 452 ÷ 4 = 113

इसे भाग कलन विधि में प्रदर्शित करते हुए हम भाग करने, गुणा करने, घटाने के चरणों को दोहराएँ और अगले स्थान को तब तक नीचे लाते रहें जब तक कि सभी स्थान का भाग नहीं हो जाता।



चित्र-11

शिक्षक 452 ÷ 4 की प्रक्रिया और इसके प्रतीकात्मक स्वरूप पर चर्चा के बाद, विद्यार्थियों को समूहों में डीन्स ब्लॉक[2] के साथ काम करते हुए कुछ और सवाल हल करने के लिए दे सकते हैं, जैसे कि 204 ÷ 2, 320 ÷ 4 इत्यादि। शिक्षक ध्यान दें कि बच्चे क्या प्रक्रिया अपना रहे हैं, और जिन समूहों को ज़रूरत हो उन्हें मदद करें। इसका अगला क़दम यह हो सकता है कि शिक्षक ऐसे सवाल दें जिनमें शेष शून्य नहीं हो। फिर, ऐसे सवाल दें जिनमें तीन अंकों की संख्या का दो अंकों की संख्या से भाग देना हो। शुरुआती चरण में, बच्चों को चौकोर ग्रिड पेपर दें ताकि वे संख्या को स्थानीय मान के मुताबिक़ लिख सकें, और भाग कलन विधि को ढंग से कर पाएँ।



चित्र-12

मुझे लगता है कि इस तरह से हम विद्यार्थियों में भाग को सीखने के मामले में काफ़ी सुधार ला सकते हैं। इसका नतीजा यह होगा कि अधिकतर विद्यार्थी पूर्णांकों का भाग अवधारणात्मक स्पष्टता और प्रक्रियागत रवानी के साथ आसानी से कर पाएँगे।

अर्धेन्दु शेखर दाश अज़ीम प्रेमजी स्कूल, धमतरी के प्रिंसिपल हैं। इससे पहले, वे अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन में स्रोत-व्यक्ति के तौर पर काम कर चुके हैं। उन्होंने भुबनेश्वर में वाणी विहार स्थित उत्कल विश्वविद्यालय से गणित में स्नातकोत्तर की डिग्री हासिल की है। वे गणित से जुड़े मुद्दों पर शिक्षकों के साथ जुड़कर काम करते आए हैं। वे गणित के शिक्षण में अवधारणात्मक समझ बनाने के साथ-ही-साथ शिक्षणशास्त्रीय कार्यनीतियाँ बनाने पर केन्द्रित कार्यशालाएँ करते हैं। वे 8 वर्ष से अधिक समय से बच्चों के साथ गणित पर काम कर रहे हैं, और तकनीकी संसाधनों की पड़ताल, प्रयोग और डिज़ाइन करने में गहरी रुचि रखते हैं। वे ओपन डिस्टेंस लर्निंग के लिए पाठ्यचर्या डिज़ाइन करने की प्रक्रिया में, और छत्तीसगढ़ के लिए पाठ्यपुस्तकें लिखने में भी संलग्न हैं। उनसे arddhendu@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** भरत त्रिपाठी **कॉपी एडिटर :** अफसाना पठान

2. नोट : इस अंक में समीक्षा खण्ड में वर्णित एफ़एलयू (फ़्लैट्स, लॉन्स, यूनिट्स) को बहुत कम लागत में बनाकर विद्यार्थियों में बाँटा जा सकता है।

बहु-अंकीय-विभाजक से विभाजन

मैथ स्पेस

यह लेख एक शिक्षक के कार्य से प्रेरित है, जिन्होंने *एट राईट एंगल्स* [1] के जुलाई 2015 के अंक के '*Thoughts on the Division Operation*' लेख पढ़कर कक्षा-5 के साथ कार्य किया है।

संक्षिप्त पुनरावलोकन : भाग करना; जोड़ना, घटाना और गुणा से कई तरीक़ों से अलग है। मुख्यत: यह इन चारों संक्रियाओं में सबसे जटिल भी है, क्योंकि अन्य तीन संक्रियाओं के कलन (एल्गोरिदम) में किसी अनुमान की आवश्यकता नहीं होती है, चाहे वे कितनी भी बड़ी संख्या पर क्यों न लगाई जा रही हों। हालाँकि, दीर्घ विभाजन के मानक कलन में अनुमान लगाने की आवश्यकता होती है, साथ ही प्रक्रिया से अधिक जुड़ाव की भी आवश्यकता होती है, जिसमें *"अगर यह है, तो ऐसा करो"* के कई दोहराव होते हैं।

वर्तमान में एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तकों में प्रारम्भिक स्तर (कक्षा-5 तक) पर बहु-अंकीय भाजकों का कोई उल्लेख नहीं है। न ही इसके बाद यानी माध्यमिक स्तर (कक्षा-6 से 8) पर कोई उल्लेख है। तो, क्या हमें यह पढ़ाना चाहिए? क्या इसकी आवश्यकता तब भी है, जबकि कैलकुलेटर हर जगह हैं, यहाँ तक कि सामान्य फ़ोन में भी?

इन्हें अभी भी पढ़ाने के दो कारण हैं :

1. अमूमन हमें किसी बड़ी संख्या जैसे 365 से भाग देने की आवश्यकता नहीं पड़ती है, लेकिन यह जानना ज़रूरी है कि आवश्यकता पड़ने पर हमें कैसे भाग करना है। किसी बड़े भाजक से भाग देने की प्रक्रिया दो-अंकीय संख्या से भाग देने की प्रक्रिया (जिसमें अनुमान लगाना भी शामिल है) से विस्तारित होती है। इसीलिए, शिक्षार्थियों को दो-अंकीय विभाजक से वाक़िफ़ होना चाहिए।

2. हालाँकि, एक अधिक व्यावहारिक कारण यह भी है कि शिक्षार्थियों से स्कूल में अक्सर 2 अंकों की संख्या से भाग देने की अपेक्षा की जाती है। शिक्षार्थियों को कैलकुलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं दी जाती है। आगे कुछ उदाहरण दिए जा रहे हैं।

की-वर्ड : *विभाजन कलन, अनुमान, तर्क, प्रक्रियात्मक समझ*

7. एक दूधवाले ने अपनी दो भैंसे बेचीं, हरेक भैंस के उसे 20,000 रूपए मिले। एक भैंस पर उसे 5% का लाभ हुआ, तो दूसरी भैंस पर 10% का नुक़सान हुआ। बताइए उसे कुल कितना लाभ या नुक़सान हुआ। (हिंट : हरेक का लागत मूल्य (CP) पता करिए।)

10. 2003 में एक स्थान की जनसंख्या 5% प्रतिवर्ष की दर से बढ़कर 54000 हो गई —
(i) 2001 में जनसंख्या बताइए।
(ii) 2005 में जनसंख्या कितनी होगी?

उदाहरण कक्षा-8 की NCERT की पाठ्यपुस्तक के अध्याय-8 ‘राशियों की तुलना’ से लिए गए हैं।

अन्य उदाहरण यहाँ मिल सकते हैं :

- क्षेत्रमिति — किसी वृत्त की परिधि दी गई है और इस आधार पर उसकी त्रिज्या ज्ञात करने में। उदाहरण के लिए, एक ऐसे वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए जो 40 सेमी लम्बे तार को मोड़कर बनाया गया है।
- आँकड़ों का प्रबन्धन — माध्य की गणना करने में। उदाहरण के लिए, 23 ऐसी वस्तुओं का माध्य ज्ञात करना जिनका कुल योग 4178 है।

कक्षा-8 में आँकड़ों का प्रबन्धन (डेटा हैंडलिंग) पर सवाल हल करते समय के शिक्षक के एक अनुभव का संक्षिप्त विवरण नीचे दिया गया है।

शिक्षक : हमारे पास 23 वस्तुएँ हैं, जिनका कुल वज़न 4178 किलोग्राम है, क्या कोई इसके औसत वज़न का अनुमान लगा सकता है? आपने कैसे अनुमान लगाया, यह भी समझाना होगा।

विद्यार्थी-क : 200 किलोग्राम से कम है। क्योंकि 23×200 = 4600 किलोग्राम होते हैं।

विद्यार्थी-ख : 150 किलोग्राम से अधिक है। चूँकि 23×100 = 2300 किलोग्राम होते हैं इसलिए औसत 100 किग्रा की तुलना में 200 किग्रा के क़रीब होने चाहिए।

शिक्षक : बहुत बढ़िया सोचा! मैंने ग़ौर किया है कि आप अनुमान लगाने के लिए 10 और 100 के गुणजों का उपयोग कर रहे हैं। देखते हैं कि क्या आप ऐसा ही अनुमान 23 से भाग देने में लगा सकते हैं। आप 23 की नज़दीकी 10 की गुणज पूर्णांक संख्या, यानी 20 क्यों नहीं ले लेते? अब 41 को 20 से विभाजित करें और इसके भागफल के पहले अंक के लिए अनुमान लगाएँ।

विद्यार्थी-ग : इस तरह हमें 2 मिला, मुझे यह लगता है कि हम अनुमानित उत्तर से दूर जा रहे हैं।

शिक्षक : बहुत ही चौकस। तो चलिए जाँच करते हैं, 23 को 2 से गुणा करने पर हमें 46 मिला। और जैसा कि आपने कहा था यह 41 से अधिक है।

विद्यार्थी-ख : तो, भागफल का पहला अंक 1 है और शेषफल 41-23, यानी 18 है। क्या हम अगले अंक को नीचे उतारकर लाएँ, जैसा कि हम एक-अंकीय विभाजन में करते हैं?

शिक्षक : हाँ, ये हो गए 187, अब हम फिर से 20 को 9 से गुणा करके देखते हैं, यह 180 हुआ।

विद्यार्थी-क : ओह, तो हम 23×9 करके देखते हैं, 207 मिला। अब फिर हम 23×8 करके देखते हैं, यह 184 मिला, यह 187 के काफ़ी क़रीब है।

शिक्षक : तो, भागफल के पहले दो अंक हैं 1 और 8 और 3 हमारा नया शेषफल है। हम अगले अंक 8 को नीचे उतार लाएँ और 38 में 23 का भाग दें।

विद्यार्थी-ख : मुझे भागफल 181 मिला और शेषफल 15। तो, मेरे हिसाब से औसत वज़न लगभग 181 किलोग्राम है, दरअसल लगभग 181.5 किग्रा है। क्योंकि 15, 23 के आधा से अधिक है।

शिक्षक : हाँ, हम दशमलव के बाद भी विभाजन जारी रख सकते हैं। लेकिन अभी के लिए औसत वज़न निकालने के लिए यह एक अच्छा विचार है। आपको क्या लगता है ये 23 वस्तुएँ क्या होंगी?

विद्यार्थी-घ :... शायद कोई जानवर है? डॉल्फ़िन? मेरा पसन्दीदा जानवर।

शिक्षक : बहुत बढ़िया सुझाव है। मुझे पता है कि कुछ मोटरसाइकिलों का वज़न लगभग 200 किलोग्राम होता है। कुछ और ऐसी 'वस्तुओं' को खोजो जिनका वज़न 200 किलोग्राम होता है और कल इस पर चर्चा करते हैं कि इन 23 वस्तुओं का औसत वज़न निकालने की ज़रूरत क्यों हैं। अपने कारण सोचें। क्या हम आपके द्वारा बनाए गए परिदृश्यों की नैतिकता पर बहस कर सकते हैं?

इस बातचीत को सुनकर, **मैथ स्पेस** में हमने दो-अंकीय भाजक से भाग देने के लिए बुनियादी नुस्ख़ा लिखने का निर्णय लिया। जो यहाँ प्रस्तुत है :

1. भाजक का निकटतम 10 का गुणज पूर्णांक लें।
2. अनुमान लगाएँ कि निकटतम पूर्णांक संख्या से भाज्य को भाग देने पर भागफल (या भागफल अंक) कितना होगा।
3. भागफल अंक और वास्तविक भाजक का गुणनफल निकालें।
4. जाँच करें
   - बढ़े पूर्णांक के लिए : यदि भाज्य - भागफल अंक × भाजक > भाजक : भागफल अंक में 1 जोड़ दें और चरण 3 दोहराएँ।
   - घटे पूर्णांक के लिए : यदि भागफल अंक × भाजक > भाज्य : भागफल अंक से 1 घटाएँ और चरण 3 दोहराएँ।
5. (संशोधित) भागफल के साथ भाग पूरा करें।

चूँकि बहुत सारे सम्भावित मामले हो सकते हैं, (आगे हम देखेंगे कि यह कितने हैं), यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं। इस लेख में, हम 3-अंकीय ÷ 2 अंकीय तक ही सीमित रहेंगे। शेष का बाद में सामान्यीकरण किया जा सकता है।

3-अंकीय ÷ 2 अंकीय के लिए कई सम्भावनाएँ :

- ## बढ़े पूर्णांक (राउंड अप) के लिए

उदाहरण-1 : 672 ÷ 19

भाजक का निकटतम 10 का गुणज पूर्णांक लें : 19 का नज़दीकी पूर्णांक 20	अनुमान लगाएँ कि निकटतम पूर्णांक संख्या से भाज्य को भाग देने पर भागफल (या भागफल अंक) कितना होगा। 672 ≈ 600, यानी 6 सैकड़ा 672 ≈ 670, यानी, 67 दहाई 672 ÷ 20 (या 600 ÷ 20) ≈ 30 = 3 दहाई	
भागफल अंक और वास्तविक भाजक का गुणनफल निकालें :	3 दहाई × 19 = 57 दहाई (भागफल अंक और वास्तविक भाजक का गुणनफल = 57 दहाई)	30 19)672 −570 102
(राउंड अप के लिए या बढ़े पूर्णांक के लिए) यहाँ जाँच करें : भाज्य - भागफल अंक × भाजक < भाजक	67 दहाई - 57 दहाई = 10 दहाई <19 दहाई ⇒ भागफल = 3 दहाई	
चरण पूरे करें :	10 दहाई + 2 इकाई = 102	
भागफल का अगला अंक ज्ञात करने के लिए इन चरणों को दोहराएँ।		
अनुमानित भागफल :	102 ÷ 20 (या 10 ÷ 2) ≈ 5	35 19)672 −570 102 − 95 7
गणना करना :	5 x 19 = 95	
शेष की जाँच करना :	102 - 95 = 7 <19 ⇒ भागफल = 5	
चरण पूरा करना :	भागफल 3 दहाई + 5 इकाई = 35 और शेषफल 7 है।	

सोचें : यदि भाजक 19 की बजाय 17 होता, यानी 672 ÷ 17, तो यह प्रक्रिया कैसी होती?

उदाहरण-2 : 867 ÷ 16

भाजक का निकटतम 10 का गुणज पूर्णांक लें : 16 को 20 कर लें	भागफल का अनुमान लगाना : 867 ≈ 800, यानी 8 सैकड़ा 867 ≈ 860, यानी 86 दहाई 867 ÷ 20 (या 800 ÷ 20) ≈ 40 = 4 दहाई	
गणना करना :	4 दहाई × 16 = 64 दहाई	$\begin{array}{r} 50 \\ 16\overline{)867} \\ -800 \\ \hline 67 \end{array}$
राउंड अप के लिए या बढ़े पूर्णांक के लिए : यहाँ भाज्य - भागफल अंक × भाजक > भाजक है, इसलिए हम भागफल में 1 जोड़ देंगे और चरण 3 को दोहराएँगे।	86 दहाई - 64 दहाई = 22 दहाई > 16 दहाई ⟹ भागफल = 4 दहाई + 1 दहाई = 5 दहाई	
पुनर्गणना करना :	5 दहाई × 16 = 80 दहाई, 86 दहाई - 80 दहाई = 6 दहाई < 16 दहाई	
चरण पूरा करना :	6 दहाई + 7 इकाई = 67	
अनुमानित भागफल :	67 ÷ 20 (या 6 ÷ 2) ≈ 3	$\begin{array}{r} 54 \\ 16\overline{)867} \\ -800 \\ \hline 67 \\ -\ 64 \\ \hline 3 \end{array}$
अब हम भागफल का दूसरा अंक ज्ञात करते हैं।		
गणना करना :	3 × 16 = 48	
शेषफल की जाँच :	67 – 48 = 19 > 16 ⟹ भागफल = 3 + 1 = 4	
पुनर्गणना :	4 × 16 = 64	
चरण पूरे करना :	भागफल 5 दहाई + 4 इकाई = 54 है और शेषफल 3 है	

क्या होगा यदि भाज्य 867 की बजाय 863 हो, यानी 863 ÷ 16 हो?

- **घटे पूर्णांक (राउंड डाउन) के लिए**

उदाहरण-3 : 772 ÷ 31

भाजक का निकटतम 10 का गुणज पूर्णांक लें : 31 को घटाकर 30 बना लें	भागफल का अनुमान लगाना : 772 ≈ 700, यानी 7 सैकड़ा 772 ≈ 770, यानी 77 दहाई 772 ÷ 30 (या 700 ÷ 30) ≈ 20 = 2 दहाई	
गणना करना :	2 दहाई × 31 = 62 दहाई	$\begin{array}{r} 20 \\ 31\overline{)772} \\ -620 \\ \hline 152 \end{array}$
घटे पूर्णांक (राउंड डाउन) के लिए : भागफल अंक × भाजक < भाज्य	62 दहाई, 70 दहाई से कम है। ⇒ भागफल = 2 दहाई	
चरण पूरा करें :	77 दहाई - 62 दहाई = 15 दहाई 15 दहाई + 2 इकाई = 152	
अब हम भागफल का दूसरा अंक ज्ञात करते हैं।		

अनुमानित भागफल :	152 ÷ 30 (या 15 ÷ 3) ≈ 5	24 31)772 −620 152 −124 28
गणना करना :	5 × 31 = 155	
यहाँ, भागफल अंक × भाजक > भाज्य : इसलिए, भागफल अंक से 1 घटा दें और चरण 3 दोहराएँ	155 > 153 ⇒ भागफल = 5 – 1 = 4	
पुनर्गणना करना :	4 × 31 = 124 और 124 <153	
चरण पूरा करना :	भागफल 2 दहाई + 4 इकाई = 24 है और शेष 28 है।	

यदि भाज्य 772 की बजाय 779 हो, यानी 779 ÷ 31 हो, तो यह कैसे हल होगा?

उदाहरण-4 : 805 ÷ 21

भाजक का निकटतम 10 का गुणज पूर्णांक लें : 21 नज़दीकी पूर्णांक 20 लें	भागफल का अनुमान लगाना 805 ≈ 800, यानी, 8 सैकड़ा, यानी 80 दहाई 805 ÷ 20 (या 800 ÷ 20) ≈ 40 = 4 दहाई	
गणना करना :	4 दहाई × 21 = 84 दहाई	30 21)805 −630 175
शेष की जाँच करना :	84 दहाई > 80 दहाई ⇒ भागफल = 4 दहाई - 1 दहाई = 3 दहाई	
पुनर्गणना करना :	3 दहाई × 21 = 63 दहाई	
चरण पूरा करना :	80 दहाई - 63 दहाई 17 दहाई है 17 दहाई + 5 इकाई 175 है	
अब हम भागफल के अगले अंक की गणना करते हैं।		
अनुमानित भागफल :	175 ÷ 20 (या 17 ÷ 2) ≈ 8	38 21)805 −630 175 −168 7
गणना :	8 × 21 = 168	
शेष की जाँच करना :	168 < 175 ⇒ भागफल = 8	
चरण पूरा करना :	भागफल 3 दहाई + 8 इकाई = 38 है	

यदि भाज्य 805 की बजाय 604 है, यानी 604 ÷ 21 है, तो क्या होगा?

पिछले लेख में एक-अंकीय भागफल वाले भाग के उदाहरणों पर चर्चा की गई थी। निम्नलिखित तालिका हर एक-अंकीय भाग के मामले में सभी 2 × 2 × (1 + 2) = 12 सम्भावनाओं को सार रूप में प्रस्तुत कर रही है।

EQ = अनुमानित भागफल, FQ = अन्तिम भागफल

	एक-चरणीय भाग, एक-अंकीय भागफल		दो-चरणीय भाग, दो-अंकीय भागफल		
		उदाहरण	चरण-1	चरण-2	उदाहरण
जब भाजक को राउंड अप (पूर्णांक अधिक था) किया गया	FQ = EQ	243 ÷ 37	FQ = EQ	FQ = EQ	672 ÷ 19
				FQ > EQ	672 ÷ 17
	FQ > EQ	256 ÷ 36	FQ > EQ	FQ = EQ	863 ÷ 16
				FQ > EQ	867 ÷ 16
जब भाजक को राउंड डाउन (पूर्णांक कम था) किया गया	FQ = EQ	254 ÷ 31	FQ = EQ	FQ = EQ	779 ÷ 31
				FQ < EQ	772 ÷ 31
	FQ < EQ	256 ÷ 33	FQ < EQ	FQ = EQ	805 ÷ 21
				FQ < EQ	604 ÷ 21

बड़े भाजकों के लिए विधि के चरण-1 को निम्नानुसार संशोधित किया जा सकता है :
यदि भाजक में n-अंक हैं, तो इसे 10^n के निकटतम गुणज में पूर्णांकित करें। बाक़ी चरण वैसे ही रहेंगे जैसे थे।
उदाहरण के लिए, आइए 8397 ÷ 365 पर विचार करें

	निकटतम पूर्णांक लेना :	365 का नज़दीकी पूर्णांक 400 लिया 8397 ≈ 8000 यानी 8 हज़ार 8397 ≈ 8300, यानी 83 सैकड़ा	
भागफल का पहला अंक	अनुमानित भागफल :	8397 ÷ 400 (या 83 ÷ 4) ≈ 20 = 2 दहाई	20 365)8397 −730 109
	गणना :	2 दहाई × 365 = 730 दहाई	
	शेष की जाँच करना :	839 दहाई - 730 दहाई = 109 दहाई <365 दहाई ⇒ भागफल = 2 दहाई	
	चरण पूरा करना :	839 - 73 दहाई = 109	
भागफल का दूसरा अंक	अनुमानित भागफल :	1097 ÷ 400 (या 10 ÷ 4) ≈ 2	23 365)8397 −730 1097 −1095 2
	गणना करना :	2 × 365 = 730	
	शेष की जाँच :	1097 – 730 = 367 > 365 ⇒ भागफल = 2 + 1 = 3	
	पुनर्गणना :	3 × 365 = 1095	
	चरण पूरा करना :	भागफल 2 दहाई + 3 इकाई = 23 है और शेषफल 2 है	

हमें उम्मीद है कि इससे शिक्षार्थियों को बहु-अंकीय भाजक द्वारा उत्पन्न जटिलता से निपटने में मदद मिलेगी, विशेष रूप से वे अनुमान और इसकी बारीकियों को समझेंगे। ध्यान दें कि जैसे-जैसे भागफल का प्रत्येक अंक मिलता जाता है, विधि इसके स्थानीय मान पर ध्यान केन्द्रित करती है, जिसे शिक्षक ने अपने विद्यार्थियों से चर्चा के दौरान शायद अनदेखा कर दिया।

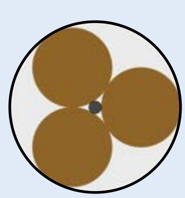
References

1. Thoughts on the Division Operation, At Right Angles, Jul 2015, http://publications.azimpremjifoundation.org/1719/1/ARA_July_2015-38-41.pdf
2. Multi-Digit-Divisor (ppt): https://drive.google.com/file/d/1rBiYlFhbD0Ylh_noZm-_xhFBpFVJ-0Nc/view

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की एक गणित प्रयोगशाला है जो स्कूलों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा और शिक्षक प्रशिक्षकों के साथ काम करने वाले ग़ैर-सरकारी संगठनों को सेवाएँ प्रदान करती है। यह गणित की विभिन्न शिक्षक सहायक सामग्रियों (mat(h) erials) और उनकी सम्भावनाओं को तलाशती है, उसी के साथ इनके कम लागत वाले संस्करण, जो कबाड़ से बनाए जा सकते हैं, को भी खोजती है। यह गणित से डरने या नफ़रत करने वालों और साथ-ही-साथ गणित प्रेमियों, को सम्बोधित करने का प्रयास करती है। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ चर्चा से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस को आप इस ई-पते पर लिख सकते हैं — mathspace@apu.edu.in।

अनुवाद : मेलोडी खलखो **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

मीठी बातें!



अर्जुन की माँ ने उसे एक गोलाकार कटोरे में एक बराबर साइज़ के और लगभग एकदम गोलाकार तीन गुलाब जामुन दिए। अर्जुन एक स्ट्रॉ की मदद से चाशनी को चखना चाहता था। जब उसने स्ट्रॉ बीच में रखा तो उसने कुछ असामान्य देखा। हरेक गुलाब जामुन एक-दूसरे को छू रहा था। तीनों ही गुलाब जामुन कटोरे की दीवार को भी छू रहे थे और स्ट्रॉ भी तीनों गुलाब जामुन को छू रही थी। यदि अर्जुन को यह ज्ञात हो कि स्ट्रॉ की त्रिज्या एक इकाई है, तो

- क्या वह प्रत्येक गुलाब जामुन की त्रिज्या ज्ञात कर सकता है?
- क्या वह कटोरे की त्रिज्या ज्ञात कर सकता है?

दशमलव संख्याओं के भाग

नारायण मेहर और स्वाती सरकार

भिन्न और दशमलव परस्पर सम्बन्धित दो ऐसी महत्त्वपूर्ण अवधारणाएँ हैं जिनमें माध्यमिक स्कूल (कक्षा 6 से 8) के बच्चे काफ़ी कठिनाई का सामना करते हैं। एक तो इन अवधारणाओं की कल्पना करना मुश्किल होता है, और दूसरा, इन पर की जाने वाली अंकगणितीय संक्रियाएँ आमतौर पर काफ़ी अमूर्तता के साथ सिखाई जाती हैं जिसमें नियमों के इस्तेमाल पर अत्यधिक ज़ोर दिया जाता है। यहाँ, हम दशमलव संख्याओं के भाग पर चर्चा करेंगे और इस संक्रिया को अवधारणात्मक रूप से समझेंगे। साथ ही मैनिप्यूलेटिव्स[1] की मदद से देखेंगे कि इसका नियम कैसे पता चलता है।

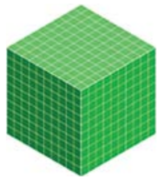
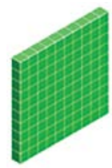
दशमलव संख्याओं के भाग पर चर्चा करने से पहले हमें भाग की संक्रिया का मतलब समझने की ज़रूरत है। इसके दो अर्थ हैं, एक है बराबर बँटवारा (equal sharing)। इस अर्थ में 12 ÷ 3 का मतलब है 12 चीज़ें 3 समूहों में समान रूप से बाँटी गई हैं (यानी कि 3 समूहों में से प्रत्येक को कितनी चीज़ें मिलती हैं)। दूसरा अर्थ है, बराबर-बराबर समूह बनाना (मात्रा) यानी कि समान समूहीकरण (equal grouping)। इस अर्थ में 12 चीज़ों को इस तरह बाँटा जाए कि प्रत्येक को 3 चीज़ें मिलें (अर्थात, कितने समूहों को 3-3 चीज़ें मिलती हैं)।

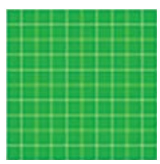
दशमलव संख्याओं की मॉडलिंग के लिए गत्ते/काग़ज़ के बने द्विविमीय (2D) और त्रिविमीय (3D) दोनों ही मैनिप्यूलेटिव्स इस्तेमाल किए जा सकते हैं। चाहे जिसका भी इस्तेमाल करें, ज़रूरी यह है कि सभी निरूपणों और सवाल हल करने के दौरान एकरूपता बनी रहे।

[1]मैनिप्यूलेटिव्स यानी ऐसी भौतिक वस्तुएँ जिनका उपयोग गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं की बेहतर समझ बनाने के लिए, अमूर्त अवधारणाओं को ठोस बनाने के लिए किया जाता है। इन वस्तुओं से बने मॉडल विज़ुअलाइज़ेशन में मदद करते हैं।

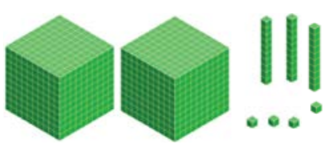
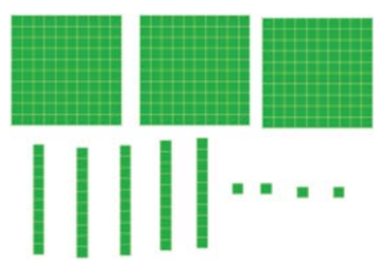
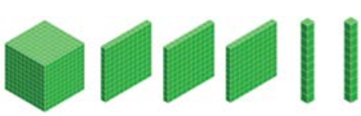
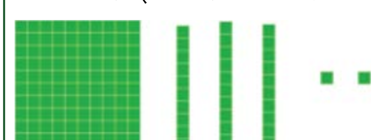
अधिकांश मैनिप्यूलेटिव्स संख्याओं से जुड़े होते हैं। इनका उपयोग परिचय, तुलना, जोड़-घटाना-गुणा-भाग करने के लिए किया जा सकता है। बीजगणित टाइल इनमें से एक है। जियोबोर्ड और रबर बैंड ज्यामिति के लिए हैं। रंगोमेट्री, जोड़ो स्ट्रॉ, इंटरलॉकिंग क्यूब्स, फ्लेक्सीवायर, आकार परिवार, टैनग्राम, पॉलीओमिनो कट जो संख्याओं, पैटर्न और ज्यामिति के लिए काम आते हैं।

***की-वर्ड :** सीखने-सिखाने की सामग्री (टीएलएम), प्रक्रियात्मक समझ, दशमलव संख्याओं पर संक्रियाएँ*

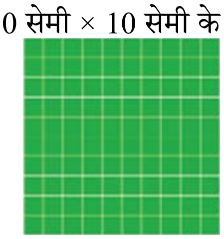
दशमलव संख्याओं के 3D मॉडल	पूर्ण, बड़ा घन या 1 	पूर्ण को 10 बराबर प्लेटों में बाँटा जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक प्लेट पूर्ण का $\frac{1}{10}$ या 0.1 है। 	आगे प्रत्येक प्लेट को 10 बराबर छड़ों (rods) में बाँटा जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक छड़ पूर्ण का $\frac{1}{100}$ या 0.01 है। 	फिर प्रत्येक छड़ को 10 बराबर छोटे घनों में बाँटा जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक घन पूर्ण का $\frac{1}{1000}$ या 0.001 है। 

दशमलव संख्याओं के 2D मॉडल	पूर्ण, फलक या 1 	पूर्ण को 10 बराबर लम्बी पट्टी (longs) में बाँटा जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक पूर्ण का $\frac{1}{10}$ या 0.1 है। 	प्रत्येक पट्टी को आगे 10 बराबर छोटे वर्गों में बाँटा जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक वर्ग पूर्ण का $\frac{1}{100}$ या 0.01 है। 

इन मॉडल्स का इस्तेमाल करके दशमलव संख्याओं का निरूपण

3डी मॉडल इस्तेमाल करके 2.034 	2डी मॉडल इस्तेमाल करके 3.54 
3डी मॉडल इस्तेमाल करके 1.32 	2डी मॉडल इस्तेमाल करके 1.32 

हम ज़रूरत के हिसाब से 3डी या 2डी मॉडल का उपयोग करके दशमलव संख्याओं के भाग के सवाल हल करने का प्रयास करेंगे। आभासी मॉडल (virtual model) के लिए आप मैथीगॉन पॉलीपैड (https://mathigon.org/polypad) का इस्तेमाल कर सकते हैं, जबकि भौतिक मॉडल काग़ज़/गत्ते से बनाए जा सकते हैं। 2डी मॉडल को दशमलव बिन्दु के बाद 4 स्थानों यानी कि 0.0001 तक बढ़ाया जा सकता है। इसके लिए सेंटीमीटर ग्राफ़ पेपर का उपयोग कर सकते हैं जिसमें 10 सेमी × 10 सेमी के एक वर्ग को पूर्ण माना जाएगा।



चित्र-1

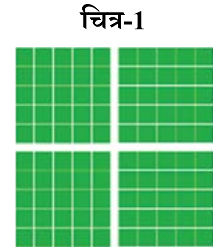
दशमलव संख्याओं के भाग के लिए ज़रूरी पूर्वज्ञान

- *दशमलव की समझ, विशेषकर दशमलव संख्याओं को भिन्नों के रूप में व्यक्त करना*

उदाहरण के लिए, $0.25 = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$

यदि एक फलक पूर्ण या 1 है, जिसमें 100 छोटे वर्ग हैं, तो उनमें से प्रत्येक 0.01 है (**चित्र-1**)।

तो 0.25 ऐसे 25 छोटे वर्ग हैं, यानी 0.01 × 25। ऐसे 0.25 ,4 मिलकर एक पूर्ण बनाते हैं, जैसा कि **चित्र-2** में दर्शाया गया है। इसलिए 0.25 एक पूर्ण या फलक का $\frac{1}{4}$ है।



चित्र-2

- *दशमलव संख्याओं का गुणा, विशेषकर दशमलव संख्याओं और दस की घातों के गुणनफल*

उदाहरण के लिए, $0.34 \times 0.002 = \dfrac{34}{100} \times \dfrac{2}{1000} = \dfrac{34 \times 2}{100 \times 1000} = \dfrac{68}{100000} = 0.00068$

- *भिन्नों के भाग, विशेषकर यह समझ कि किसी भिन्न से भाग देना उस भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा करने के समान होता है।*

उदाहरण के लिए, $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{5}{2}$ (के व्युत्क्रम से गुणा करने पर $\dfrac{2}{5}$) $= \dfrac{15}{8} = 1\dfrac{7}{8}$

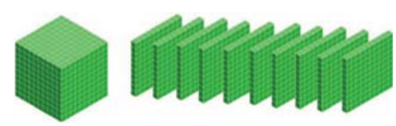
अब हम नीचे दी गई चार सम्भावित स्थितियों में दशमलव संख्याओं के भाग की पड़ताल करते हैं।

प्रकार/स्थितियाँ

1. प्राकृत संख्या ÷ प्राकृत संख्या = दशमलव संख्या
2. दशमलव संख्या ÷ प्राकृत संख्या = दशमलव संख्या
3. प्राकृत संख्या ÷ दशमलव संख्या
   क. = प्राकृत संख्या
   ख. = दशमलव संख्या
4. दशमलव संख्या ÷ दशमलव संख्या
   क. = प्राकृत संख्या
   ख. = दशमलव संख्या

अर्थात भाज्य व भाजक दोनों ही प्राकृत संख्याएँ हो सकती हैं या फिर दोनों ही दशमलव संख्याएँ भी हो सकती हैं। जैसे-जैसे हम आगे बढ़ेंगे हम देखेंगे कि भाज्य की प्रकृति उतनी महत्त्वपूर्ण नहीं है, जितनी कि भाजक की है। (यही बात भिन्नों के विभाजन में भी देखी गई है।)

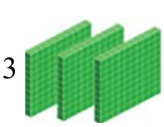
प्राकृत संख्या ÷ प्राकृत संख्या = दशमलव संख्या
इस स्थिति में भाज्य और भाजक दोनों ही पूर्ण संख्याएँ हैं।



चित्र-3

यदि भाजक प्राकृत संख्या है तो इसे ऐसे समूहों की संख्या माना जा सकता है जिनके बीच भाज्य को बराबर-बराबर बाँटा जाना है, यानी यहाँ 'बराबर बँटवारे' वाले अर्थ का उपयोग किया जा रहा है। उदाहरण के लिए, 12 ÷ 40 में 12 को 40 समूहों में समान रूप से बाँटा जाता है। देखते हैं कि 3डी मॉडल का उपयोग करके यह कैसे किया जा सकता है।

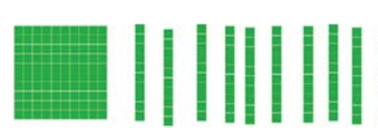
12 घनों को 40 द्वारा सीधे-सीधे तो नहीं बाँटा जा सकता। इसलिए हम प्रत्येक घन को 10 प्लेटों में बदल लेते हैं (**चित्र-3**)।

तो 12  → 120  40 समूहों में बाँटी गईं तो प्रत्येक को 3  मिलीं यानी 0.3।

चित्र-4

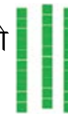
∴ 12 ÷ 40 = 0.3 (**चित्र-4**)

यदि इसी भाग को हम 2डी मॉडल का इस्तेमाल करके हल करें तो 12 फलक 40 समूहों में सीधे-सीधे तो नहीं बाँटे जा सकते। इसलिए हम प्रत्येक फलक को 10 पट्टियों (**चित्र-5**) में बदल देते हैं।



चित्र-5

तो 12 → 120 को 40 समूहों में बाँटने पर प्रत्येक समूह को (0.3) मिलेगा, यानी कि 12 ÷ 40 = 0.3 (**चित्र-6**)।

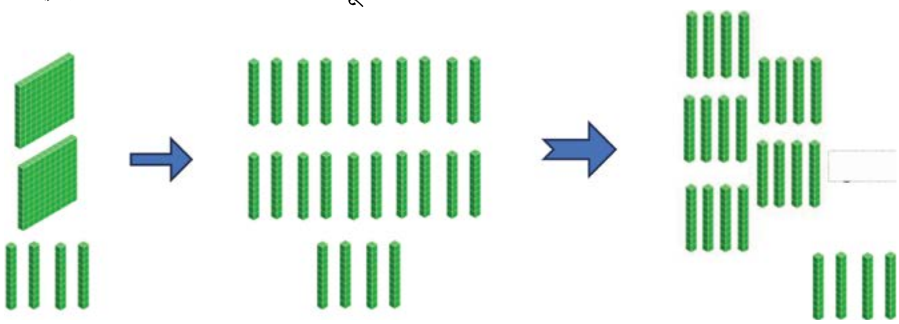
इसलिए 12  → 120  को 40 समूहों में बाँटें, तो प्रत्येक को  यानी कि 0.3 मिलेंगी।

चित्र-6

दोनों ही मॉडल का उपयोग करने पर हमें समान भागफल मिलता है।

दशमलव संख्या ÷ प्राकृत संख्या = दशमलव संख्या

0.24 ÷ 5 का उदाहरण लेते हैं। चूँकि यहाँ भी भाजक एक प्राकृत संख्या है, हम भाग के 'बराबर बँटवारे' वाले अर्थ का इस्तेमाल कर सकते हैं। इसलिए, इस स्थिति में 0.24 को 5 समूहों के बीच बराबर-बराबर बाँटा जाना है।



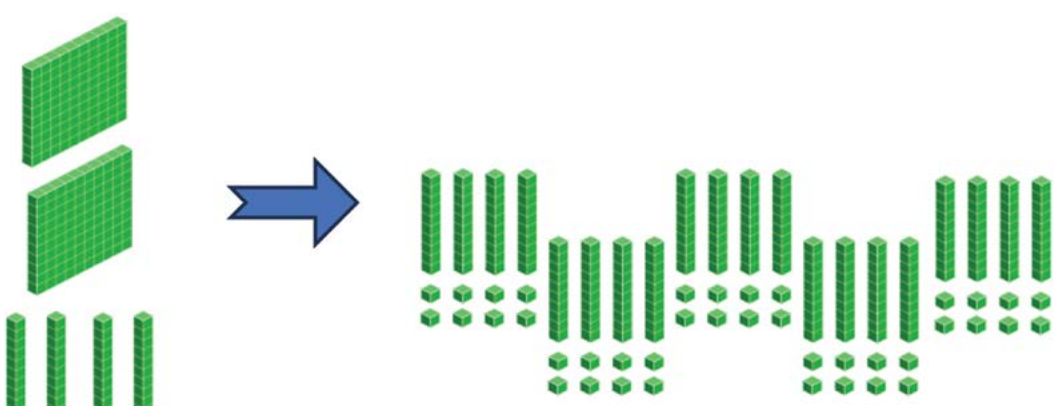
चित्र-7

पहले चरण में 2 प्लेटों को 20 छड़ों में बदल दिया गया। फिर इन्हें 5 समूहों के बीच समान रूप से बाँटा गया तो प्रत्येक समूह को 4 छड़ें (0.04) मिलीं। 4 छड़ें बाक़ी रह गईं क्योंकि उन्हें 5 समूहों में बराबर-बराबर नहीं बाँटा जा सकता है (**चित्र-7**)।

दूसरे चरण में, 4 छड़ों को 40 छोटे घनों में बदल दिया गया। फिर इन्हें 5 समूहों के बीच समान रूप से बाँटा गया तो प्रत्येक समूह को 8 छोटे घन (0.008) मिलते हैं (**चित्र-8**)।

चित्र-8

दोनों बार के वितरण को मिलाकर प्रत्येक समूह को 0.04 + 0.008 = 0.048 मिलता है, यानी कि 0.24 ÷ 5 = 0.048 (**चित्र-9**)।



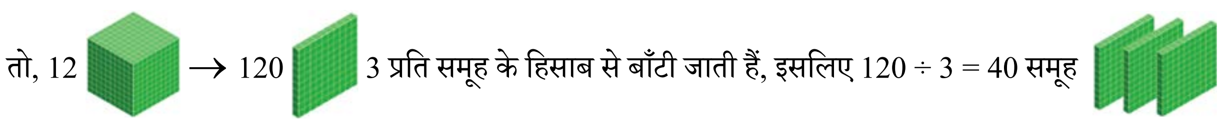
चित्र-9

वैकल्पिक तरीक़े से देखें, तो हम 0.24 यानी कि 2 प्लेटों और 4 छड़ों को 240 छोटे घनों (0.001) में बदल सकते हैं। फिर इन्हें 5 समूहों में समान रूप से बाँटा जाए तो प्रत्येक समूह को 48 छोटे घन यानी कि 0.048 मिलते हैं। तो दोनों ही तरीक़ों से 0.24 ÷ 5 = 0.048 होता है।

प्राकृत संख्या ÷ दशमलव संख्या = पूर्ण संख्या

अलबत्ता, यदि भाजक प्राकृत संख्या नहीं है, तो यह समूहों की संख्या जैसी किसी राशि का प्रतिनिधित्व नहीं कर सकता। तो, जब भाजक दशमलव संख्या हो तब हम 'बराबर बँटवारे' वाले अर्थ का उपयोग नहीं कर सकते। इसलिए ऐसी स्थिति में भाग के 'बराबर समूहीकरण' (मात्रा) वाले अर्थ का उपयोग करना ज़्यादा उपयुक्त लगता है। 'बराबर समूहीकरण' की स्थिति में भाजक की संख्या वह राशि होती है जो प्रत्येक समूह को मिलती है और भागफल कुल समूहों की संख्या होती है।

तो 12 ÷ 0.3 के लिए प्रत्येक समूह को 0.3 या 3 प्लेटें (0.1) मिलती हैं। 12 घनों को 120 प्लेटों में तब्दील किया जा सकता है। चूँकि प्रत्येक समूह को 3 प्लेटें मिलती हैं, इसलिए 120 प्लेटों को 120 ÷ 3 = 40 समूहों (**चित्र-10**) में बाँटा जा सकता है। यदि भागफल पूर्ण संख्या हो तो यह अर्थ अच्छे-से काम करता है।

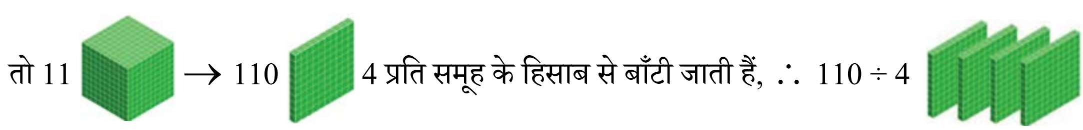


चित्र-10

प्राकृत संख्या ÷ दशमलव संख्या = दशमलव संख्या

जब भागफल पूर्ण संख्या न हो तो भाग का यह अर्थ पर्याप्त नहीं होता। उदाहरण के लिए, 11 ÷ 0.4 जैसे किसी सवाल के लिए यह अर्थ मददगार नहीं होता।

यहाँ 11 घनों को 110 प्लेटों में बदला जा सकता है। यदि हम 110 प्लेटों को कुछ समूहों में इस तरह बाँटते हैं कि प्रत्येक समूह को 4 प्लेटें मिलती हैं, यानी कि 110 ÷ 4 (**चित्र-11**)



चित्र-11

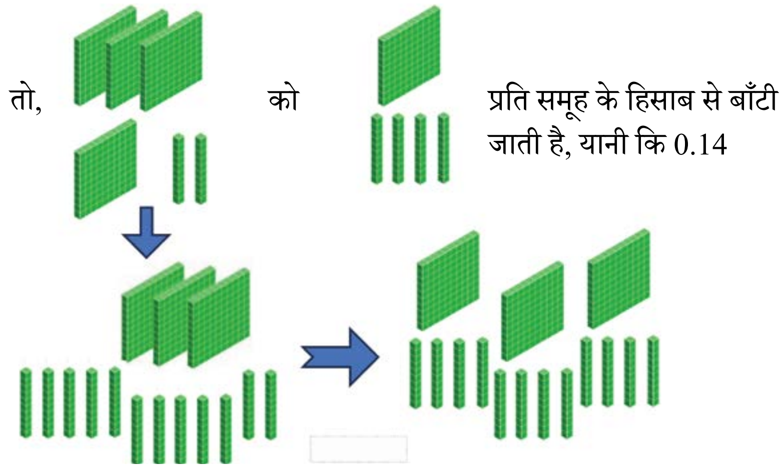
तब 108 (110 में से) प्लेटें 27 समूहों के बीच समान रूप से बाँटी जा सकती हैं। लेकिन 2 प्लेटें, यानी कि 0.2, बच जाती हैं व इन्हें और बाँटा नहीं जा सकता क्योंकि यह बहुत ही छोटी $(0.2 < 0.4)$ हैं। इसलिए ऐसी स्थिति में मैनिप्यूलेटिव्स का इस्तेमाल करने में 'बराबर समूहीकरण' वाले अर्थ का कोई मतलब नहीं रह जाता है।

दशमलव संख्या ÷ दशमलव संख्या = प्राकृत संख्या

अब हम 0.42 ÷ 0.14 का उदाहरण लेते हैं। 0.42 (4 प्लेटों और 2 छड़ों) को कुछ समूहों में इस तरह बाँटा गया है कि प्रत्येक समूह को 0.14 (1 प्लेट और 4 छड़ें) मिलती हैं। अब 4 प्लेटों और 2 छड़ों को 3 प्लेटों और 12 छड़ों में बदला जा सकता है। इसलिए इन्हें 3 समूहों में बाँटा जा सकता है, जिनमें से प्रत्येक को 1 प्लेट और 4 छड़ें यानी 0.14 मिलता है (**चित्र- 12**)।

$\therefore\ 0.42 \div 0.14 = 3$

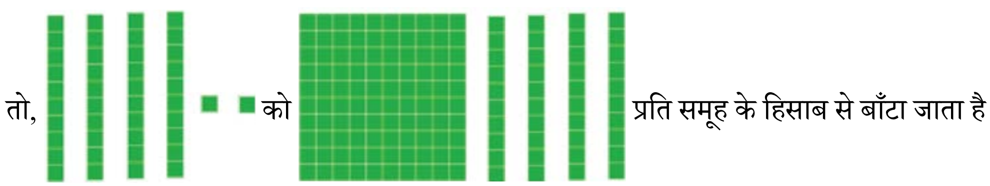
इस स्थिति में, 'बराबर समूहीकरण' वाला अर्थ उपयोगी है क्योंकि भागफल प्राकृत संख्या है।



चित्र-12

दशमलव संख्या ÷ दशमलव संख्या = दशमलव संख्या

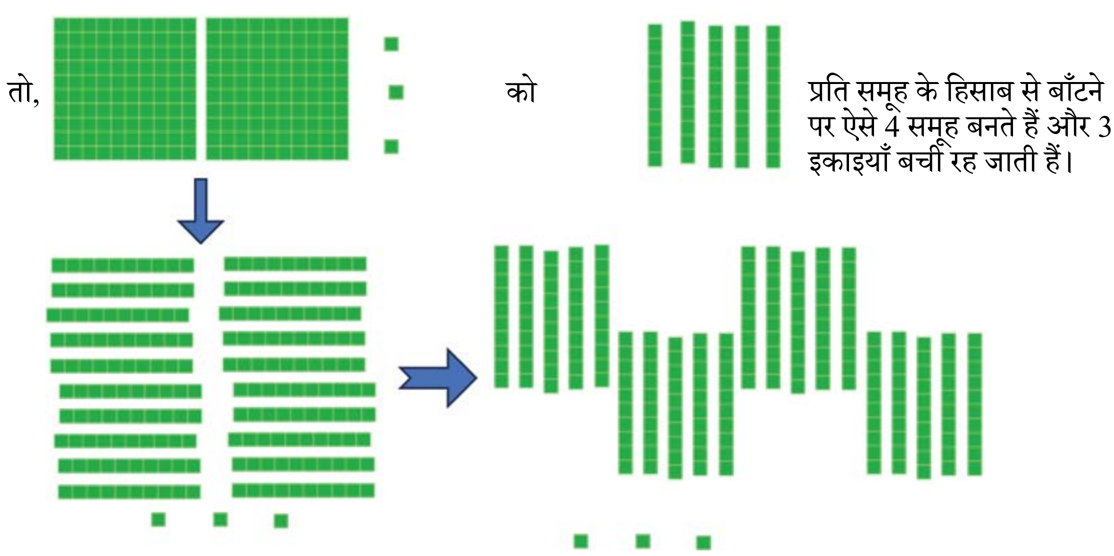
अब हम $0.42 \div 1.4$ पर विचार करते हैं। देखें कि मैनिप्यूलेटिव्स का इस्तेमाल करके इसे हल करने की कोशिश में हमें किन दिक़्क़तों का सामना करना पड़ सकता है। इस स्थिति के लिए हम 3डी मॉडल की बजाय 2डी मॉडल का उपयोग करते हैं।



चित्र-13

ज़ाहिर है कि बाँटी जाने वाली राशि, यानी कि भाज्य 0.42, प्रत्येक समूह को मिलने वाली राशि, यानी कि भाजक 1.4 से छोटी है। इसलिए मैनिप्यूलेटिव्स का इस्तेमाल करके इस भाग को समझने के लिए 'बराबर समूहीकरण' वाले अर्थ का उपयोग करना असम्भव है।

अब हम $2.03 \div 0.5$ पर विचार करते हैं। इस स्थिति में भाज्य (2.03) भाजक (0.5) से बड़ा है। लेकिन फिर भी भाग अधूरा रहता है (**चित्र-14**), क्योंकि 0.03 को और बाँटा नहीं जा सकता। इसका कारण यह है कि यह बहुत छोटा ($0.03 < 1.4$) है। तो एक बार फिर 'बराबर समूहीकरण' वाला अर्थ काम नहीं करता।



चित्र-14

ध्यान दें कि इसका मतलब यह नहीं है कि मैनिप्यूलेटिव्स का इस्तेमाल करना प्रभावी नहीं है। उदाहरण के लिए, 0.000042 ÷ 0.000014 को मैनिप्यूलेटिव्स से दर्शाया नहीं जा सकता, लेकिन यदि हम यह कल्पना करें कि छोटे टुकड़े 0.00001 और 0.000001 का प्रतिनिधित्व करते हैं तो 'बराबर समूहीकरण' से इसे समझाया जा सकता है। हमें यह स्पष्टता तभी आई जब हमने इसकी पड़ताल की।

तो जब भी भाजक प्राकृत संख्या हो, तब भाग को समझने के लिए 'बराबर बँटवारे' का उपयोग किया जा सकता है। इसी तरह जब भागफल प्राकृत संख्या हो तो 'बराबर समूहीकरण' उस भाग को समझने में मदद करता है। लेकिन यदि भाजक और भागफल दोनों ही प्राकृत संख्या ना हों तो ऐसे भाग को हम किस तरह समझें? ख़ासतौर पर निम्नलिखित दो स्थितियों, जिन्हें ऊपर दर्शाया गया है, में ऐसा होता है:

1. प्राकृत संख्या ÷ दशमलव संख्या = दशमलव संख्या
2. दशमलव संख्या ÷ दशमलव संख्या = दशमलव संख्या

एक सम्भावना यह है कि इन्हें समझने के लिए 'भिन्नों के भाग' का इस्तेमाल किया जाए, क्योंकि दशमलव संख्याओं को भिन्नों में बदला जा सकता है और चॉकलेट प्लेट मॉडल* भिन्नों (और प्राकृत संख्याओं) के भाग की सभी सम्भावित स्थितियों को पर्याप्त रूप से प्रदर्शित करता है।

***चॉकलेट प्लेट मॉडल :** $p \div q$ के लिए, मान लें कि p चॉकलेट हैं जिन्हें q प्लेटों में बाँटा जाना है। भागफल एक प्लेट में चॉकलेट की संख्या है। p और q दोनों कोई भी प्राकृत संख्या या भिन्न संख्या यानी कि इकाई भिन्न, उचित भिन्न या विषम भिन्न भी हो सकती हैं।

अब हम उन स्थितियों पर विचार करते हैं जहाँ भाग के दोनों अर्थ काम नहीं आए, यानी कि (i) 11 ÷ 0.4, (ii) 0.42 ÷ 1.4 और (iii) 2.03 ÷ 0.5

(i) $$11 \div 0.4 = 11 \div \frac{4}{10} = 11 \times \frac{10}{4} = \frac{11 \times 10}{4} = 110 \div 4$$

ध्यान दें कि 'बराबर समूहीकरण' का इस्तेमाल करके भी हम इसी जवाब पर पहुँचे थे, लेकिन चूँकि वहाँ भागफल समूहों की संख्या को दर्शाता था, इसलिए उसका पूर्ण संख्या होना ज़रूरी था। लेकिन यहाँ पर ऐसी कोई पाबन्दी नहीं है क्योंकि यहाँ हम भाग के उस अर्थ का इस्तेमाल नहीं कर रहे हैं। अब हम 110 ÷ 4 के लिए 'बराबर बँटवारे' वाले अर्थ का उपयोग करने के लिए स्वतंत्र हैं।

इस पर भी ध्यान दें कि 110 ÷ 4 = (11 × 10) ÷ (0.4 × 10), यानी कि भाज्य और भाजक दोनों को ही 10 से गुणा किया जाता है ताकि दशमलव बिन्दुओं को खिसकाया जा सके और भाजक को प्राकृत संख्या बनाया जा सके।

(ii) $$0.42 \div 1.4 = \frac{42}{100} \div \frac{14}{10} = \frac{42}{100} \times \frac{10}{14} = \frac{42}{140} = 4.2 \div 14$$

ध्यान दें कि यदि हम केवल भाजक को भिन्न में बदलते हैं, तब भी हमें यही जवाब मिलता है, क्योंकि

$$0.42 \div \frac{14}{10} = 0.42 \times \frac{10}{14} = \frac{0.42 \times 10}{140} = 4.2 \div 14 = (0.42 \times 10) \div (1.4 \times 10)$$

दोनों ही स्थितियों में हमने फिर से भाज्य व भाजक दोनों को 10 की समान घात से गुणा किया। ऐसा इसलिए किया ताकि उनके दशमलव बिन्दुओं को खिसकाया जा सके। इस तरह खिसकाने से भाजक प्राकृत संख्या बन जाता है।

(iii) $$2.03 \div 0.5 = 2.03 \div \frac{5}{10} = 2.03 \times \frac{10}{5} = \frac{2.03 \times 10}{5} = 20.3 \div 5 = (2.03 \times 10) \div (0.5 \times 10)$$,इसका

मतलब है कि एक बार फिर दशमलव बिन्दुओं को खिसकाने और भाजक को प्राकृत संख्या बनाने के लिए भाज्य व भाजक दोनों को समान संख्या से गुणा किया जाता है।

यही वह प्रक्रिया है जो सामान्यत: की जाती है, लेकिन बिना किसी व्याख्या के।

तो, दशमलव संख्याओं वाले भाजकों के सभी प्रकार के भागों के लिए काम करने वाली एक सामान्य प्रक्रिया के लिए यह करना अधिक अर्थपूर्ण होता है : (i) भाजक को ऐसे भिन्न में बदलें, जिसका हर 10 की कोई घात हो, और (ii) फिर भिन्न से भाग दें। जब हम इस 'भिन्न द्वारा भाग' को 'भिन्न के व्युत्क्रम से गुणा' में बदलते हैं तो भाज्य में 10 की घात का गुणा हो जाता है। 10 की यह घात दशमलव वाले भाजक का हर होती है। और यह गुणनफल नया भाज्य होता है। नया भाजक मूल दशमलव वाले भाजक का अंश होता है, जो कि एक प्राकृत संख्या होती है।

दशमलव संख्या वाला भाजक (Decimal Divisor - DD) = प्राकृत संख्या/दस की घात = $\frac{N}{10^m}$

मूल भाज्य (OD) ÷ DD = OD ÷ $\frac{N}{10^m}$ = (OD × 10^m) ÷ N

दशमलव भाजक (DD) = प्राकृत संख्या/10 की उपयुक्त घात = $\frac{N}{10^m}$

जहाँ $\frac{N}{10^m}$ नया भाजक है जो DD के तुल्य है।

अर्थात मूल्य भाज्य (OD) ÷ DD = (OD) ÷ $\frac{N}{10^m}$

भिन्न के भाग की उलटगुणित प्रक्रिया का उपयोग करके इसे इस तरह भी लिखा जा सकता है

(OD × 10^m) ÷ N

उदाहरण के लिए $\frac{3.006}{0.15}$ पर विचार करते हैं। यहाँ DD = 0.15 = $\frac{15}{100}$

अर्थात N = 15 और m = 2 हुआ।

OD 3.006 है।

तो $\frac{3.006}{0.15} = \frac{3.006}{15/10^2} = \frac{3.006 \times 10^2}{15} = \frac{300.6}{15}$

ध्यान दें कि केवल भाजक को प्राकृत संख्या बनाना पर्याप्त है, फिर हम 'बराबर बँटवारे' का इस्तेमाल कर सकते हैं। इससे कोई फ़र्क़ नहीं पड़ता कि भाज्य दशमलव संख्या है या नहीं।

इस पूरी चर्चा में हमने आवर्ती दशमलव (Recurring decimals) संख्याओं को जान-बूझकर शामिल नहीं किया है क्योंकि वर्तमान पाठ्यक्रम में ये उच्च माध्यमिक कक्षाओं तक नहीं पढ़ाई जाती हैं। इसलिए हमें लगा कि यहाँ आवर्ती दशमलव संख्याएँ प्रासंगिक नहीं हैं। हालाँकि यदि भाज्यफल आवर्ती दशमलव संख्या हो, तो भी प्रक्रिया यही रहती है।

नारायण मेहर अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, बेंगलूरु में अध्यापक शिक्षा समूह के फैकल्टी सदस्य हैं। इससे पहले वे हेरिटेज एक्सपीरियंशियल लर्निंग स्कूल, गुड़गाँव और मिराम्बिका फ्री प्रोग्रेस स्कूल, दिल्ली में गणित और खोजयात्रा पढ़ाया करते थे। हेरिटेज स्कूल में पढ़ाने के दौरान उन्होंने दिल्ली स्थित गणित शिक्षण के नवाचारी तरीक़ों पर काम करने वाली एक ग़ैर-लाभकारी संस्था 'जोड़ो ज्ञान' के साथ काम किया। उन्होंने IAAT (I AM A TEACHER), गुड़गाँव में भी बतौर फैकल्टी और अध्यापक-शिक्षक के रूप में काम किया। गणित-शिक्षण में उनकी ख़ासी दिलचस्पी है। उन्हें ऐसी व्यावहारिक व क्रियाशील गतिविधियों व क्रॉफ्ट में रुचि है, जिनमें स्थानिक समझ और तर्क की ज़रूरत होती है। उनसे narayana.meher@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्रोफ़ेसर हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला चित्रकारी है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से बी.स्टैट-एम.स्टैट और वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सिएटल से गणित में एमएस की पढ़ाई की है। वे एक दशक से ज़्यादा समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं और सभी तरह की व्यावहारिक व क्रियाशील गतिविधियों, विशेषकर ओरिगेमी में गहरी रुचि रखती हैं। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कविता तिवारी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी

दशमलव संख्याओं के भाग के सवालों की वर्कशीट

1. नीचे दिए सवालों को हल करें:

   अ. $13 \div 4 =$

   ब. $7 \div 8 =$

   स. $3.4 \div 5 =$

   द. $0.9 \div 20 =$

2. तुमने क्या देखा?

   अ. $12 \div 3 =$

   ब. $12 \div 0.3 = 12 \div \frac{3}{\square} = 12 \times \frac{\square}{3} = \frac{\square}{\square} =$ _______ $\div 3$

   स. $12 \div 0.03 = 12 \div \frac{3}{\square} = 12 \times \frac{\square}{3} = \frac{\square}{\square} =$ _______ $\div$ _______

   द. $12 \div 0.003 = 12 \div \frac{3}{\square} = 12 \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square} =$ _______ $\div$ _______

उपरोक्त में क्या तुम्हें कोई पैटर्न नज़र आया?

हर बार भाजक को .... के रूप में लिखा गया है, जिसका .... की घात है।

दिया गया भाग = दिया गया भाज्य × दिए गए भाजक का हर ÷ दिए गए भाजक का अंश।

ध्यान दें कि यह भाज्य और भाजक दोनों के दशमलव बिन्दु को दाईं ओर स्थानान्तरित करने के समतुल्य है और ऐसा तब तक करना है जब तक कि भाजक प्राकृत संख्या न बन जाए।

3. तो, ख़ाली स्थानों में प्राकृत संख्याएँ भरो और भागफल पता करो।

   अ. $26 \div 0.5 =$ _______ $\div$ _______ $=$

   ब. $7 \div 0.08 =$ _______ $\div$ _______ $=$

   स. $3 \div 0.12 =$ _______ $\div$ _______ $=$

4. इसी प्रक्रिया को आगे बढ़ाओ।

   अ. $1.05 \div 7 =$

   ब. $1.05 \div 0.7 = 1.05 \div \frac{7}{\square} = 1.05 \times \frac{\square}{7} = \frac{\square}{7} =$ _______ $\div 7$

स. $1.05 \div 0.07 = 1.05 \div \frac{7}{\square} = 1.05 \times \frac{\square}{7} = \frac{\square}{7} =$ _______ $\div$ _______

द. $1.05 \div 0.007 = 1.05 \div \frac{7}{\square} = 1.05 \times \frac{\square}{7} = \frac{\square}{7} =$ _______ $\div$ _______

एक बार फिर, दिया गया भाग = भाज्य × दिए गए भाजक का हर ÷ दिए गए भाजक का अंश

5. अब नीचे दिए गए भाग के सवालों को हल करो :

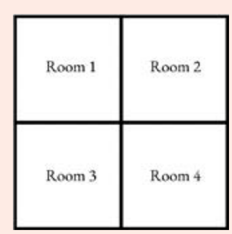
अ. $1.7 \div 0.02 =$ _______ $\div$ _______ $=$

ब. $0.003 \div 0.05 =$ _______ $\div$ _______ $=$

स. $0.36 \div 0.9 =$ _______ $\div$ _______ $=$

लाइट बन्द!

चलो एक खेल खेलते हैं! एक चौकोर (वर्गाकार) घर का चित्र बनाएँ जिसमें चार वर्गाकार कमरे हों, जैसा कि **चित्र-1** में दर्शाया गया है।

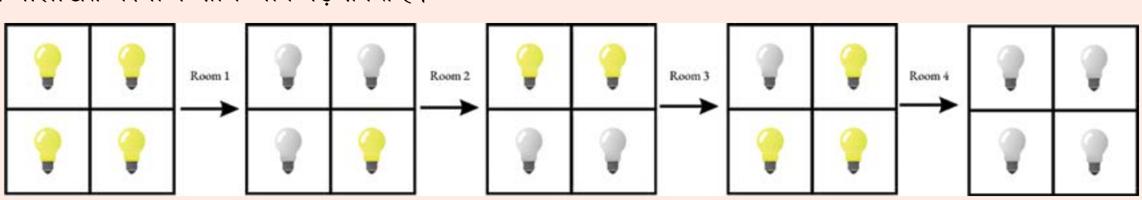


चित्र-1

घर के हरेक कमरे में एक प्रकाश स्रोत है। हरेक प्रकाश स्रोत को घर के बाहर लगे एक स्विचबोर्ड से नियंत्रित (चालू-बन्द) किया जा सकता है।

इस घर को ऐसे डिज़ाइन किया गया है कि यदि कमरा x की लाइट चालू या बन्द की जाती है, तो कमरा x के साथ दीवार साझा करने वाले सभी कमरों में लाइट की स्थिति बदल जाएगी यानी अगर लाइट पहले से चालू होगी तो बन्द हो जाएगी और अगर बन्द रही होगी तो चालू हो जाएगी।

आपके घर पहुँचने पर यह मान लें कि सभी कमरों की सभी लाइटें चालू हैं। फिर, आप सभी लाइटें बन्द करने के लिए निम्नलिखित चरणों के साथ आगे बढ़ सकते हैं।



रुककर सोचिए! इस स्थिति के आधार पर आप क्या-क्या सवाल पूछ सकते हैं?

हमारे सुझाव पेज 56 पर देखें।

इस फिलर के रचनाकार हैं मोहन आर.

7 से विभाज्यता के नियम

जितेन्द्र वर्मा

विभाज्यता नियम स्कूली गणित में, विशेष रूप से उच्च प्राथमिक कक्षाओं में, अध्ययन के महत्त्वपूर्ण विषयों में से एक है। इनकी मदद से हम तुरन्त पहचान सकते हैं कि क्या एक संख्या दूसरे से विभाज्य है। हम किसी संख्या की 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 आदि से विभाज्यता जाँचने की विभिन्न विधियाँ जानते हैं। यह भी स्पष्ट है कि कुछ संख्याओं की किसी संख्या से विभाज्यता की जाँच करना काफ़ी आसान है, जबकि कुछ संख्याओं के लिए यह थोड़ा जटिल है। 7 से विभाज्यता चुनौतीपूर्ण होती है। नियम को सरल बनाने के कई प्रयास किए गए हैं। चिका ओफिली का 7 से विभाज्यता नियम (चिका का नियम) हाल ही में खोजा गया एक नियम है। यहाँ, हम मौजूदा तरीक़ों का उपयोग करके 7 के लिए तीन अलग-अलग विभाज्यता विधियों पर चर्चा करेंगे, जो इस अवधारणा में नए आयाम जोड़ती हैं।

विधि-1 : इकाई के अंक को दुगना करना

दी गई संख्या लीजिए	इकाई अंक को हटा दें और छँटी (बची) हुई संख्या लिखें	हटाए गए इकाई अंक को दुगना करें	छँटी हुई संख्या में से दुगना किया गया अंक घटाएँ	यदि घटाने पर शेष 0 है या 7 का गुणज है, तो मूल संख्या 7 से विभाज्य है। (यदि आवश्यक हो तो इस प्रक्रिया को दोहराएँ)
532	53	$2 \times 2 = 4$	$53 - 4 = 49$	49, 7 से विभाज्य है इसलिए 532 भी 7 से विभाज्य है
427	42	$2 \times 7 = 14$	$42 - 14 = 28$	28, 7 से विभाज्य है इसलिए 427 भी 7 से विभाज्य है
29792 2975 287	2979 297 28	$2 \times 2 = 4$ $2 \times 5 = 10$ $2 \times 7 = 14$	$2979 - 4 = 2975$ $297 - 10 = 287$ $28 - 14 = 14$	शेष संख्या 2975 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 287 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 14, 7 से विभाज्य है इसलिए 29792 भी 7 से विभाज्य है
अब 2308012 को हल करें				

की-वर्ड : गुणनखण्ड, विभाज्यता, जाँच, नियम, औचित्य

उपरोक्त उदाहरणों से समझ में आता है कि यह विधि तीन-अंकीय संख्या के लिए लम्बे विभाजन के बिना 7 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए उपयोगी है, लेकिन 4 या ज़्यादा अंकों वाली संख्याओं के लिए काफ़ी लम्बी है।

नियम का आधार

माना कि $N = 1000\ a_3 + 100\ \ a_2 + 10\ a_1 + a_0$

(जहाँ a_0, a_1, a_2, a_3 4 अंकों की संख्या N के अंक हैं)

नियम के अनुसार, हम N के इकाई अंक के बिना, यानी छँटी हुई संख्या (जैसे N_T) लिखते हैं, और फिर छँटी हुई संख्या (N_T) में से इकाई अंक का दुगना घटाकर एक नई संख्या (M) प्राप्त करते हैं।

$N_T = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1$ (संख्या के छँटने के बाद स्थानीय मानों में परिवर्तन पर ध्यान दें।)

$M = N_T - 2a_0 = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 - 2a_0$

हमारा नियम कहता है कि यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी *7* का गुणज है।

मान लें कि M, *7* का गुणज है, यानी किसी पूर्ण संख्या k के लिए $M = 7k$।

इसलिए, $M = 7k = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 - 2a_0$

या $100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 = 7k + 2a_0$

N में इस मान को रखने पर,

$N = 1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10\ a_1 + a_0$

$N = (1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10\ a_1) + a_0 = 10\ (100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1) + a_0$

$= 10\ (7k + 2a_0) + a_0 = 70k + 21a_0 = 7\ (10k + 3a_0)$

इसलिए, यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है। इसे आसानी से कितने भी अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

विधि-2 : इकाई अंक को 5 से गुणा करना

दी गई संख्या लीजिए	इकाई अंक हटा दें और छँटी (बची) हुई संख्या लिखें	हटाए गए इकाई अंक को 5 से गुणा करें	परिणाम को छँटी हुई संख्या में जोड़ें	यदि योग या तो 0 है या 7 का गुणज है, तो मूल संख्या 7 से विभाज्य है (यदि आवश्यक हो तो इस प्रक्रिया को दोहराएँ)
378	37	8 × 5 = 40	37 + 40 = 77	77, 7 से विभाज्य है इसलिए 378 भी 7 से विभाज्य है
2464	246	5 × 4 = 20	246 + 20 = 266	266 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ
266	26	5 × 6 = 30	26 + 30 = 56	56, 7 का गुणज है, इसलिए 266 और 2464 दोनों संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं
29792 2989 343	2979 298 34	2 × 5 = 10 9 × 5 = 45 3 × 5 = 15	2979 + 10 = 2989 298 + 45 = 343 34 + 15 = 49	2989 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 343 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 49, 7 का गुणज है इसलिए 343, 2989 और 29792, तीनों संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं
अब 2308012 को हल करें				

इस विधि के लिए, कोई भी निम्नानुसार औचित्य प्रदान कर सकता है, जो बहुत हद तक पिछले वाले के समान ही है।

माना कि $N = 1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10\ a_1 + a_0$

(जहाँ a_0, a_1, a_2, a_3, 4 अंकों की संख्या, N के अंक हैं)

नियम के अनुसार हम N के इकाई अंक के बिना, यानी छँटी हुई संख्या (जैसे N_T) लिखते हैं, और फिर N_T में इकाई अंक का पाँच गुना जोड़कर एक नई संख्या (मान लें M) प्राप्त करते हैं।

$N_T = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1$ (संख्या छाँटने के बाद स्थानीय मानों में परिवर्तन पर ध्यान दें।)

$M = N_T + 5a_0 = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 + 5a_0$

हमारा नियम कहता है कि यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है।

मान लें कि M, 7 का गुणज है, यानी किसी पूर्ण संख्या k के लिए $M = 7k$।

इसलिए, $M = 7k = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 + 5a_0$

या $100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 = 7k - 5a_0$

N में इस मान को रखने पर,

$N = 1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10a_1 + a_0$

$N = (1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10a_1) + a_0 = 10\ (100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1) + a_0$

$= 10\ (7k - 5a_0) + a_0 = 70k - 49a_0 = 7\ (10k - 7a_0)$

इसलिए, यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है। इसे आसानी से कितने भी अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

विधि-3 : अंकों का समूह बनाना (नियम 1-3-2)

कोई भी संख्या लीजिए	इकाई अंक से आरम्भ करते हुए तीन अंकों के समूह बनाएँ	प्रत्येक समूह में सबसे दाएँ वाले अंक को 1 से, अगले वाले को 3 से और सबसे बाएँ वाले अंक को 2 से गुणा करें	सभी विषम समूहों को जोड़ें	सभी सम समूहों को जोड़ें	$(c\text{-}d)$ का अन्तर
	a	b	c	d	e
$N_1 = 672$	672	$6 \times 2 + 7 \times 3 + 2 \times 1 = 35$	35	0	35
परिणाम	$\lvert c-d\rvert = 35$, 7 से विभाज्य है। अतः संख्या N_1 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_2 = 4704$	004 704	$4 \times 1 = 4$ $7 \times 2 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 18$	18	4	$\lvert 18 - 4\rvert = 14$
परिणाम	$\lvert c-d\rvert = 14$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_2 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_3 = 32921$	032 921	$3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$ $9 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 25$	25	11	$\lvert 25 - 11\rvert = 14$
परिणाम	$\lvert c-d\rvert = 14$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_3 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_4 = 197526$	197 526	$1 \times 2 + 9 \times 3 + 7 \times 1 = 36$ $5 \times 2 + 2 \times 3 + 6 \times 1 = 22$	22	36	$\lvert 22 - 6\rvert = 14$
परिणाम	$\lvert c-d\rvert = 14$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_4 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_5 =$ 164953525268	164 953 525 268	$1 \times 2 + 6 \times 3 + 4 \times 1 = 24$ $9 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 = 36$ $5 \times 2 + 2 \times 3 + 5 \times 1 = 21$ $2 \times 2 + 6 \times 3 + 8 \times 1 = 30$	30+36 = 66	21+24 = 45	$\lvert 66 - 45\rvert = 21$
परिणाम	$\lvert c-d\rvert = 21$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_5 भी 7 से विभाज्य है।				

यह 7 से विभाज्यता की जाँच करने का एक और तरीक़ा है। आइए इसे चरण-दर-चरण समझते हैं।

1. संख्या के इकाई स्थान से आरम्भ करते हुए तीन अंकों के समूह बनाएँ। शेष अंक अन्तिम समूह में शामिल होंगे। क्रमशः पहला समूह विषम, दूसरा समूह सम, तीसरा विषम वग़ैरह होंगे।
2. प्रत्येक समूह में सबसे दाएँ अंक को 1 से, अगले वाले को 3 से और सबसे बाएँ वाले अंक को 2 से गुणा करें।
3. प्रत्येक समूह में प्राप्त सभी गुणनफल को जोड़ें।
4. विषम और सम समूहों का योग ज्ञात कीजिए।
5. यदि इन दोनों योगों का अन्तर, 7 से विभाज्य है या 0 है, तो मूल संख्या 7 से विभाज्य होगी।

नियम का आधार

मान लीजिए $N = 100000\, a_5 + 10000\, a_4 + 1000\, a_3 + 100\, a_2 + 10\, a_1 + a_0$

(जहाँ $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, 6 अंकों की संख्या, N के अंक हैं)

$S_1 = a_0 \times 1 + a_{1,} \times 3 + a_2 \times 2$ $\qquad$ $S_2 = a_3 \times 1 + a_4 \times 3 + a_5 \times 2$

$M = S_1 - S_2$

हमारा नियम कहता है कि यदि *M, 7* का गुणज है, तो *N* भी *7* का गुणज है।

मान लें कि *M*, 7 का गुणज है, यानी किसी पूर्ण संख्या *k* के लिए *M = 7k*।

$7k = (a_0 \times 1 + a_1 \times 3 + a_2 \times 2) - (a_3 \times 1 + a_4 \times 3 + a_5 \times 2) = (-2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2_{a2} + 3a_1 + a_0)$

$N = (100002a_5 - 2a_5) + (10003a_4 - 3a_4) + (1001a_3 - a_3) + (98a_2 + 2a_2) + (7a_1 + 3a_1) + a_0$

$N = 7(14286a_5 + 1428a_4 + 143a_3 + 14a_2 + a_1) + (-2a_5 - 3a_4 - a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0)$

$N = 7(14286a_5 + 1428a_4 + 143a_3 + 14a_2 + a_1) + 7k$

इसलिए, यदि *M 7 का गुणज है, तो N* भी 7 का गुणज है। इसे आसानी से कितने भी अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

नोट : नियम 1-3-2 का उपयोग 2 या अधिक अंकों वाली किसी भी संख्या के लिए किया जा सकता है। यह हमें किसी भी संख्या की 7 से विभाज्यता आसानी से और शीघ्रता से ज्ञात करने में मदद कर सकता है।

तुलना

तरीक़ा	**आवश्यक संक्रियाएँ**	**टिप्पणी**
इकाई अंक को दोगुना करना	×, –	2 या 3 अंकीय संख्याओं के लिए उपयोगी।
इकाई अंक को 5 से गुणा करना	×, +	2 या 3 अंकीय संख्याओं के लिए उपयोगी।
नियम 132	×, +, –, समूहीकरण	तीन अंक से अधिक अंक वाली संख्याओं के लिए उपयोगी।

इस तरह की खोजबीन से शिक्षकों को ऐसे पाठों की योजना बनाने में मदद मिलती है, *जिससे विद्यार्थियों में समस्या समाधान, तार्किक सोच और गणनात्मक (अभिकलनात्मक) सोच की क्षमता विकसित होती है। विद्यार्थी गणित और गणनात्मक सोच की अमूर्तताओं और अन्य मुख्य तकनीकों, जैसे घटनाओं की गणितीय मॉडलिंग और समस्याओं को हल करने के लिए कलन के विकास के साथ काम करने में सहज हो जाते हैं।* (एनसीएफ़-एसई 2023)।

यदि विभाज्यता नियमों का शिक्षण संख्या कौशल का अभ्यास करने पर ही रुक जाता है, तो हम ऐसे समृद्ध विषय की क्षमता को, गम्भीर रूप से सीमित कर रहे हैं। यह पूछना कि नियम क्यों काम करता है, इसका सामान्यीकरण करने का प्रयास करना, विभिन्न नियमों की तुलना करना और फिर अपने स्वयं के नियम बनाने का प्रयास करना, विद्यार्थियों में न केवल गणितीय क्षमता विकसित करेगा बल्कि विषय का आनन्द और सौन्दर्य की समझ भी प्रदान करेगा।

Reference

1. http://publications.azimpremjifoundation.org/2306/1/3_Chika%27s_test_for_divisibility_by_7.pdf
2. https://ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf

जितेन्द्र वर्मा ज़िला धार, मध्य प्रदेश में अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन में स्रोत व्यक्ति हैं। उन्होंने इग्नू नई दिल्ली से वित्त में एमबीए किया है। जितेन्द्र ने मध्य प्रदेश के पब्लिक स्कूलों में गणित शिक्षक और प्रिंसिपल के रूप में काम किया। वर्तमान में वे वैचारिक समझ के साथ-साथ गणित पढ़ाने में उपयोग की जाने वाली शैक्षणिक प्रक्रियाओं पर ध्यान केन्द्रित कर रहे हैं। वे 5 वर्षों से अधिक समय से शिक्षकों और बच्चों के साथ गणित पर काम कर रहे हैं। वे गणित से जुड़ी भ्रान्तियों को दूर करने और गणित को आसानी से सीखने और समझने के लिए शिक्षण संसाधनों की खोज और डिज़ाइन करने में संलग्न हैं। उनसे Jitendra.verma@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : यशोधरा कनेरिया **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

गणित बहुत आसान काम है!

***एट राईट एंगल्स* नवम्बर 2023 अंक में प्रकाशित चुनौती**

हमने एक स्वादिष्ट चॉकलेट केक को 12 टुकड़ों में बाँटा और प्रत्येक टुकड़े को आधी प्लेट में परोसा!

आपकी चुनौती है कि इस स्थिति से आप गणित के कितने प्रश्न बना सकते हैं?

अपने प्रश्न AtRiA.editor@apu.edu.in पर भेजें।

दो पाठकों की प्रतिक्रियाएँ हम यहाँ प्रकाशित कर रहे हैं।

पाठक की प्रतिक्रिया

रोहिणी खापर्डे

rohin.haparde@mgsnagpur.org

स्कूल ऑफ स्कॉलर्स, अकोला।

सम्बद्धता संख्या 1130166

1. दो-तिहाई केक परोसने के लिए कितनी प्लेटों की आवश्यकता होगी?
2. यदि 12 टुकड़ों में से केवल 8 को ही परोसा जाना है, तो इतने केक को परोसने के लिए आवश्यक प्लेटों की संख्या और पूरे केक को परोसने के लिए आवश्यक प्लेटों की संख्या का अनुपात क्या है?

पाठक की प्रतिक्रिया

आस्तिक यादव

astikyadav@mgsnagpur.org

स्कूल ऑफ स्कॉलर्स हुडकेश्वर, नागपुर

1. यदि काटने से पहले मूल गोलाकार केक की त्रिज्या ‘r’ है और केक को 12 बराबर टुकड़ों में काटा जाता है और प्रत्येक को ‘p’ त्रिज्या वाली आधी प्लेट पर परोसा जाता है। केक के एक टुकड़े के क्षेत्रफल और एक आधी प्लेट के क्षेत्रफल के अनुपात की गणना ‘r’ और ‘p’ के रूप में करें।
2. यदि किसी ने एक तिहाई केक खा लिया, तो केक का कितना भाग शेष रह गया?
3. यदि आप पूरे केक को 100% मानें तो प्रत्येक प्लेट पर केक का कितना प्रतिशत है?
4. यदि कोई केक के 3 टुकड़े खाता है, तो उसने पूरे केक का कितना भाग खाया है?
5. यदि हम केक को 4 लोगों में बराबर-बराबर बाँटना चाहें तो प्रत्येक व्यक्ति को कितने टुकड़े मिलेंगे?

बत्ती गुल! के लिए सवालों के हमारे सुझाव

1. मान लो कि घर 3×3 का एक वर्ग है जिसमें 9 कमरे हैं। यदि शुरुआत में सभी कमरों की सभी बत्तियाँ ‘चालू’ हों तो क्या आप सारी बत्तियों को बन्द कर सकते हैं? ऐसा करने के लिए आपको कम-से-कम कितने प्रयास करने होंगे?
2. क्या आप $n \times n$ के एक वर्ग के लिए इसका सामान्यीकरण कर सकते हैं?
3. अगर घर की आकृति $m \times n$ के एक आयत जैसी हो, तो इस स्थिति के लिए क्या आप इस सवाल को विस्तार दे सकते हैं?
4. क्या आप $2 \times 2 \times 2$ के एक घन के लिए इस सवाल को विस्तार दे सकते हैं?

आप और किस तरह के विस्तार व सामान्यीकरणों के बारे में सोच सकते हैं? इन सवालों को आप कैसे हल करेंगे?

आप अपने जवाब और/या आपके द्वारा बनाई गई कोई भी पहेली AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेज सकते हैं।

सवाल छुड़ाने का अपना-अपना तरीक़ा

सन्दीप दिवाकर

पिछले कुछ समय से, मुझे प्राथमिक और माध्यमिक, दोनों स्तरों पर शिक्षकों और बच्चों के साथ काम करने के कई अवसर मिले हैं। मैंने गणित के सत्रों को अधिक मज़ेदार बनाने के लिए रोज़मर्रा की ज़िन्दगी से जुड़ी हुई कुछ पहेलियाँ या सवाल पूछना अपनी आदत बना ली। जब भी किसी ने कोई समाधान सुझाया, तो मैं हमेशा उस समाधान तक पहुँचने के लिए उनके द्वारा अपनाई गई प्रक्रियाओं और उन प्रक्रियाओं को अपनाने के पीछे की उनकी सोच को समझने की कोशिश करता हूँ।

ऐसा ही एक सवाल यह रहा —

> "किसी कमरे में कुछ ख़रगोश और कुछ मुर्गे हैं। किसी ने चौकीदार से मुर्गों और ख़रगोशों की संख्या पूछी। इसके जवाब में चौकीदार ने कहा कि वह यह तो नहीं जानता कि कमरे में कितने मुर्गे और कितने ख़रगोश हैं, लेकिन यह ज़रूर जानता है कि कमरे में कुल 100 सिर और 250 पैर हैं। क्या आप पता लगा सकते हैं कि उस कमरे में कितने ख़रगोश और कितने मुर्गे हैं?"[1]

जब भी इस सवाल को वयस्कों, माध्यमिक स्कूल के बच्चों या शिक्षकों से पूछा गया, तो उनमें से अधिकतर इसे अनुमान लगाकर और "परीक्षण और त्रुटि की विधि" (Trial And Error Method) को इस्तेमाल करके हल करते थे। जैसे कि वे अनुमान लगाते कि 80 मुर्गे और 20 ख़रगोश हैं, जिनको मिलाने पर हमें कुल 100 सिर हासिल होंगे। फिर जब वे पैरों की कुल संख्या की गणना करते, तो उन्हें 240 पैर मिलते। ऐसे में उन्हें एहसास होता कि सवाल में पैरों की संख्या 250 दी गई है और उन्हें अपने अनुमान को सुधारना पड़ेगा। इसके बाद वे मुर्गों और ख़रगोशों की संख्या को बदलकर फिर से पैरों की संख्या का हिसाब लगाते और 100 सिर और 250 पैर हासिल करने की कोशिश करते।

जब उनके सामने यह सवाल रखा जाता कि क्या इस सवाल को हल करने के

1 मैंने यह सवाल काफ़ी समय पहले कहीं पढ़ा या सुना था।

की-वर्ड : सवाल हल करना, तर्क, व्यक्ति

एक से अधिक तरीक़े हो सकते हैं, तो बीजगणित जानने वाले कुछ वयस्क, माध्यमिक स्कूलों के बच्चे और शिक्षक सवाल को हल करने के लिए तुरन्त समीकरण तैयार कर देते। उदाहरण के लिए $x + y = 100$ और $2x + 4y = 250$ (जहाँ x मुर्गों की और y ख़रगोशों की संख्या होती)।

इसके बाद वे इन समीकरणों को सरल करने के लिए प्रतिस्थापन (Substitution), विलोपन (Elimination), क्रॉस गुणन (Cross Multiplication) जैसी विधियों का इस्तेमाल करके उन्हें ऐसे समीकरण में बदलते जिसमें मात्र एक चर हो। मसलन, ख़रगोशों की संख्या x मानने पर, मुर्गों की संख्या 100 - x होगी। इससे समीकरण $4x + 2 (100 − x) = 250$ मिलता है, जिससे x का मान पता करने में और ख़रगोशों और मुर्गों की संख्या की गणना करने में मदद मिलती है।

50 से भी ज़्यादा समूहों के साथ इस सवाल पर काम करने पर मैंने देखा कि लगभग सभी समूहों ने हल निकालने के लिए या तो परीक्षण और त्रुटि विधि या फिर बीजगणितीय समीकरणों का सहारा लिया। माध्यमिक स्कूलों के गणित के शिक्षकों या बीजगणित से परिचित लोगों ने तुरन्त ही अधिक औपचारिक तरीक़ा चुना। इसके उलट, प्राथमिक स्तर के ऐसे शिक्षकों और वयस्कों ने, जो बीजगणित से कतराते हैं, मुख्य रूप से परीक्षण और त्रुटि विधि को इस्तेमाल किया।

जब उनसे यह पूछा गया कि इस सवाल को किस स्तर के बच्चों से पूछा जाना चाहिए, तो गणित के सभी शिक्षकों ने एक स्वर में सहमति ज़ाहिर की कि यह एक कठिन सवाल है और इसे बच्चों से तब तक नहीं पूछा जाना चाहिए जब तक कि उन्हें बीजगणित की जानकारी न हो। उन्होंने सुझाव दिया कि यह सवाल कक्षा-6 या उससे ऊपर की कक्षाओं के बच्चों के लिए ठीक रहेगा।

इस सवाल को प्राथमिक स्तर में पढ़ने वाले बच्चों के कुछ समूहों से भी पूछा गया। बहुत-से बच्चे इसे नहीं हल कर सके, उन्होंने कहा कि यह सवाल अलग था क्योंकि इसमें उनसे सीधे तौर पर जोड़ने, घटाने, गुणा करने या भाग देने को नहीं कहा गया था। कुछ बच्चों ने अलग-अलग तरीक़ों से चित्र बनाकर इसे हल करने की कोशिश की, लेकिन फिर उन्होंने यह कहते हुए इसे हल करने से इन्कार कर दिया कि सवाल कठिन था।

इस पूरे कार्य के दौरान, मुझे ऐसे दो-तीन बच्चे मिले जिनके जवाब सही थे और सवाल को हल करने के लिए उनके द्वारा अपनाए गए तरीक़े अनूठे थे। जब मैंने इनमें से एक बच्चे से सवाल को हल करने का उसका तरीक़ा पूछा, तो उसने अपनी भाषा में समझाया, "देखिए सर, इस सवाल में ख़रगोश और मुर्गे हैं। ख़रगोशों के चार पैर होते हैं और मुर्गों के केवल दो पैर होते हैं। चूँकि सिरों की कुल संख्या 100 है, तो मैं जानता हूँ कि जानवर 100 हैं। आइए सबसे पहले दोनों जानवरों को दो-दो पैर दे देते हैं, इससे हमें 250 पैरों में से 200 पैर मिल जाएँगे और हमारे पास 50 पैर बाक़ी बचेंगे। अब आप किसी भी जानवर को एक पैर नहीं दे सकते क्योंकि किसी भी जानवर के तीन पैर नहीं होते हैं। इसलिए आपको पैर 2-2 के जोड़े में देने होंगे। हमारे पास 50 पैर बचे हैं, अब अगर हम प्रत्येक को दो पैर देते हैं, तो हम 50 पैरों को केवल 25 जानवरों को ही दे सकेंगे। इस तरह से, जिन 25 जानवरों को ये पैर मिलेंगे उनके चार पैर होंगे, तो इस तरह से ये 25 जानवर ख़रगोश होने चाहिए और शेष 75 जानवर मुर्गे होंगे।"

बेशक़, वयस्क, माध्यमिक स्कूलों के बच्चे और शिक्षक इस सवाल को हल करने के लिए पाठ्यपुस्तक में दी गई विधियों को इस्तेमाल करते हैं, लेकिन प्राथमिक स्तर के बच्चे इसे हल करने में ख़ूब मज़े करते हैं और अपनी ख़ुद की विधियों का इस्तेमाल करते हैं। उनकी इन विधियों की जाँच-पड़ताल करने और यह अवलोकन करने पर कि किस तरह से सवाल को हल करने के लिए वे अपनी ख़ुद की विधियों का इस्तेमाल करते हैं, यह पता चलता है उनकी विधि में भी गणितीय तर्क और समस्या समाधान का तार्किक दृष्टिकोण शामिल होता है।

सन्दीप दिवाकर 2012 से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन भोपाल, मध्य प्रदेश में गणित के स्रोत व्यक्ति के रूप में कार्यरत हैं। उन्हें उच्चतर माध्यमिक स्कूलों में गणित पढ़ाने का अनुभव है और उन्होंने 15 वर्षों तक राज्य शिक्षा केन्द्र (एससीईआरटी) में व्याख्याता के तौर पर काम किया है। सन्दीप एससीएफ, किताबों, प्रशिक्षण के मॉड्यूल्स और शिक्षक प्रशिक्षकों, शिक्षकों और बच्चों के लिए सीखने-सिखाने की सामग्री के विकास से जुड़े रहे हैं। उनके लेख *शैक्षिक पलाश*, *प्राथमिक शिक्षक*, *शैक्षिक संदर्भ* आदि में छप चुके हैं। सन्दीप से sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

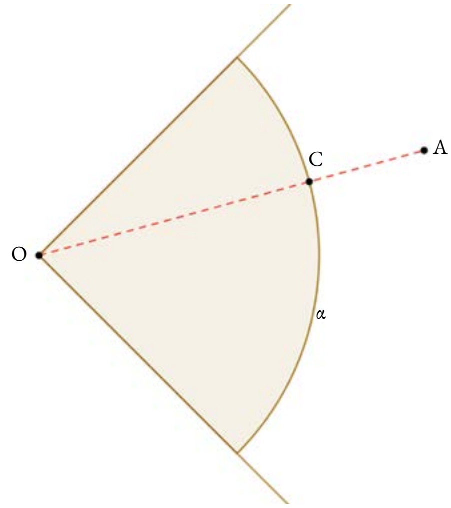
अनुवाद : शहनाज़ **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

टूटे हुए टेप से भाला फेंक को मापना

मोहन आर.

समाधान :

मान लीजिए कि A वह बिन्दु है जहाँ भाला गिरता है, α वह वृत्तीय चाप है जो A के सबसे नज़दीक है, और O α का केन्द्र है। सही माप सुनिश्चित करने के लिए टेप को A और O को जोड़ने वाली रेखा की सीध में होना चाहिए। माना कि C वह बिन्दु है जहाँ रेखा AO और वृत्तीय चाप α एक-दूसरे को काटती हैं। अगर शिक्षिका (जो कि रेफरी की भूमिका निभा रहीं हैं), α पर सही स्थान पर C बिन्दु नहीं ढूँढ़ पाती हैं तो मापने में गलती हो सकती है और उपविजेता द्वारा उठाया गया सवाल सही सिद्ध हो

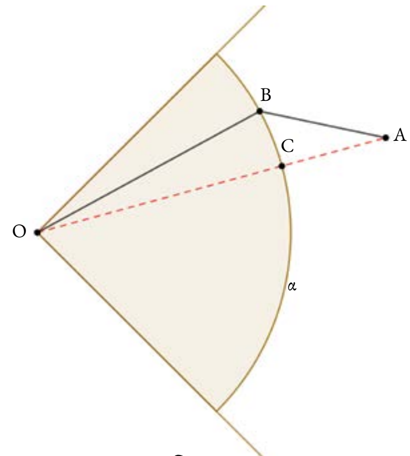


चित्र-1

जाएगा। रेफरी एकदम सही जगह पर बिन्दु C कैसे पता कर सकती हैं?

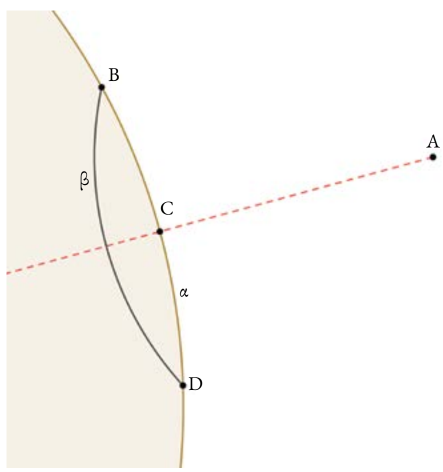
की-वर्ड : अनुप्रयोग, अन्त: विषयक, समस्या समाधान

यदि हम α पर कोई अन्य बिन्दु B चुनते हैं, तो त्रिभुज असमिका (triangle inequality) के अनुसार हमारे पास OB + BA > OC + CA = OA होगा।



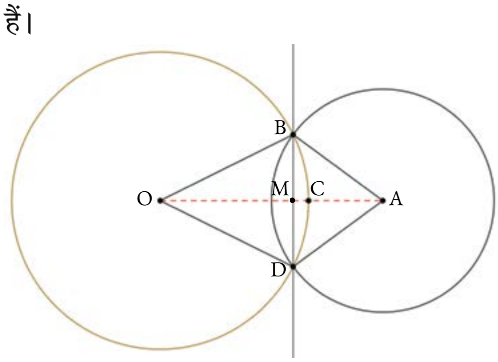
चित्र-2

इसलिए, यदि B चाप α पर C से अलग कोई बिन्दु है तो हम A को केन्द्र और AB को त्रिज्या रखकर एक और वृत्तीय चाप β खींच सकते हैं। अब β, α को मूल बिन्दु B पर और एक अन्य बिन्दु D पर काटता है। (क्या ऐसा तब भी होगा जब B और C दोनों बिन्दु ठीक एक ही जगह होंगे?)

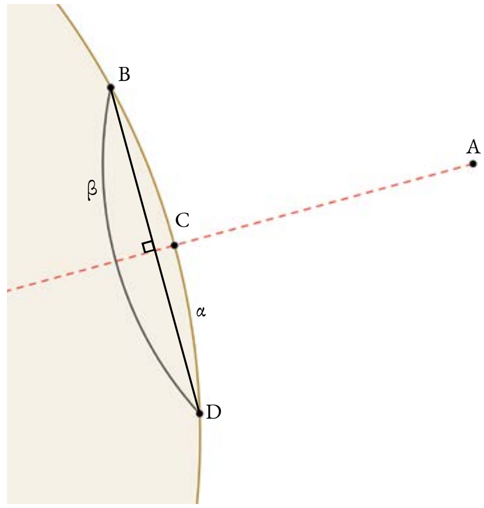


चित्र-3

नीचे दिए गए विस्तारित (चरम स्थिति के) चित्र पर नज़र डालते हैं। मान लीजिए कि B और D को जोड़ने वाली रेखा O और A को जोड़ने वाली रेखा को बिन्दु M पर काटती है। इस स्थिति में [SSS (भुजा-भुजा-भुजा सर्वांगसमता से)] त्रिभुज BOA और DOA सर्वांगसम हैं। इसका मतलब है कि $\angle BOA = \angle DOA$ है, और इसलिए त्रिभुज BOM और DOM सर्वांगसम हैं [SAS (भुजा-कोण-भुजा सर्वांगसमता से)]। इसका तात्पर्य है कि $\angle OMB = \angle OMD$ हैं और समकोण हैं। इस प्रकार, रेखाएँ BD और OA एक-दूसरे के लम्बवत हैं।



चित्र-4



चित्र-5

इसलिए, यदि रेफरी वृत्तीय चाप α पर कोई भी बिन्दु B चुनती हैं, तो वह माध्यमिक कक्षा में पढ़ाई जाने वाली बुनियादी ज्यामितीय का उपयोग करके BD का लम्ब समद्विभाजक (या $\angle BAD$ का कोण समद्विभाजक) खींच सकती हैं। इस तरह, चाप α को यह समद्विभाजक जिस जगह काटेगा वह बिन्दु C होगा।

सम्पादक टीप : जब हम ज्यामिति को वास्तविक दुनिया के अनुभवों से जोड़ते हैं तो यह अधिक रोचक बन जाती है। यहाँ चर्चा किए गए सिद्धान्त गोला फेंक, हैमर थ्रो और डिस्कस थ्रो जैसे खेलों में दूरी को मापने में, विशेषकर तार्किकता, त्रुटि विश्लेषण और प्रमाणिकता सिद्ध करने में मदद करते हैं।

इसके अतिरिक्त, यह चर्चा वृत्त की स्पर्श-रेखा की अवधारणा की ओर भी ले जाती है। यदि रेफरी बिन्दु B के बजाय बिन्दु C को चुनती हैं, तो स्पष्ट है कि नया वृत्तीय चाप β वृत्तीय चाप α को किसी अन्य बिन्दु पर नहीं काटेगा। इसलिए, बिन्दु C से गुज़रने वाली, AO की लम्बवत रेखा C के स्पर्शबिन्दु को दर्शाती है। यह अवधारणा निम्नलिखित प्रमेय को भी छूती (या रेखांकित करती) है, जिसे आमतौर पर विद्यार्थियों को बाद में पढ़ाया जाता है :

प्रमेय : वृत्त के किसी बिन्दु पर स्पर्श रेखा स्पर्श बिन्दु से गुज़रने वाली त्रिज्या पर लम्ब होती है।

आभार

एट राइट एंगल्स सुयश तिवारी के प्रति आभारी है। वे अज़ीम प्रेमजी स्कूल, धमतरी में गणित शिक्षक हैं। भाला फेंक में दूरी को मापने पर लिखी उनकी टिप्पणी ने इस लेख के विचार को जन्म दिया।

मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में गणित पढ़ाते हैं। मूलत: वे एक बीजगणितज्ञ हैं। वे गणित शिक्षा और गणित संवाद में रुचि रखते हैं। वे कर्नाटक के गणितीय ओलम्पियाड के क्षेत्रीय समन्वयक हैं। उनसे mohan.r@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : शौर्या बरतारिया **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अफसाना पठान

16 जुलाई, 1945, न्यू मेक्सिको का रेगिस्तान। पौ फटने के साथ दुनिया के पहले परमाणु बम के विस्फोट का पल क़रीब आते ही, वातावरण में एक ऐतिहासिक सन्नाटा छा गया था। इस विस्फोट को देखने बम के निर्माता इकट्ठे थे।

सत्य से साक्षात्कार का क्षण अलस्सुबह 5:29 आया। उस पहले परमाणु बम के फूटते ही एक चुँधियाती चमक और कानफोड़ू दहाड़ उत्पन्न हुई। अकल्पनीय शक्ति के साथ तरंगें चहुँओर फैल गईं।

वहाँ जमा हुए तेजस्वियों में मेनहेटन प्रोजेक्ट के एक प्रमुख वैज्ञानिक, एनरिको फर्मी भी शामिल थे। परमाणु विस्फोट से कुछ ही क्षण पहले उन्होंने एक सरल-सा प्रयोग तैयार किया था।

विस्फोट की पहली कौंध देखते ही, फर्मी ने अपने सिर के ऊपर काग़ज़ के कुछ टुकड़े हवा में छोड़े और उनका अवलोकन करते रहे — काग़ज़ के टुकड़े लहराते हुए उनसे कोई 2 मीटर की दूरी पर जाकर गिरे।

विस्फोट के चन्द सेकंड के अन्दर ही फर्मी ने बम की ऊर्जा का अन्दाज़ा लगा लिया था – 10,000 टन टीएनटी। कुछ सप्ताह बाद की व्यवस्थित गणनाओं ने इस बात की पुष्टि की कि फर्मी का अन्दाज़ा उल्लेखनीय रूप से वास्तविक ऊर्जा उत्सर्जन के क़रीब था।

इतनी जल्दी इतनी बड़ी मात्रा का 'अनुमान' उन्होंने कैसे लगा लिया था?

अनुमान लगाने की कला – भाग-1

मोहन आर.

यह लेख फर्मी विधि की पड़ताल करता है, जो बड़ी-से-बड़ी संख्याओं का अन्दाज़ा लगाने में अटकलों की न्यूनतम संख्या का इस्तेमाल करने का एक त्वरित और प्रभावी तरीक़ा है। इस पहले भाग में, हम कुछ उदाहरणों के साथ इस विधि का प्रदर्शन करेंगे। अन्त में आपके लिए चन्द पेचीदा फर्मी सवाल हल करने के लिए दिए गए हैं!

फर्मी विधि

एनरिको फर्मी (1901-1954) एक इतालवी भौतिक विज्ञानी थे जिन्होंने नाभिकीय भौतिकी और क्वांटम यांत्रिकी के क्षेत्र में महत्त्वपूर्ण योगदान दिया है। धीमे न्यूट्रॉनों की वजह से होने वाली नाभिकीय अभिक्रियाओं पर उनके अभूतपूर्व शोध ने उन्हें 1938 में भौतिकी का नोबेल पुरस्कार दिलाया। नोबेल पुरस्कार पाने के तुरन्त बाद, वे मुसोलिनी के फासीवादी शासन से बचकर संयुक्त राज्य अमरीका चले गए थे। चार साल बाद, शिकागो में उन्होंने अपनी पहली निरन्तर/ नियंत्रित परमाणु प्रतिक्रिया का उत्पादन किया। इस खोज ने परमाणु बम व परमाणु विखण्डन रिएक्टरों के विकास का मार्ग प्रशस्त किया, जिससे परमाणु ऊर्जा व इसके सम्भावित अनुप्रयोगों के बारे में हमारी समझ में क्रान्तिकारी बदलाव आया।

फर्मी की बौद्धिक क्षमता उनकी वैज्ञानिक गतिविधियों से कहीं आगे जाती थी। उनके पास सीमित जानकारी के आधार पर सही अनुमान लगाने और जटिल समस्याओं को हल करने की अद्भुत क्षमता थी। समस्या-समाधान के लिए उनका अपरम्परागत दृष्टिकोण, जो अक्सर अन्तर्ज्ञान और सामान्य ज्ञान पर निर्भर करता था, 'फर्मी विधि' या 'फर्मी अनुमान' के नाम से जाना जाने लगा।

फर्मी अक्सर असामान्य सवाल बनाकर और उन्हें हल करके अपने दोस्तों और विद्यार्थियों का मनोरंजन किया करते थे। जैसे, "शिकागो में कितने पिआनो ट्यूनर हैं?" 'फ़र्मी समस्या' किसी ऐसी चीज़ का त्वरित अनुमान माँगती है जिसे सटीक रूप से मापना कठिन या असम्भव लगता है।

की-वर्ड : फर्मी विधि, अनुमान, सृजनशील समस्या-समाधान, तर्क

इन समस्याओं के हल के प्रति फर्मी का तरीक़ा होता था, सामान्य ज्ञान और मोटे-मोटे अनुमान के द्वारा उत्तर के क़रीब पहुँचना।

फर्मी समस्याएँ क्या हैं और उनका समाधान कैसे करें?

उदाहरण के लिए, आइए शिकागो शहर में पिआनो ट्यूनरों की संख्या निर्धारित करने की समस्या पर विचार करें। यह गुत्थी एक वर्ष में सेकंडों की संख्या का निर्धारण करने की एक अन्य अनुमान समस्या से किस प्रकार भिन्न है? इस बाद वाली समस्या को हल करने के लिए, हमें एक वर्ष में दिनों की संख्या, एक दिन में घण्टों की संख्या, एक घण्टे में मिनटों की संख्या और एक मिनट में सेकंडों की संख्या मालूम होनी चाहिए। इन सभी का एक निश्चित उत्तर है। हमें बस समय की इकाई को सेकंड प्रति वर्ष में बदलना होगा।

चित्र-1: एनरिको फर्मी
Source: Enrico Fermi. (2024, January 26). In *Wikipedia*. https://en.wikipedia.org/wiki/Enrico_Fermi

$$\frac{365\ \cancel{\text{days}}}{1\ \text{year}} \times \frac{24\ \cancel{\text{hours}}}{1\ \cancel{\text{day}}} \times \frac{60\ \cancel{\text{minutes}}}{1\ \cancel{\text{hour}}} \times \frac{60\ \text{seconds}}{1\ \cancel{\text{minute}}} \approx 3 \times 10^7\ \frac{\text{seconds}}{\text{year}}$$

एक तरह से, बाद वाली समस्या को समस्या के कथन में ही दिए गए आँकड़ों के साथ तार्किक निगमन के द्वारा हल किया जा सकता है। दूसरी ओर, फर्मी समस्याएँ सामान्य गणितीय समस्याओं से स्पष्ट रूप से भिन्न होती हैं, क्योंकि फर्मी समस्या का उत्तर केवल तार्किक निगमन द्वारा सत्यापित नहीं किया जा सकता है और हमेशा अनुमानित ही होता है। शिकागो में पिआनो ट्यूनरों की एकदम सही संख्या जानने के लिए, हमें शहर के सभी पिआनो ट्यूनरों की कुल संख्या गिननी पड़ सकती है! अब हो सकता है कि सभी पिआनो ट्यूनर या तो टेलीफ़ोन निर्देशिका में सूचीबद्ध ना हों या गूगल से भी ना पाए जा सकें।

एक तरीक़ा है जिससे आप पता लगा सकते हैं कि शिकागो में कितने पिआनो ट्यूनर हैं :

1. शुरुआत यह अनुमान लगाकर करें कि शिकागो में कितने लोग रहते हैं।
2. अन्दाज़ा लगाएँ कि शिकागो में कितने घर हैं।
3. अब पिआनो वाले घरों का अनुमान लगाएँ।
4. अनुमान लगाएँ कि प्रत्येक घर में कितनी बार पिआनो ट्यून कराया जाता है।
5. अनुमान लगाएँ कि एक पिआनो को ट्यून करने में कितना समय लगता है।
6. अन्दाज़ा लगाइए कि एक पिआनो ट्यूनर एक सप्ताह में कितने घण्टे काम करता है।

अनुमान लगाते समय हम समस्या को छोटे-छोटे चरणों में तोड़ देते हैं, फिर प्रत्येक चरण में, हमें कुछ अनुमान लगाने होते हैं। चूँकि हमारा लक्ष्य सटीक आकलन नहीं बल्कि एक मोटा-मोटा अनुमान है, हमें बस यह सुनिश्चित करना है कि हमारा अनुमान सही परिमाण के भीतर है। हो सकता है प्रत्येक चरण में हमारा आकलन वास्तविकता से अधिक या कम हो। मसलन, पिआनो केवल घरों में नहीं बल्कि सार्वजनिक स्थानों और व्यावसायिक ठिकानों पर भी हो सकते हैं। हो सकता है कुछ पिआनो हमारी सोच से अधिक या कम बार ट्यून किए जाते हों। प्रायिकता का नियम कहता है कि यदि हम अपने अनुमान लगाते समय अलग-अलग दिशाओं (कम या अधिक की) में त्रुटियाँ करते हैं, तो वे एक-दूसरे को निरस्त कर देंगी और हमारा अन्तिम अनुमान सही उत्तर के क़रीब होगा।

शिकागो में मौजूद पिआनो ट्यूनरों की आबादी का अनुमान लगाने जैसी समस्या का इसी प्रकार का तरीक़ा निम्नलिखित TED-Ed वीडिओ में देखा जा सकता है।

A clever way to estimate enormous numbers - Michael Mitchell

कुछ फर्मी समस्याएँ और उन्हें सुलझाने की युक्तियाँ देखिए।

समस्या-1 : दुनिया में कितने गंजे लोग हैं?

चित्र-2 : दुनिया भर में गंजों की कुल संख्या को गिन पाना तो असम्भव है।

एक समाधान : दुनिया में लगभग 8 अरब लोग हैं। उनमें से लगभग आधी महिलाएँ हैं, जो आमतौर पर गंजी नहीं होतीं। सो हमारे पास लगभग 4 अरब आदमी रह जाते हैं। गंजे होने वाले अधिकतर लोगों की उम्र 30 वर्ष से अधिक होती है। सो, हम 4 अरब पुरुषों को दो समूहों में बाँट सकते हैं — 2 अरब जो 30 या उससे कम उम्र के हैं और 2 अरब जो 30 से अधिक उम्र के हैं। वरिष्ठ समूह वह है जिसमें गंजे हैं। हम अनुमान लगा सकते हैं कि वरिष्ठ समूह के लगभग 10% पुरुष गंजे हैं। इसका मतलब, इस तर्क के अनुसार, दुनिया में लगभग 20 करोड़ गंजे हैं।

समस्या-2 : बेंगलूरु में साइकिल मरम्मत की कितनी दुकानें हैं?

एक समाधान : यह समस्या पिआनो ट्यूनर वाली समस्या के समान है। बेंगलूरु भारत का एक मेट्रो शहर है और एक सामान्य मेट्रो शहर की आबादी 1 करोड़ होगी। अब यदि एक घर में लगभग 4 लोग रहते हैं, तो शहर में 25 लाख घर होंगे। अगर हम मानें कि मोटेतौर पर दो घरों में से एक के पास साइकिल है, तो शहर में लगभग 12.5 लाख साइकिलें हैं। यह मानते हुए कि एक साइकिल को साल में एक बार मरम्मत की ज़रूरत पड़ती है, हर साल 12.5 लाख मरम्मतें होती होंगी, यानी हर महीने कोई 1,00,000 मरम्मतें। यह मानते हुए कि एक मरम्मत की दुकान प्रति माह 50 मरम्मत का काम सम्हाल सकती है, इस माँग को पूरा करने के लिए, हमें शहर में 2000 मरम्मत की दुकानों की आवश्यकता होगी। ध्यान दें कि हम निश्चित नहीं हो सकते कि साइकिल मरम्मत की दुकानों की संख्या 2000 है या 6000, लेकिन हम इतना तो जानते हैं कि उनकी तादाद हज़ारों में होनी चाहिए। अर्थात यह संख्या 200 या 20,000 तो नहीं हो सकती।

यहाँ विभिन्न क्षेत्रों से कुछ व्यावहारिक फर्मी समस्याएँ दी गई हैं :

- पर्यावरण नीति : "यदि हम प्लास्टिक की किराना थैलियों का उपयोग करना बन्द कर दें, तो हम कितना कम कचरा पैदा करेंगे?"

- शैक्षिक नीति : "यदि कोई राज्य कक्षा की अधिकतम साइज़ को 35 विद्यार्थियों तक सीमित करता है, तो स्कूल चलाने का सालाना ख़र्च कितना बढ़ जाएगा?"
- जन स्वास्थ्य : "एक गम्भीर क़िस्म के फ्लू का मौसम है और हमारे देश में हर किसी को स्वास्थ्य कार्यकर्ता से टीकाकरण की आवश्यकता है। हम कितनी तेज़ी से सभी को टीका लगवा सकते हैं?"
- व्यक्तिगत वित्त : "एक गृहिणी घरेलू खर्चों में मदद के लिए सुबह की टिफिन सेवा शुरू करना चाहती है। क्या उसे ऋण लेने की आवश्यकता है और क्या वह अपने दम पर व्यवसाय चला सकती है?"

ये उदाहरण फर्मी समस्याओं के विविध अनुप्रयोगों का विस्तार दर्शाते हैं, उन तमाम क्षेत्रों में उनकी उपयोगिता प्रदर्शित करते हैं जहाँ सटीक माप हमेशा सम्भव नहीं होते। कुछ और फर्मी समस्याओं की बानगी।

1. इस पल दुनिया में कितने लोग अपने मोबाइल फ़ोन पर बात कर रहे हैं?
2. यदि आपके ज़िले के सभी लोग अपना-अपना एक दिन का वेतन किसी अच्छे कार्य के लिए दान करें, तो कितना धन जुटाया जा सकता है?
3. आपके राज्य में कितने किलोमीटर सड़कें/ नदियाँ हैं?
4. एक सामान्य मोटरसाइकिल अपने जीवनकाल में कितना पेट्रोल ख़र्च करती है?
5. एक तितली प्रति दिन कितनी दूर तक उड़ती है?
6. आपके शहर में मच्छरों की वर्तमान जनसंख्या कितनी है?
7. एक पेंसिल का औसत जीवनकाल कितना होता है?
8. एक ट्यूबलाइट को पूरे सप्ताह/ माह/ वर्ष तक चालू रखने में कितना ख़र्च आता है?
9. आप अपने जीवनकाल में कितने घण्टे टीवी देखेंगे?
10. 10 लाख तक गिनने में कितना समय लगेगा? और एक करोड़ तक गिनने में?
11. भारत में हर साल कितना दूध पैदा होता है?
12. यह मानते हुए कि पूरे मार्ग पर एक अच्छी वाली ड्रॉइंग सतह बनाई जा सकती है, समूची भूमध्य रेखा पर लाइन खींचने में कितनी पेंसिलें लगेंगी?
13. यदि आपने किसी समाचार पत्र में विज्ञापन प्रकाशित कराया है, तो कितने लोगों के द्वारा उसे देखने की सम्भावना होगी?
14. आपके स्कूल में एक महीने में कितने भोजन की खपत होती है?
15. औसत वैश्विक तापमान को एक डिग्री कम करने के लिए कितने पेड़ लगाने की आवश्यकता होगी? (यह मानते हुए कि ग्लोबल वॉर्मिंग उलटनीय है)

इसमें कोई सन्देह नहीं कि फर्मी समस्याओं को उठाना और हल करना मज़ेदार होता है, लेकिन क्या उनका प्रयोग कक्षा में भी किया जा सकता है? लेख के भाग-2 में इस प्रश्न की पड़ताल करेंगे।

मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में गणित पढ़ाते हैं। मूलत: वे बीजगणितज्ञ हैं और गणित शिक्षा व गणित सम्प्रेषण में भी रुचि रखते हैं। वह कर्नाटक के गणित ओलम्पियाड के क्षेत्रीय संयोजक हैं। उनसे mohan.r@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

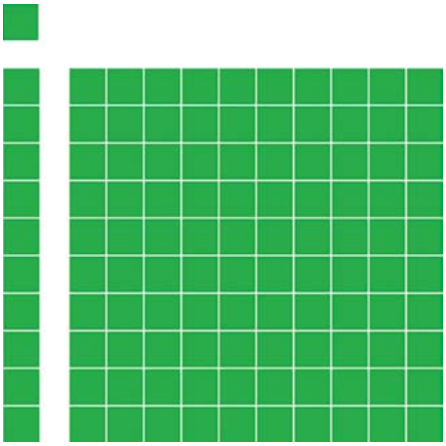
अनुवाद : मनोहर नोतानी **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

द्विविमीय आधार-10 ब्लॉक

(जिसे फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स भी कहते हैं)

मैथ स्पेस

सीखने-सिखाने की कई सामग्री आधार 10 (बेस 10) की संरचना को समझने में और यह समझने में मदद करती हैं कि हम पूर्ण संख्याओं की संकल्पना और उपयोग कैसे करते हैं। इनमें से कई चार संक्रियाओं से परिचित करवाने और उनका अन्वेषण करने में भी सहायता करती हैं। हमने पाया कि इनमें से सबसे बढ़िया 'द्विविमीय आधार-10 ब्लॉक' (2D base -10 block) है जो फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स (सपाट-लम्बे-इकाई) - FLU के नाम से लोकप्रिय है।



चित्र-1

इकाई एक छोटा वर्ग है या 1 है। 'लॉन्ग' (लम्बा) इकाई का 10 गुना है और इसलिए 10 है। 'फ्लैट' एक बड़ा चपटा वर्ग है जो इकाई का 100 गुना और लॉन्ग का 10 गुना है, इसलिए यह 100 है। **चित्र-1** इन बुनियादी ब्लॉक को दर्शाता है। तीनों प्रकार के ब्लॉक एक ही रंग के होने चाहिए। इसका कारण नीचे बताया गया है।

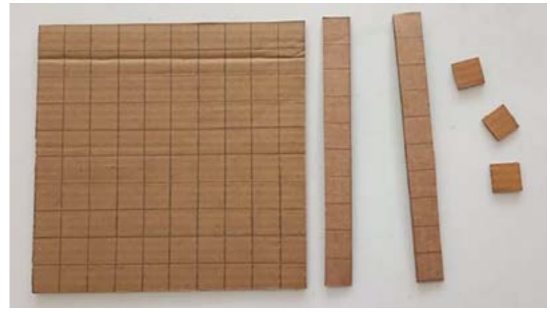
चूँकि यह एक पूर्व-समूहीकृत आनुपातिक सामग्री है, इसलिए 'लॉन्ग' को 10 इकाइयों में विभाजित नहीं किया जा सकता है। तो, इसका विनिमय 10 इकाइयों के लिए होगा। इसी तरह 10 लॉन्ग के लिए एक फ्लैट का आदान-प्रदान करना होगा। इस पूर्व-समूहित प्रकृति के कारण FLU प्रत्यक्ष समूहीकरण

की-वर्ड : सीखने-सिखाने की सामग्री (टीएलएम), स्थानीय मान, संख्या संक्रिया, मानसिक चित्रण

और असमूहीकरण का अनुभव प्रदान नहीं कर सकता है, जैसा समूहीकृत सामग्री (उदाहरण के लिए तीलियों के बण्डल) प्रदान करते हैं। इसलिए सलाह दी जाती है कि FLU का उपयोग कुछ समूहीकरण योग्य सामग्री से थोड़े अनुभव के बाद किया जाए।

हम सलाह देते हैं कि छोटे बच्चों के लिए यानी बुनियादी स्तर पर, पूर्व-प्राथमिक और कक्षा-1 और 2 में, नालीदार (कोरुगेटेड) कार्डबोर्ड से बना थोड़ा बड़ा संस्करण प्रदान किया जाए (**चित्र-2**)। ब्लॉक के आकार निम्नानुसार हो सकते हैं :

- इकाई : 2 सेमी × 2 सेमी
- लम्बाई : 20 सेमी × 2 सेमी
- चौड़ाई : 20 सेमी × 20 सेमी

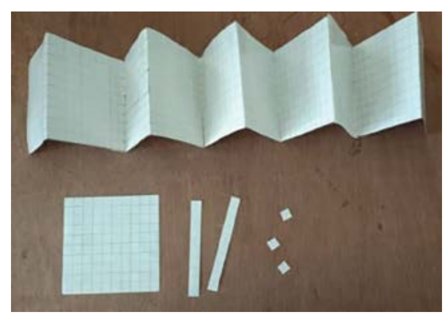


चित्र-2

चित्र-3

यदि इस स्तर पर बच्चों को 1000 से परिचित कराया जाता है, तो उसे 10 फ्लैट को पारदर्शी सेलो-टेप से जोड़कर भी बनाया जा सकता है (**चित्र-3**)।

बड़े बच्चे, यानी प्रारम्भिक और मध्य चरण में (क्रमशः कक्षा-3 से 5 और कक्षा-6 से 8), के लिए मोटे चार्ट पेपर या मोटे पोस्टर पर चौखाना नोटबुक को चिपकाकर छोटे ब्लॉक का उपयोग किया जा सकता है (**चित्र-4**)।



चित्र-4

FLU का उपयोग इन कार्यों के लिए किया जा सकता है :

- पूर्ण संख्याओं की तुलना करना।
- जोड़-घटाव, विशेष रूप से मानक कलन विधि की रचना करना।
- गुणा और भाग, दोनों के लिए सारणी की धारणा का उपयोग करके।
- वर्ग और वर्गमूल — दीर्घ विभाजन विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने के लिए कलन विधि का परिचय और रचना करना।

प्रत्येक उपयोग के लिए पर्याप्त ब्लॉक्स की पर्याप्त संख्या होनी चाहिए :

- जोड़-घटाव — प्रत्येक प्रकार के कम-से-कम 20।
- गुणा-भाग — कम-से-कम 12-20 फ्लैट, 90 लॉन्ग और 90 यूनिट।
- वर्ग और वर्गमूल — गुणन-विभाजन के समान।

जब बच्चे पूर्ण संख्याओं के साथ खेलना शुरू करते हैं (उनकी तुलना करना और चारों संक्रियाओं का उपयोग करना), तो उनका काम नियमों और कलन विधि के पीछे के कारण को समझे बिना मात्र प्रतीकात्मक हेर-फेर तक ही सीमित हो जाता है। FLU संख्याओं और उनके द्वारा दर्शाई गई मात्राओं से जोड़कर इस अन्तर को काफ़ी अच्छी तरह से भर देता है।

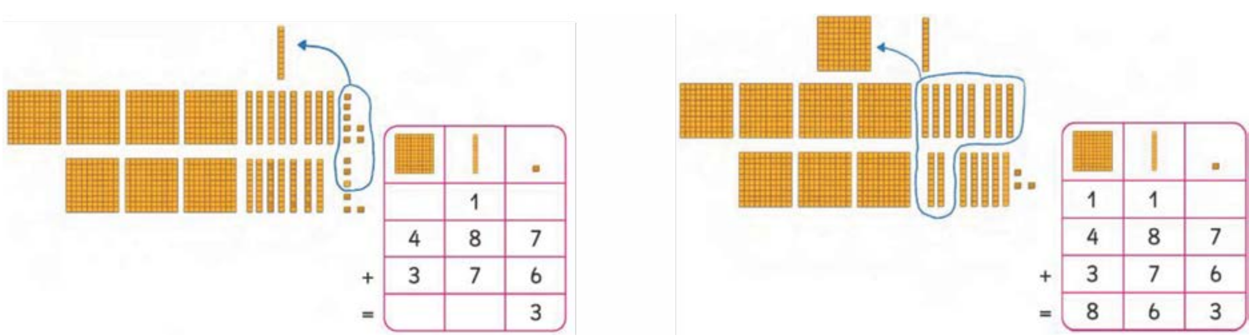
दो पूर्ण संख्याओं की तुलना करते समय, FLU विद्यार्थी को यह समझने में मदद करता है कि एक लॉन्ग 9 यूनिट से बड़ा है

और इसी तरह एक फ्लैट 9 लॉन्ग (या 90 यूनिट) से बड़ा है। इसलिए, कोई भी 2 अंक की संख्या 1 अंक की संख्या से बड़ी होती है और इसी प्रकार कोई भी 3 अंक की संख्या किसी भी 2 अंक की संख्या से बड़ी होती है। इस प्रकार के अवलोकन को सामान्यीकृत किया जा सकता है। जैसे, "अधिक अंकों वाली पूर्ण संख्या बड़ी होती है", उदाहरण के लिए 10002 > 98। कोई यह निष्कर्ष भी निकाल सकता है कि यदि दो 2 अंक की संख्या में पहला अंक अलग-अलग पहला अंक है, तो उन्हें लॉन्ग्स की अलग-अलग संख्याओं के साथ दर्शाया जाता है। स्वाभाविक रूप से, अधिक लॉन्ग वाली संख्या बड़ी होती है। अर्थात, "यदि दो संख्याओं में अंकों की संख्या समान है, तो बड़े पहले अंक वाली संख्या बड़ी होती है।" उदाहरण के लिए: 43 > 34। यही निष्कर्ष उन्हें यह तर्क करने में भी मदद कर सकता है कि 403 > 289। और अन्त में, यदि पहले अंक बराबर हैं, तो हमें अगले अंकों की मात्राओं की जाँच करनी चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि 3 अंक वाली 2 संख्याओं के पहले अंक समान हैं, तो हमें प्रत्येक को दर्शाने के लिए आवश्यक 'लॉन्ग' की संख्या की जाँच करनी होगी। अर्थात, दाईं ओर का अगला अंक। उदाहरण के लिए 640 > 638। यदि वे भी समान हैं, फिर अगले अंकों की जाँच करें। उदाहरण के लिए 756 > 753। इस प्रकार, अन्तिम नियम पर पहुँचते हैं, "यदि पहला अंक समान है, तो दाईं ओर के अगले अंक की जाँच करें, बड़ा अंक ⟹ बड़ी संख्या" और "यह तब तक जारी रखें जब तक अंक असमान न हो जाएँ।"

स्तम्भ जोड़ना और 'हासिल' (कैरी ओवर) या पुनर्समूहन कुछ सरल विचारों के साथ स्वयं हो जाता है :

- FLU का उपयोग करके जोड़ी जाने वाली प्रत्येक संख्या बनाना।
- योग का अर्थ है मिलाना।
- जब भी, एक प्रकार के 10 हों, तो अगले बड़े ब्लॉक के साथ आदान-प्रदान करें — अर्थात, यदि 10 या अधिक 'यूनिट' हैं तो 10 यूनिट को एक 'लॉन्ग' से बदलें या यदि 10 या अधिक लॉन्ग हैं तो उनमें से 10 को एक 'फ्लैट' से बदलें।

शिक्षक यह दर्शा सकता है कि कलन विधि इसे रिकॉर्ड करने का एक तरीक़ा मात्र है। **चित्र-5** इसे 487 + 376 के लिए दर्शाता है।



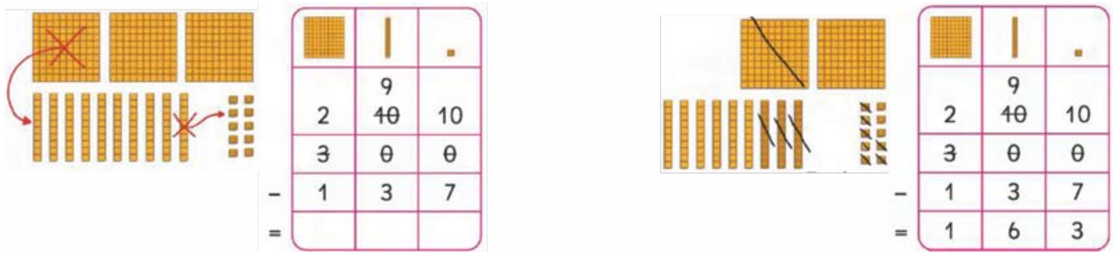
चित्र-5

घटाव के लिए भी समान प्रक्रिया होगी :

- FLU का उपयोग करके पहली संख्या बनाना।
- दूसरी संख्या का मानसिक चित्रण करना, विशेष रूप से इसे बनाने के लिए ज़रूरी FLU।
- घटाव (व्यवकलन) का अर्थ है 'कम करना'।
- यदि आवश्यक हो, तो लॉन्ग और फ़्लैट का आदान-प्रदान करें, ताकि घटाने के लिए प्रत्येक प्रकार पर्याप्त मात्रा में हो।

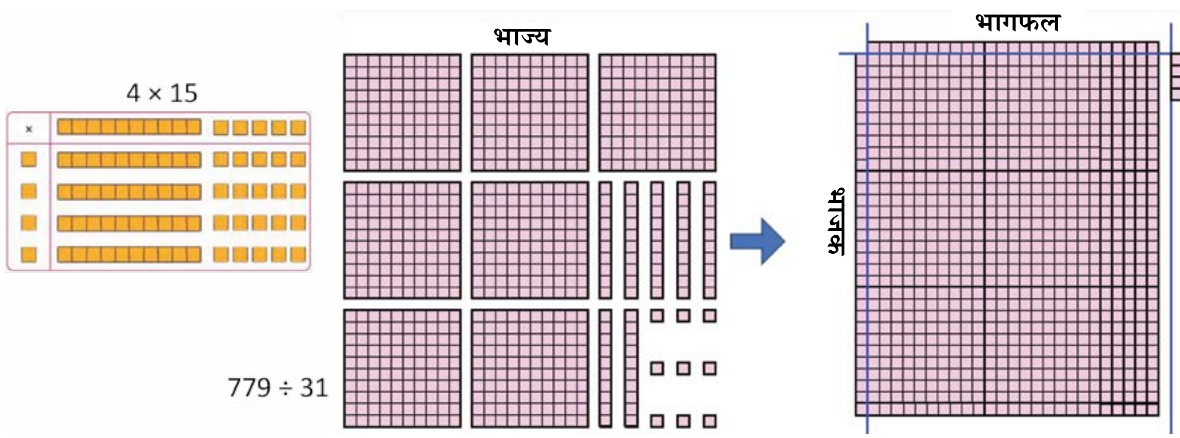
फिर, शिक्षक यह दर्शाने में मदद कर सकते हैं कि मानक कलन विधि इसे कैसे प्रदर्शित करती है। **चित्र-6** में इसे 300-137 के लिए दर्शाया गया है। यह एक कठिन घटाव (व्यवकलन) है जहाँ शुरुआत में ही दो दौर के आदान-प्रदान की आवश्यकता होती है!

पूर्ण संख्याओं का विभाजन नामक लेख में हम पूर्ण संख्याओं के विभाजन का वर्णन पहले ही कर चुके हैं। **चित्र-7** में गुणन का एक उदाहरण (4 × 15) और भाग के लिए दूसरा उदाहरण (779 ÷ 31) दर्शाया गया है।



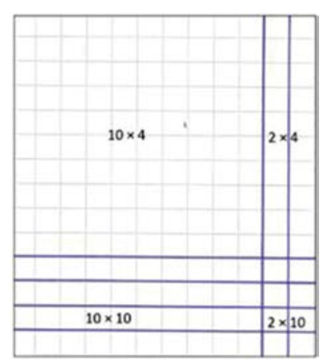
चित्र-6

आमतौर पर FLU, बड़े और छोटे दोनों संस्करण, बनाते समय ऐसी सारणी का सामना करना पड़ता है। **चित्र-8** में 14 × 12 को दर्शाने के लिए आवश्यक सामग्री दर्शाई गई है, यानी 1 फ्लैट, 4 + 2 = 6 लॉन्ग और 2 × 4 = 8 यूनिट जो चौखाने काग़ज़ की एक शीट से बनाई जा सकती हैं।



चित्र-7

वर्गों को गुणन का एक विशेष मामला माना जा सकता है। विशेष रूप से 2-अंक की संख्याओं के वर्ग, $(a + b)^2$ के पैटर्न से मिलते-जुलते होते हैं। वर्गमूल ज्ञात करने के लिए विभाजन कलन विधि में इसी समानता का उपयोग किया जाता है और इसे FLU का उपयोग करके शुरू किया जा सकता है।



चित्र-8

अलबत्ता, चूँकि यह बहुत बाद में, उच्च कक्षा के विद्यार्थियों के साथ किया जाता है, वास्तविक मैनिप्यूलेटिव्स की आवश्यकता कम होगी। लेकिन आप इस विचार का उपयोग तस्वीर और कच्चे चित्र बनाने के लिए कर सकते हैं। मैथिगॉन पॉलीपैड (Mathigon Polypad) सहित कई आभासी मैनिप्यूलेटिव्स साइट वर्चुअल FLU प्रदान करती हैं, जो वास्तविक मैनिप्यूलेटिव्स के समान ही अच्छे हैं। हालाँकि, ये अलग-अलग रंगों में आते हैं। लेकिन अच्छी बात है कि इनका रंग बदला जा सकता है। **चित्र-1** पॉलीपैड का उपयोग करके तैयार किया गया था।

FLU को आसानी से दशमलव तक बढ़ाया जा सकता है क्योंकि इसका आधार-10 है। हालाँकि, कुछ महत्त्वपूर्ण परिवर्तन करने होंगे।

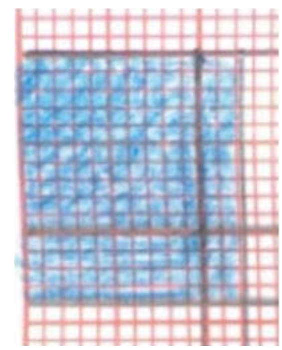
- फ्लैट 1 पूर्ण हो जाता है और इसलिए, भीतर कोई रेखाएँ नहीं होनी चाहिए।
- लॉन्ग फ्लैट का 1/10 वाँ हिस्सा है, यानी 0.1 और इसमें भी कोई रेखा नहीं होनी चाहिए।
- इकाई लॉन्ग का 1/10 वाँ हिस्सा हैं, अर्थात फ्लैट का 1/100 वाँ हिस्सा है, यानी 0.01।

हम कोई रेखा नहीं रखने की अनुशंसा करते हैं ताकि विद्यार्थी दशमलव FLU में बड़े वर्ग को 1 या पूर्ण के रूप में देख सकें। यदि इसमें रेखाएँ होंगी, तो विद्यार्थी गिनने लगेंगे और यह 1 रहने की बजाय 100 हो जाएगी। चूँकि जब विद्यार्थी दशमलव के साथ काम करना शुरू करेंगे तब उनकी उम्र अधिक रहेगी, इसलिए वास्तविक मैनिप्यूलेटिव्स साधनों की आवश्यकता कम होगी और ज़्यादा ध्यान चौखाना काग़ज़ पर चित्र बनाने को लेकर होना चाहिए। यह काम, चौखाना नोटबुक और बाद में सेंटीमीटर ग्राफ़ पेपर पर किया जा सकता है :

- 10 सेमी × 10 सेमी का वर्ग 1 माना जाएगा।
- 10 सेमी × 1 सेमी का आयत 0.1 माना जाएगा।
- 1 सेमी × 1 सेमी का वर्ग और 10 सेमी × 1 मिमी का आयत 0.01 माना जाएगा। बाद वाला चित्र 0.34 × 0.27 जैसे दशमलव गुणन में बहुत उपयोगी है।
- 1 सेमी × 1 मिमी आयत 0.001 माना जाएगा।
- 1 मिमी × 1 मिमी वर्ग 0.0001 माना जाएगा।

जोड़ और घटाव लगभग पहले जैसे ही हैं। गुणन भी काफ़ी हद तक पूर्ण संख्या के समकक्ष उदाहरण से काफ़ी मिलता जुलता है।

चित्र-9 ग्राफ़ पेपर पर 0.14 × 0.12 को दर्शाता है, जो 14 × 12 के समान ही है।



चित्र-9

FLU बीजगणितीय टाइलों को आधार के रूप में सामान्यीकृत भी करता है, अर्थात 10 को चर x द्वारा बदल दिया जाता है। हम बीजगणितीय टाइलों पर आगे के अंक में चर्चा करेंगे। लेकिन यहाँ यह उल्लेख करना आवश्यक है कि प्रक्रियाएँ, विशेषकर गुणन और भाग के सन्दर्भ में, समान ही हैं!

यह उल्लेखनीय है कि अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की अनुपमा एस. एम. ने सामान्य FLU को 1000 तक बढ़ाया है।

References

1. How to make FLU (including a thousand): https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/matherials#h.r8y4lfrj399c
2. Addition-subtraction with FLU (ppt): https://drive.google.com/file/d/1ALzKVaLe3cZfvZxsG38ObpHh55ChGLY7/view
3. Multiplication with FLU (ppt): https://drive.google.com/file/d/1G1LY8Btc1lsF5zuYpnFTQPBpFtDKlASg/view
4. Division with FLU (ppt): https://drive.google.com/file/d/17HS5ygXG-3aWrhmv3WZPskLZMHZ_sJri/view
5. Sikkim math textbook, Class 3: https://www.scertsikkim.ac.in/_files/ugd/05f8ad_d72c9029dc8f438cbcfb0026ff982a62.pdf
6. Chand, Amit: How the Square Root Algorithm Works, At Right Angles, Mar 2021 http://publications.azimpremjifoundation.org/2655/1/4_How%20the%20Square%20Root%20Algorithm%20works.pdf
7. Mathigon Polypad: https://mathigon.org/polypad#numbers

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में एक गणित प्रयोगशाला है जो विद्यालयों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा में कार्य कर रहे ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों की ज़रूरतों को पूरा करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सामग्री [mat(h)erials] और साथ-साथ कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना की खोज करती है जिन्हें कबाड़ से बनाया जा सकता है। यह गणित को दो तरह से सम्बोधित करने का प्रयास करती है, उनके लिए जो गणित से डरते हैं या नफ़रत करते हैं और उनके लिए भी जो इससे जुड़ना पसन्द करते हैं। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ बातचीत के माध्यम से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से mathspace@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

लेख आमंत्रित हैं...

एट राइट एंगल्स भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षकों के प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रैक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होना चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा, 2023 (NCF-SE 2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE 2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को प्रशिक्षण और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीक़ों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोज़मर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषय गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।
- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचर्स लर्निंग मैटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली ग़लतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या–समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठयपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरें (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क़िस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

लेखों को स्वीकार करने की नीति

एट राइट एंगल्स प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णत: केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का कानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

एट राइट एंगल्स पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक ***एट राइट एंगल्स*** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे ***एट राइट एंगल्स*** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

एट राइट एंगल्स में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से विश्वविद्यालय की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता
कॉपी एडिटर : अनुज उपाध्याय

लेखकों के लिए विशेष दिशा-निर्देश

अगर आप ***एट राइट एंगल्स*** के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

1. **रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ़ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ़ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मज़ेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक क़िस्सा हो सकता है। ख़ासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
2. **लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
3. **शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज़ करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीक़े से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
4. **सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
5. **सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ़ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
6. **दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
7. **संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
8. **अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
9. **उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आएँ हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फ़ुटनोट से बचें। यदि फ़ुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
10. **संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
11. **चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ईमेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीचीं गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
12. **चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज़ करें।
13. **लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिज्योलूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज़्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
14. **ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
15. आप अपने लेख **हिन्दी** में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अँग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
16. **लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTex में लिखकर ही भेजें।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

मुद्रक तथा प्रकाशक शरद सुरे, रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1, एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

एवं अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस

Azim Premji University

PG Diploma Programmes in Education

Join our PG Diploma programmes in Education as they:

- Are based on the recommendations of NEP 2020.
- Are offered in the blended mode of online and on-campus components.
- Provide flexibility for joining the complete programme or individual Certificate Programmes.

Enrol in:

- Early Childhood Education
- Inclusive Education
- Teaching Children with Learning Disabilities

APPLY NOW

Bengaluru

To know more, visit https://azimpremjiuniversity.edu.in/study-diploma

At Right Angles

A Resource for School Mathematics

गुणन में महारत

पद्मप्रिया शिराली

Azim Premji University

A publication of Azim Premji University

गुणन में महारत

हम कब यह कह सकते हैं कि किसी विद्यार्थी ने किसी अमुक अवधारणा में अच्छी-ख़ासी महारत हासिल कर ली है? किसी याद की हुई प्रक्रिया या अभ्यास की गई कलन विधि को दोहराना ज़रूरी नहीं है कि वह प्रवीण होने का संकेत हो। हमें ऐसी स्थितियों और सन्दर्भों में किसी अवधारणा को लागू करने की क्षमता को पहचानना होता है जहाँ वह अवधारणा अप्रत्यक्ष रूप से अन्तर्निहित हो।

यहाँ कुछ ऐसी स्थितियाँ और प्रश्न दिए गए हैं (जो किसी क्रम में नहीं हैं) जिन्हें विद्यार्थियों के सामने रखकर उनकी गुणन की प्रक्रिया का उपयोग करने की समझ को आँका जा सकता है। इनमें से कुछ में विशुद्ध तर्क शामिल है, जबकि अन्य में पैटर्न पहचानना, सम्बन्धों को समझना, गुणन करने के लघु तरीक़े, गिनना आदि शामिल हैं।

वे प्रश्न जिनमें तर्क शामिल होता है, उनमें अवधारणा की एक गहरी समझ की ज़रूरत होती है, ताकि उनमें शामिल अमूर्त संख्याओं और संक्रियाओं के साथ लचीले ढंग से काम किया जा सके। ये प्रश्न सन्दर्भ पर निर्भर होते हैं और इन्हें सूत्रों में नहीं बदला जा सकता।

वे प्रश्न जिनमें गुणन की प्रक्रिया के द्वारा निर्मित पैटर्न और सम्बन्धों की पड़ताल करनी होती है, वे गुणन करने के लघु तरीक़ों को विकसित करने में मदद करते हैं। वे विभिन्न मानसिक रणनीतियाँ विकसित करने में मदद करते हैं। गुणन के लघु तरीक़ों को ऐसी मानसिक गणना में इस्तेमाल किया जाता है जो रोज़मर्रा के जीवन का हिस्सा होती हैं।

ऐसा प्रश्न जिसमें गिनना शामिल होता है उसे या तो वास्तविक प्रतिरूपों (मॉडल) या फिर चित्रों के माध्यम से प्रस्तुत किया जा सकता है। इन प्रतिरूपों को देखने की कोई मानक विधियाँ नहीं हैं और ये प्रत्येक विद्यार्थी की कल्पना की क्षमता को सामने लाते हैं।

इस बात को दिमाग़ में रखना ज़रूरी है कि इन गतिविधियों का उद्देश्य प्रश्नों को हल करना नहीं बल्कि अलग-अलग रणनीतियों को खोजने की जिज्ञासा और इच्छा को विकसित करना है।

विद्यार्थी प्रश्न की स्थिति को समझने में मदद हासिल करने के लिए वस्तुओं और चित्रों का उपयोग कर सकते हैं।

हमारा सुझाव है कि शुरुआत में ये सारे प्रश्न विद्यार्थियों द्वारा स्वतंत्र रूप से काम करते हुए हल किए जाएँ। इसके बाद विद्यार्थियों के बीच इन प्रश्नों को हल करने के लिए इस्तेमाल किए गए विभिन्न तरीक़ों पर चर्चाएँ हो सकती हैं। इससे उनका उन विभिन्न तरीक़ों से परिचय होता है जिनसे किसी प्रश्न को देखा जा सकता है और उसे हल करने की तरफ़ बढ़ा जा सकता है। विद्यार्थियों को दूसरों द्वारा आज़माई गई रणनीतियाँ भी अपनाकर देखने दें।

इस प्रक्रिया में शिक्षक के लिए एक महत्त्वपूर्ण सीख है कि वे गणनाओं के प्रकारों के साथ विद्यार्थियों की सहजता के स्तर से अवगत हों। इससे शिक्षकों को विद्यार्थियों के सोचने के तरीक़ों और तर्क से अवगत होने का मौक़ा भी मिलता है।

ज़रूरी बात : ये सभी गतिविधियाँ यह मानकर बनाई गई हैं कि विद्यार्थियों ने गुणज, गुणनखण्ड और अभाज्य गुणनखण्डन का बुनियादी ज्ञान हासिल कर लिया है। इसलिए इनका उपयोग पाँचवीं और छठवीं कक्षा के स्तर पर किया जा सकता है।

की-वर्ड : *गुणन, पैटर्न की पहचान, रणनीति बनाना, अवधारणात्मक समझ*

प्रश्न-1

उद्देश्य : तार्किक विवेचन

सामग्री : फ़्लैश कार्ड

अगर $6 \times 10 = 60$ होता है, तो 12×5 कितना होगा?

$6 \times 10 = 60$
$12 \times 5 = ?$

हो सकता है विद्यार्थी 12×5 के गणितीय तथ्य जानते हों और देख सकें कि उत्तर समान होगा।

क्या वे इन दो जोड़ों, यानी 6×10 और 12×5, के बीच के सम्बन्ध को देख पाते हैं?

क्या वे इस बात को समझा पाते हैं कि गुणनफल एक जैसा कैसे आता है?

एक गुणनखण्ड को आधा करने और दूसरे को दोगुना करने से क्या प्रभाव पड़ता है?

जाँच करने के लिए उनसे और ऐसे जोड़े बनाने के लिए कहा सकता है।

क्या विद्यार्थी गुणनखण्डों का एक और ऐसा जोड़ा बना सकते हैं जो 6×10 से मेल खाता हो?

30×2 ऐसा ही एक जोड़ा है। यह 6×10 से किस प्रकार मेल खाता है?

क्या विद्यार्थी इस बात को देख पाते हैं कि 2, 10 का *पाँचवाँ* हिस्सा है और 30, 6 का *पाँच गुना* है?

अच्छा है यदि विद्यार्थी इस बात पर ध्यान देते हैं कि ये स्थितियाँ संरचनात्मक रूप से समान हैं। पहले उदाहरण में, गुणनखण्ड दोगुने और आधे हो गए। दूसरे उदाहरण में एक गुणनखण्ड 5 गुना हो गया जबकि दूसरा पाँचवाँ हिस्सा रह गया।

अगर $100 \times 9 = 900$, तो 25×36 क्या होगा?

$100 \times 9 = 900$
$25 \times 36 = ?$

ये दो जोड़े किस प्रकार सम्बन्धित हैं?

क्या विद्यार्थी गुणनखण्डों के ऐसे अन्य जोड़े बना सकते हैं जो 25×36 से मेल खाते हों?
इन प्रश्नों को हल करने के लिए विद्यार्थी क्या रणनीतियाँ इस्तेमाल करते हैं?

क्या विद्यार्थी इस सिद्धान्त को दर्शाने के लिए और उदाहरण रच सकते हैं?

इस प्रश्न में और आगे आने वाले प्रश्नों में हम गुणनखण्डों, गुणजों और अभाज्य गुणनखण्डन के बीच की कड़ी को देख सकते हैं।

प्रश्न-2

उद्देश्य : गुणन की दोगुना करने और आधा करने की रणनीति को जानने के लिए क्रम-विन्यासों के माध्यम से पड़ताल करना।

सामग्री : खूँटी बोर्ड या बिन्दु शीट

यहाँ एक दृश्य दिया गया है कि किस प्रकार 4 पंक्तियों और 3 स्तम्भों को पुनर्व्यवस्थित करके 2 पंक्ति व 6 स्तम्भ बना दिए जाते हैं।

चित्र-1

फिर विद्यार्थियों से 8 × 6 कैसा दिखता है इसे दर्शाने के लिए एक क्रम विन्यास बनाने के लिए कहा जा सकता है।

उन्हें खूँटियों को अन्य सम्भव आयताकार क्रम विन्यासों में पुनर्व्यवस्थित करने को कहें। अन्य जोड़े किस प्रकार मूल जोड़े, यानी 8 × 6 से मेल खाते हैं?

2 × 24 (2, 8 का एक-चौथाई है और 24, 6 का चार गुना है)

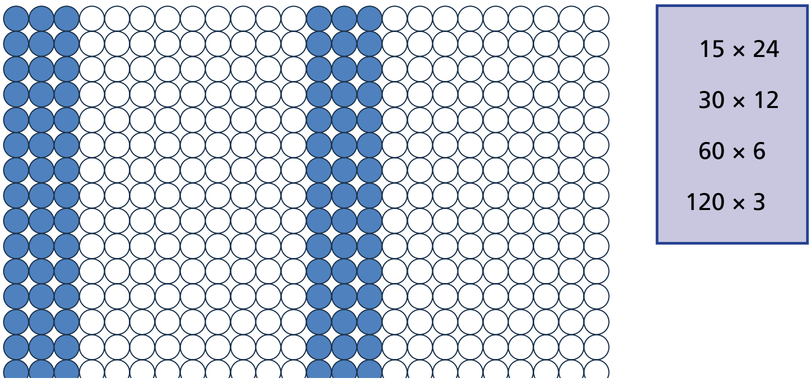
3 × 16 (3, 6 का आधा है और 16, 8 का दोगुना)

4 × 12 (4, 8 का आधा है और 12, 6 का दोगुना)

विद्यार्थी क्या देखते हैं और क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

3 × 16 और 4 × 12, दोनों ही विन्यासों में, एक गुणनखण्ड को आधा करके और दूसरे को दोगुना करके विन्यास को पुनर्व्यवस्थित किया गया है।

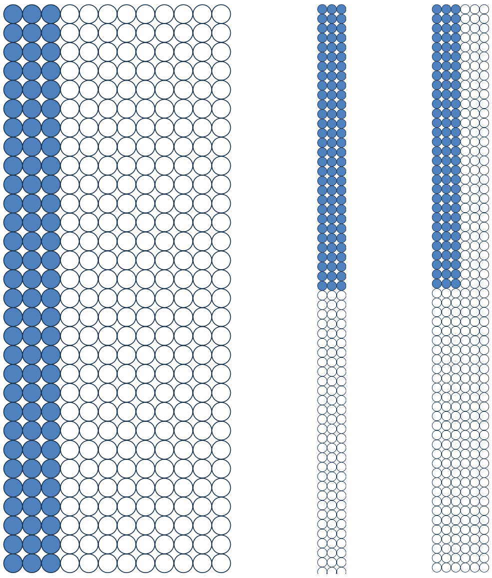
आधा करने और दोगुना करने की रणनीति में एक गुणनखण्ड को आधा करना और दूसरे को दोगुना करना शामिल होता है। उदाहरण के लिए, 15 × 24 के लिए हम 15 को दोगुना करके 30 कर सकते हैं और 24 को आधा करके 12।



चित्र-2

यह प्रक्रिया गुणन के आसान हो जाने तक जारी रह सकती है। 30 को दोगुना करके 60 किया जा सकता है और 12 को आधा करके 6।

60 × 6 करना आसान है, यानी 360।



चित्र-3

चर्चा करें कि किस प्रकार यह प्रक्रिया गुणन में सहायक होती है। विद्यार्थियों को कुछ और प्रश्नों में इस विधि का उपयोग करने को कहें ताकि वे इसकी प्रभावकारिता को देख सकें।

किन प्रश्नों के लिए दोगुना करने और आधा करने का तरीक़ा अच्छे ढंग से काम करता है?

उन्हें ऐसे ही और विन्यासों के साथ प्रयोग करने को कहें जैसे कि 6 पंक्तियाँ, 7 स्तम्भ आदि। (जहाँ पंक्तियों की संख्या सम हो और स्तम्भों की विषम।)

क्या यह 11×13 के लिए ठीक काम करेगा? यह इस प्रश्न के लिए सही काम क्यों नहीं करेगा?

क्या यह तब काम करेगा जब दो में से एक संख्या सम हो?

विद्यार्थियों को कुछ प्रश्न तैयार करने को कहें जहाँ ऐसी विधि प्रश्न को हल करना आसान कर देती है।

यह एक और प्रश्न है जहाँ 5 के द्वारा गुणनखण्डन प्रश्न को सरल कर देता है।

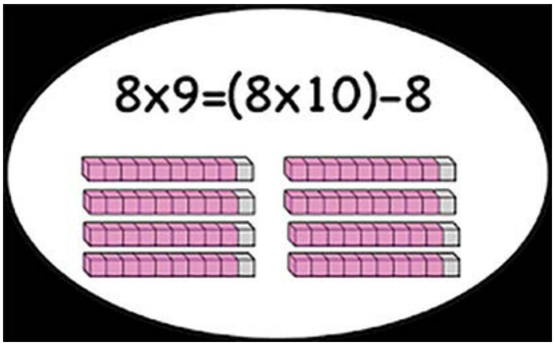
जैसे $375 \times 28 = 75 \times 140 = 15 \times 700$ आदि।

प्रश्न-3

उद्देश्य : साहचर्य, वितरणात्मकता आदि की अवधारणा, नियमों की समझ को लागू करना।

प्रश्न-3.1

यहाँ 8×9 का एक दृश्यात्मक निरूपण दिया गया है।



चित्र-4

विद्यार्थी किस प्रकार इस विधि में फेरबदल करके 18×9 या 98×9 की गणना कर सकते हैं?

प्रश्न-3.2

क्या विद्यार्थी वितरणात्मक नियम की अपनी समझ का इस्तेमाल करते हुए जल्दी से गणना कर पाते हैं? 53, 50 से 3 ज़्यादा है। उन्हें दिए गए गुणनफल में 9×3, यानी 27 जोड़ना है।

$9 \times 53 = 9 \times 50 + 9 \times 3$

विद्यार्थी की रणनीति का चुनाव संख्या तथ्यों के साथ उनके कौशल पर निर्भर करता है। रणनीतियों में बदलाव होना निश्चित है।

प्रश्न-3.3

$7 \times 8 = (5 + 2) \times 8,$

$6 \times 7 = (5 + 1) \times 7,$

$9 \times 7 = (10 - 1) \times 7,$

$8 \times 6 = (10 - 2) \times 6$

प्रश्न-3.4

साहचर्य के गुणधर्म का उपयोग

$8 \times 9 \times 10 \times 11 \times 12$

इस प्रश्न को हल करने के लिए विद्यार्थी कौन-सी रणनीतियाँ अपनाएँगे?

क्या वे इन संख्याओं को $8 \times 12 \times 9 \times 11 \times 10$ के रूप में पुनर्व्यवस्थित करेंगे?

$8 \times 12 = 96$ और $9 \times 11 = 99$

अब यह सवाल $96 \times 99 \times 10$ बन गया है

99 से गुणा करने को $(100 – 1)$ से गुणा करने के रूप में देखा जा सकता है।

$(96 \times 100 – 96 \times 1) \times 10$

$(9600 – 96) \times 10$

$9504 \times 10 = 95040$

प्रश्न-3.5

यहाँ साहचर्य गुणधर्म का इस्तेमाल किया जा रहा है।

$11 \times 12 = 132$ $66 \times 12 = ?$

प्रश्न-3.6

$600 \times 15 = 9000$ $600 \times 45 = ?$

प्रश्न-3.7

विद्यार्थी इन दो प्रश्नों को हल करने के लिए क्या सोचेंगे? इस्तेमाल की गई रणनीतियों की चर्चा करें।

128×8 क्या होगा?

26×17 क्या होगा?

इन दो प्रश्नों के लिए रणनीतियाँ भिन्न हो सकती हैं।

128×8 जैसे प्रश्न को अलग-अलग ढंग से हल करने का प्रयास किया जा सकता है।

$128 \times 8 = 256 \times 4 = 512 \times 2 = 1024 \times 1$

या

$128 \times 8 = 128 \times (10 - 2) = 1280 - 256 = 1024$

विद्यार्थियों से कहें कि वे इसी तरह के और प्रश्न बनाएँ और उन्हें एक-दूसरे के सामने रखें। उन्हें अपने उत्तरों को एक-दूसरे को समझाने के लिए प्रोत्साहित करें।

प्रश्न-4

उद्देश्य : किसी प्रश्न को तार्किक ढंग से हल करना।

ऐसे प्रश्न सामने रखना जिन्हें हल करने के लिए विवेचन की ज़रूरत हो।

प्रश्न-4.1

दो पास-पास रखे डिब्बे एक दो अंकों वाली संख्या को निरूपित करेंगे। क्या विद्यार्थियों ने स्थानीय मान की अपनी समझ का इस्तेमाल किया है? क्या उन्हें इस सवाल के एक से अधिक उत्तर मिलते हैं?

अंक 3, 4 और 5 को इस तरह रखें कि गुणनफल अधिक-से-अधिक हो सके।

$\square\square \times \square =$

प्रश्न-4.2

किस तरह से ये सवाल एक-दूसरे के समान हैं और किस तरह से एक-दूसरे से अलग?

मज़ेदार सवाल : एक अंक वाली दस संख्याओं का गुणनफल क्या होगा?

अगर $4 \times 6 = 24$ है तो $4 \times 600 = ?$ कितना होगा

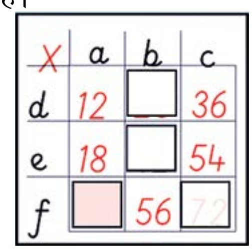
$400 \times 6 = ?$

$40 \times 60 = ?$

$4000 \times 0.6 = ?$

प्रश्न-4.3

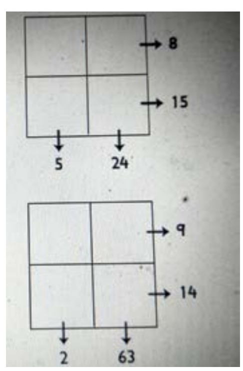
यहाँ गुणनफल का एक और प्रश्न दिया जा रहा है जिसमें अक्षरों a, b, c, ... को संख्याओं से बदलने में तर्क का उपयोग करना है। प्रत्येक अक्षर एक-एक अंक वाली संख्या को निरूपित करता है।



चित्र-5

क्या इस प्रश्न का एक ही हल है या एक से ज़्यादा हल हैं?

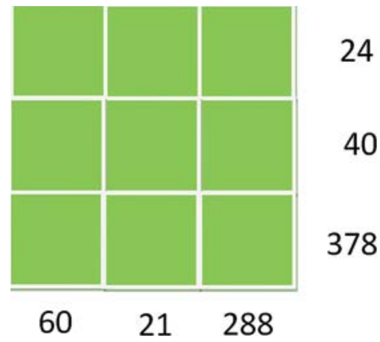
प्रश्न-4.4



चित्र-6

एक बढ़िया सवाल जहाँ गुणनफल दिए हुए हैं और खानों को सही संख्याओं से भरना है ताकि सही गुणनफल आ सकें (जो दाईं तरफ़ और नीचे दिए गए हैं)।

प्रश्न-4.5



चित्र-7

इस लिंक पर NRICH का एक और बढ़िया सवाल पढ़ सकते हैं। (https://nrich.maths.org/11750)

मुझे यह बात अच्छी लगती है कि इसका उत्तर तर्क के आधार पर निकाला जा सकता है और इसमें बार-बार ग़लती कर उत्तर तक पहुँचने जैसी सम्भावना न के बराबर है। यह गुणनखण्डों और गुणजों के गुणधर्मों की समझ को सुदृढ़ बनाने का अच्छा तरीक़ा है।

दिए गए गुणनफलों को हासिल करने के लिए खानों में 1 से 9 तक की सभी संख्याओं का इस्तेमाल करें।

प्रश्न-5

उद्देश्य : नए सम्बन्धों को खोजना।

विद्यार्थियों से संख्याओं की एक शृंखला के भीतर गुणात्मक सम्बन्धों में पैटर्नों की खोज करने को कहें।

6, 7, 8, 9, 10, 11, 12

8×10 का 9×9 से क्या सम्बन्ध है? (ध्यान दें कि 8 और 10 का 9 से 1 अंक का फ़ासला है।)

$8 \times 10 = 80$ जो कि 81 से 1 कम है।

7×11 का 9×9 से क्या सम्बन्ध है? (ध्यान दें कि 7 और 11 का 9 से 2 अंकों का फ़ासला है।)

$7 \times 11 = 77$ जो कि 81 से 4 कम है।

6×12 का 9×9 से क्या सम्बन्ध है? (ध्यान दें कि 6 और 12 का 9 से 3 अंकों का फ़ासला है।)

$6 \times 12 = 72$ जो कि 81 से 9 कम है।

इस सम्बन्ध की खोज को बाद में $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ के साथ जोड़ा जा सकता है।

क्या विद्यार्थी अनुमान लगा सकते हैं कि 5×13, 81 से किस प्रकार सम्बन्धित है?

वे कौन-से दूसरे अवलोकन कर सकते हैं?

हम देखते हैं कि ऐसी संख्याओं के जोड़े जो एक-दूसरे के ज़्यादा नज़दीक होती हैं, उनका गुणनफल अधिक होता है।

अब क्या विद्यार्थी इस तथ्य का उपयोग करके कि $45 \times 45 = 2025$ होता है, यह पता लगा सकते हैं कि 41×49 कितना होता है?

$45 \times 45 = 2025$

$41 \times 49 = ?$

क्या वे समझा सकते हैं कि यह कैसे किया जा सकता है और गुणनफल का पता लगा सकते हैं?

हम और प्रश्न सामने रखकर इस खोज में इज़ाफ़ा कर सकते हैं।

197 x 197 क्या होगा?

क्या विद्यार्थी इस स्थिति में सन्निकटन का उपयोग कर सकते हैं? 200, 197 से 3 अधिक है। विद्यार्थी इस सवाल को 200 × 194 में बदल सकते हैं (दोनों तरफ़ 3 कम-ज़्यादा करके) जिसका उत्तर होगा 38,800। अब वे 3 × 3 = 9 को इस संख्या में जोड़कर उत्तर प्राप्त कर सकते हैं जो होगा 38,809।

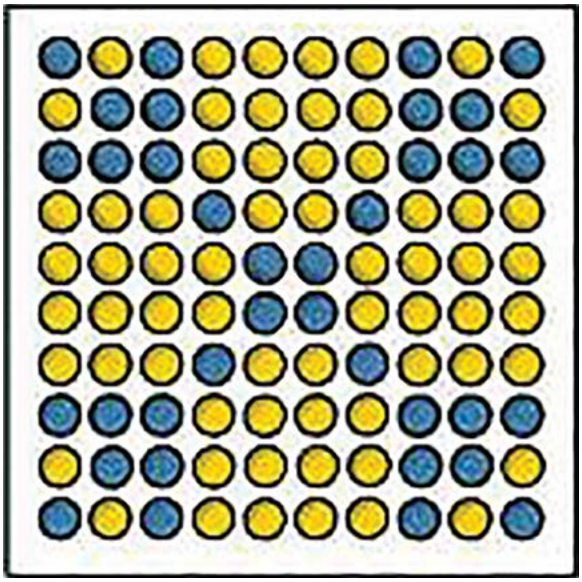
विद्यार्थियों को अन्य नतीजों के साथ काम करते हुए एक-दूसरे के समक्ष प्रश्न रखने को कहें।

प्रश्न-6

उद्देश्य : सन्दर्भों में गुणन

प्रश्न-6.1

कितने पीले गोले हैं?



चित्र-8

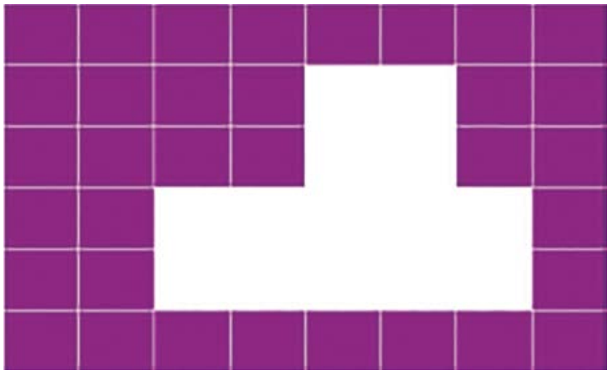
प्रश्न-6.2

कितने हरे वर्ग हैं?

चित्र-9

प्रश्न-6.3

कितने बैंगनी आयत हैं?

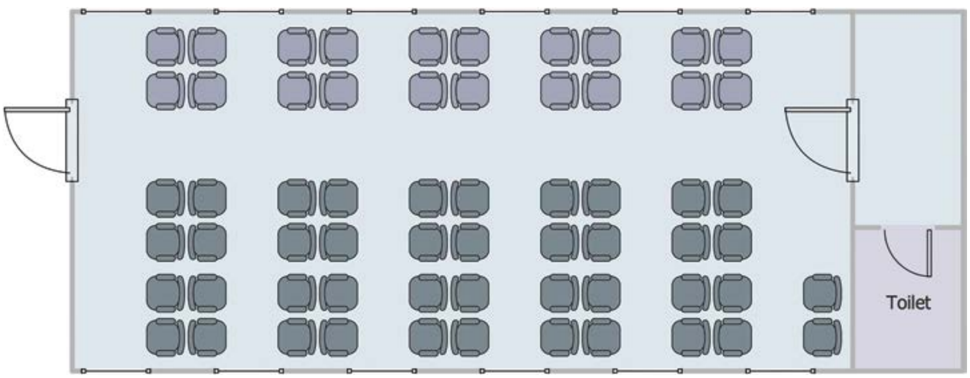


चित्र-10

क्षेत्रफल के प्रश्नों के साथ इन प्रश्नों के रिश्ते पर ध्यान दें।

प्रश्न-6.4

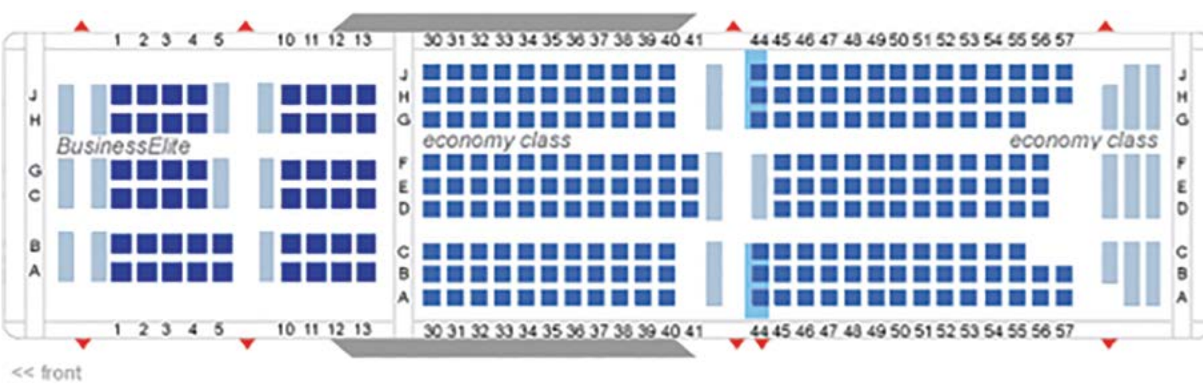
इस ट्रेन में कितनी सीटें हैं?



चित्र-11

प्रश्न-6.5

इस फ्लाइट में कितनी सीटें हैं?



चित्र-12

प्रश्न-7 + पैगबोर्ड विन्यास

उद्देश्य : पैटर्नों में गुणन की अवधारणा का इस्तेमाल

यहाँ पैगबोर्ड (खूँटियों का बोर्ड) के कुछ विन्यास दिए गए हैं जिन्हें बच्चे बना सकते हैं और गिनने के लिए उनका उपयोग कर सकते हैं।

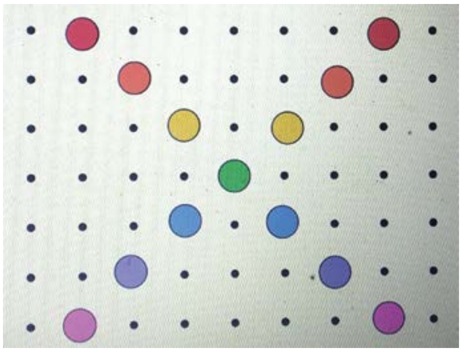
हर समूह में कितनी खूँटियों का उपयोग किया गया है?

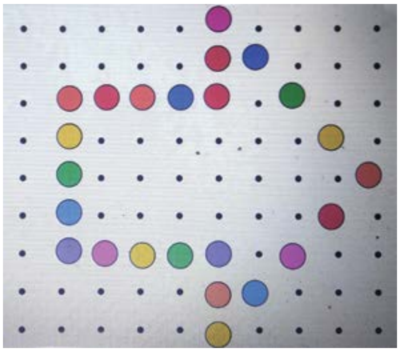
शिक्षकों को विद्यार्थियों को अपनी अलग-अलग विधियों को सबसे साझा करने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए।

प्रश्नों को क्षेत्रफल से जोड़ा जा सकता है।

यहाँ दो पैटर्न दिए गए हैं जिनमें रंग को भी रणनीति के हिस्से के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है।

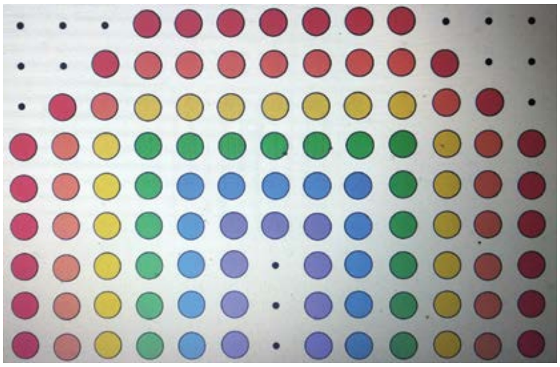
प्रश्न-7.1





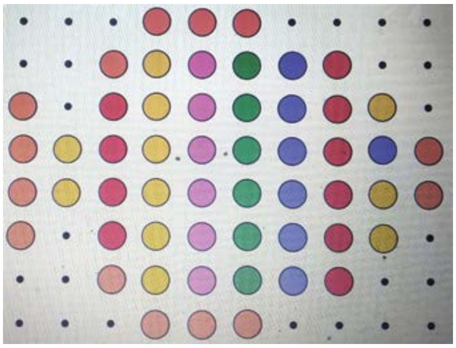
चित्र-13

प्रश्न-7.2



चित्र-14

प्रश्न-7.3



चित्र-15

प्रश्न-8 : रंगोली बिन्दु और गुणन

उद्देश्य : गणना में गुणन की अवधारणा का उपयोग

यहाँ रंगोली की डिज़ाइन बनाने के लिए बिन्दुओं का एक समूह तैयार किया गया है।

कलाकार ने कितने बिन्दुओं का प्रयोग किया है?

विद्यार्थी गणना के लिए किन रणनीतियों का इस्तेमाल करते हैं?

हर एक विद्यार्थी अपना-अपना हल ढूँढ़े और अपनी रणनीतियों को सबसे साझा करे।

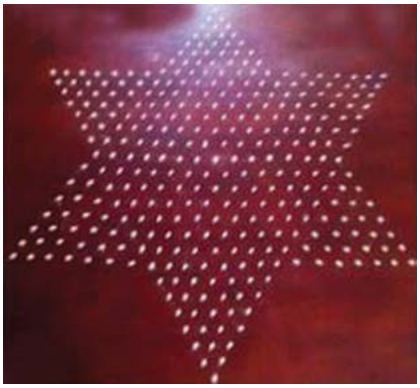
क्या एक रणनीति एक-एक त्रिभुज और बीच वाले षटकोणीय आकार को अलग-अलग गिनने की हो सकती है? हर एक त्रिभुज के लिए गिनती कैसे होगी?

क्या जोड़ के लिए 1, 2, 3, ... 7 के पैटर्न को अपनाया जाएगा?

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 के योग में कौन-कौन से गुणन प्रयोग किए जाते हैं?

(1 + 7) + (2 + 6) + (3 + 5) + 4। तीन 8 हैं और एक 4। 24 + 4 = 28

28-28 बिन्दु वाले 6 त्रिभुज हैं। यानी सारे त्रिभुजों में मिलाकर 168 बिन्दु हैं।



चित्र-16

क्या आधी आकृति के बिन्दुओं की संख्या जानने के लिए षटकोण को विकर्ण 15, 14, 13, … 8 से शुरू करके गिना जाएगा?

15 + 14 + 13 + 12 + 11 + 10 + 9 + 8 = (15 + 8) +

(14 + 9) + (13 + 10) + (12 + 11) यानी चार 23। यानी कि आधी आकृति में 92 बिन्दु।

तो पूरे षटकोण में 184 बिन्दु हैं।

कुल मिलाकर इस पूरी डिज़ाइन में 184 + 168 = 352 बिन्दु हैं!

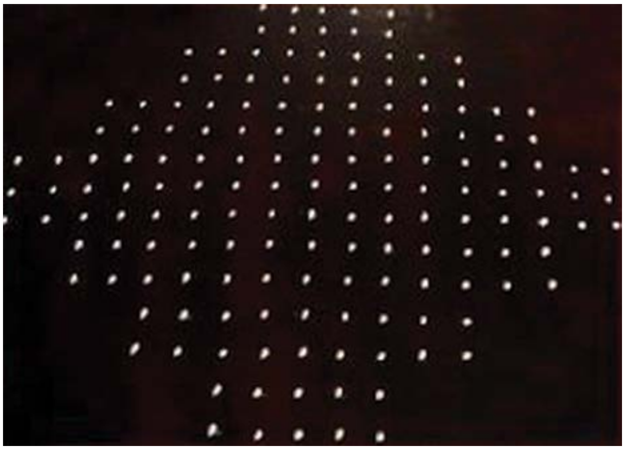
एक दूसरी रणनीति हो सकती है कि आकृति की सममिति का इस्तेमाल करते हुए आधे बिन्दुओं की संख्या का पता लगाया जाए। बिन्दु 22, 21, 20, … से कम होते-होते 15 तक आ रहे हैं और शीर्ष पर त्रिभुज की आकृति है।

क्या बिन्दुओं को गिनने के और भी तरीक़े हैं?

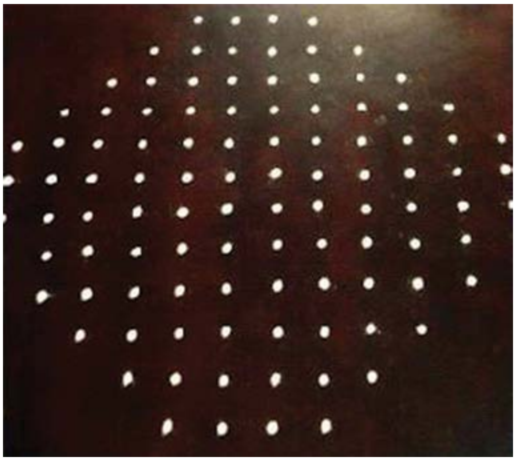
अगर आप को इस डिज़ाइन की कॉपी करना हो तो आप कैसे शुरुआत करेंगे?

अपनी रणनीतियों की चर्चा करें और मज़े के साथ डिज़ाइन बनाएँ!

यहाँ गिनने के लिए दो और डिज़ाइन दी गई हैं।



चित्र-17



चित्र-18

प्रश्न-9 : घनों वाली रचनाएँ और गुणन

उद्देश्य : गिनती करने में गुणन की अवधारणा का उपयोग

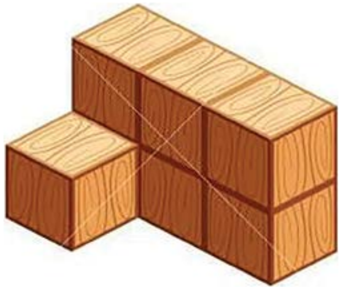
इस तरह के मूर्त मॉडल जोड़ो क्यूब के साथ या आभासी रूप से मैथीगॉन पॉलीपैड या https://toytheater.com/cube/ के माध्यम से बनाए जा सकते हैं।

विद्यार्थी घनों को गिनने की अपनी रणनीतियों को समझाने के लिए घन की सरल डिज़ाइन से शुरुआत करें।

कितने घन?

अधिकांश विद्यार्थी सम्भवतः इन्हें 6 + 1 यानी, (2 × 3 + 1) के रूप में गिनेंगे।

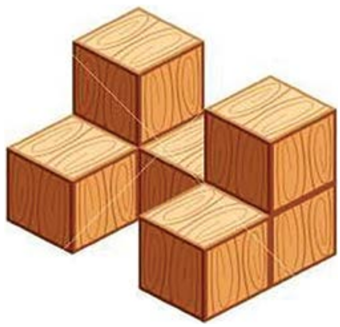
प्रश्न-9.1



चित्र-19

शिक्षक इस प्रश्न को आयतन के साथ जोड़ सकते हैं।

प्रश्न-9.2



चित्र-20

प्रश्न-9.3

चित्र-21

क्या इसे आड़े में बिछी तह-दर-तह गिना जाएगा या खड़ी फाँकों से गिना जाएगा?

प्रश्न-9.4

कितने घन?

वे इस प्रश्न का समाधान किस विधि से करेंगे?

क्या नदारद घनों को गिनकर उन्हें घनों की कुल संख्या में से घटाना आसान है?

चित्र-22

प्रश्न-9.5

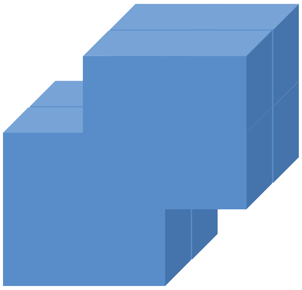
इस E आकार वाली रचना में कितने घन हैं?

चित्र-23

क्या विद्यार्थियों ने एक-एक करके गिनती की? या फिर उन्होंने तीन पंक्तियों को 4 घन वाली 3 पंक्तियों के रूप में देखा (3×4) जिसमें दो पंक्तियाँ ऐसी हैं जिनमें एक-एक घन अतिरिक्त है और इन्हें जोड़ने वाले 2 घन अतिरिक्त हैं?

प्रश्न-9.6

कितने घन?



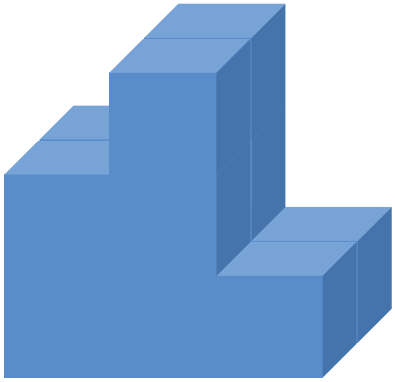
चित्र-24

चर्चा शुरू करने के लिए यह एक रोचक डिज़ाईन है।

कुछ विद्यार्थी इन्हें (2×2×2) आकार के 2 घनों के रूप में गिन सकते हैं जिनमें से एक के ऊपर एक चढ़े हिस्से को घटाना होगा। या फिर वे तह-दर-तह इन्हें गिनेंगे?

प्रश्न-9.7

कितने घन?

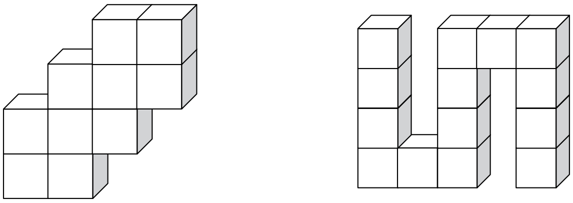


चित्र-25

एक बार फिर, इस्तेमाल की गई रणनीतियों की चर्चा करें।

यहाँ ऐसे ही कुछ और उदाहरण दिए गए हैं।

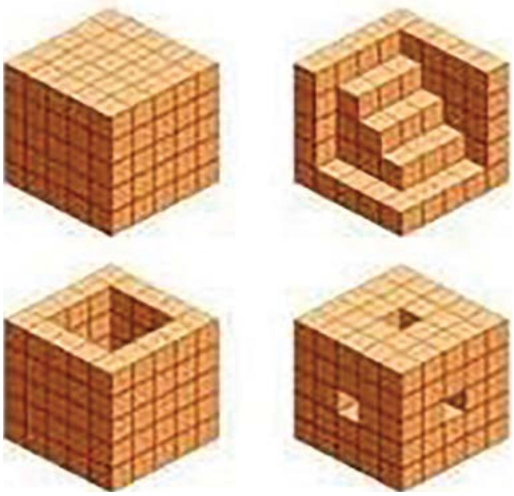
प्रश्न-9.8



चित्र-26

प्रश्न-9.9

विद्यार्थी इन डिज़ाइनों में घनों को गिनने के लिए कौन-सी विधियाँ अपनाएँगे?



चित्र-27

प्रश्न-10

उद्देश्य : दशमलव/ भिन्नात्मक संख्याओं के साथ गुणन में गुणनफल की भविष्यवाणी

कई विद्यार्थी अक्सर इस ग़लतफ़हमी को लिए चलते रहते हैं कि गुणन का नतीजा हमेशा एक ज़्यादा बड़ा गुणनफल होता है। उनकी समझ को जाँचने के लिए उनके समक्ष ऐसे प्रश्न रखें जिनमें उन्हें गणना करने की बजाय अनुमान लगाने की आवश्यकता हो।

23×0.2	23×2.4	543×0.62
65×0.7	864×1.2	98×0.65

क्या विद्यार्थी इस बात की भविष्यवाणी कर पाते हैं कि उत्तर कहाँ मौजूद हैं?

क्या उत्तर उस संख्या से कम होगा या अधिक? क्या वे अपनी सोच के कारणों को सामने रख सकते हैं?

प्रश्न-11

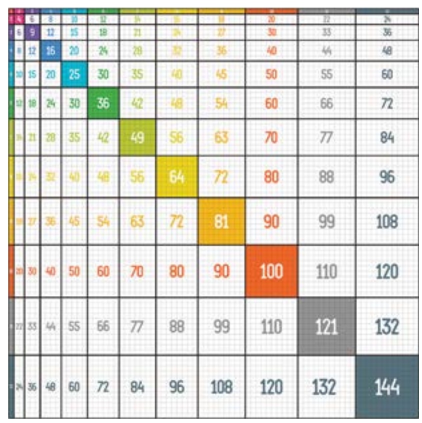
उद्देश्य : गुणनफलों के आकार की समझ

पैमाने पर बनाया गया एक गुणन जाल संख्याओं और गुणात्मक सम्बन्धों की कल्पना करने में विद्यार्थियों की अतिरिक्त मदद कर सकता है।

गुणन तालिका में आप कौन-से पैटर्न देख रहे हैं?

कौन-से आकार वर्ग हैं और कौन-से आयत?

क्या यह जाल यह देखने में मदद करता है कि 7×9, 8×8 से एक कम क्यों है? या 4×8, 6×6 से कम क्यों है?



चित्र-28

आभार :

https://www.stem.org.uk/resources/elibrary/resource/32124/multiplication

https://stevewyborney.com

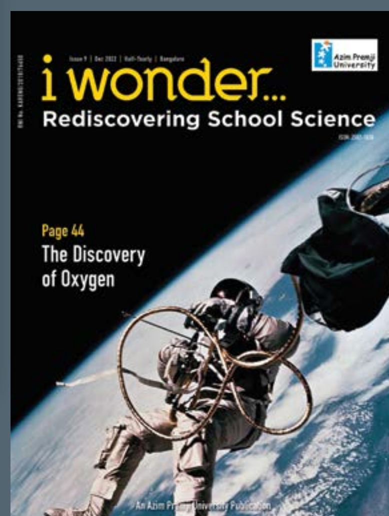
पद्मप्रिया शिराली

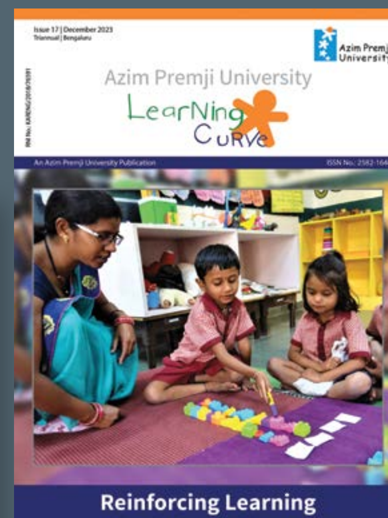
पद्मप्रिया शिराली सह्याद्री स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर का हिस्सा हैं, जहाँ वे 1983 से काम कर रही हैं और गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशंस, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषय पढ़ाती रही हैं। 1990 के दशक में, उन्होंने दिवंगत श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ जुड़कर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के 'स्कूल इन ए बॉक्स' नामक बहुकक्षा प्रारम्भिक शिक्षा कार्यक्रम को तैयार किया। वे वर्तमान में एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी एट राइट एंगल्स, मार्च 2024 में प्रकाशित Mastery of Multiplication का अनुवाद है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

Magazines of Azim Premji University





अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन, गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

इस पत्रिका में, शिक्षक :

- कक्षा में या अन्यत्र उपयोग के लिए संसाधनों तक पहुँच सकते हैं
- ऐसे गणितीय विषयों के बारे में भी पढ़ सकते हैं, जो सम्भवतः नियमित स्कूली पाठ्यक्रम में नहीं होते हैं
- अपने स्वयं के लिखे लेख भेज सकते हैं
- पत्रिका के माध्यम से अन्य लोगों के साथ बातचीत कर सकते हैं, और अपनी अनसुलझी समस्याओं को हल कर सकते हैं
- अपने मूल अवलोकन और खोजों को साझा कर सकते हैं
- स्कूल स्तर के गणित के विभिन्न पहलुओं के बारे में लिख सकते हैं और चर्चा कर सकते हैं।

प्रकाशक :

अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय

आप एट राइट एंगल्स यहाँ से प्राप्त कर सकते हैं :

निःशुल्क सदस्यता लें

https://azimpremjiuniversity.edu.in/at-right-angles

इस लिंक पर एट राइट एंगल्स के हाई-रेज और लो-रेज संस्करण निःशुल्क डाउनलोड के लिए उपलब्ध हैं। अलग-अलग लेख भी नीचे दी गई लिंक से डाउनलोड किए जा सकते हैं

https://bit.ly/AtRightAnglesrepositor

फेसबुक पर

https://www.facebook.com/groups/829467740417717/

AtRiUM (एट राइट एंगल्स, अस एंड मैथ) पत्रिका का फेसबुक पेज है।

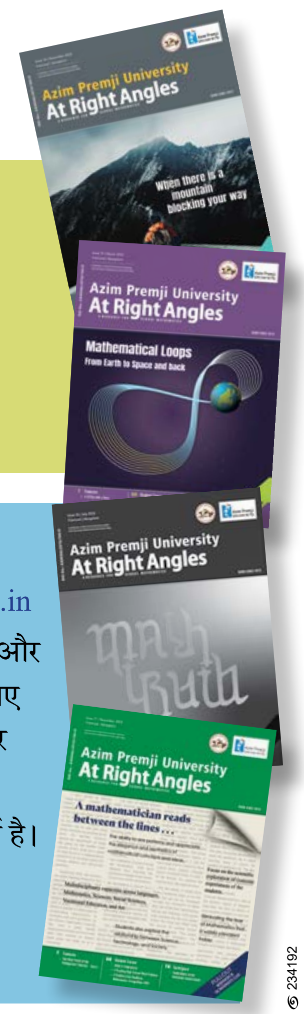
यह ई-स्पेस में हमारे पाठकों को जोड़ने के लिए एक मंच के रूप में कार्य करता है। शिक्षक, विद्यार्थी, शिक्षक-प्रशिक्षक, भाषाविद् और शिक्षाशास्त्र के विशेषज्ञ इस समुदाय का हिस्सा हैं, इस कारण से इसकी पोस्ट में विविधता है और चर्चाएँ भी गम्भीर और गहन होती हैं।

ई-मेल पर :

AtRightAngles.editor@apu.edu.in

हम इस ईमेल आईडी पर आपके लेखों और राय का स्वागत करते हैं। लेख भेजने लिए नीति और दिशा-निर्देश पत्रिका के अन्दर दिए गए हैं।

आपकी प्रतिक्रिया हमारे लिए महत्त्वपूर्ण है। हमें अवश्य लिखें।



Azim Premji University
Survey No. 66, Burugunte Village,
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura
Bengaluru – 562125

azimpremjiuniversity.edu.in

Facebook: /azimpremjiuniversity
Instagram: @azimpremjiuniv
X: @azimpremjiuniv

© 234192