

त्रिभुज

पद्मप्रिया शिराली



**Azim Premji
University**

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

त्रिभुज

रोज़मर्रा की ज़िन्दगी में सबसे ज़्यादा दिखाई देने वाली आकृतियाँ आयत और वृत्त होती हैं, लेकिन त्रिभुज कई प्रकार की संरचनाओं की मूल इकाई होते हैं।

प्रकृति में त्रिभुजों को अपने विशुद्ध रूप में शायद ही कभी देखा जाता हो, लेकिन वे हमारे भौतिक और आभासी जगत दोनों के लिए अत्यन्त महत्वपूर्ण हैं। वे गणितीय रूप से भी महत्वपूर्ण हैं। शायद यह त्रिकोणीय रूप की सादगी है जो जटिल रूपों के निर्माण में हमारी मदद करती है।

त्रिभुजों और उनके उपयोगों का ज्ञान प्राचीन काल में भी दूर-दूर तक फैला हुआ था। तारों की दूरी ज्ञात करने के लिए खगोलविदों द्वारा त्रिभुजों का उपयोग किया जाता है। पुल निर्माताओं, वास्तुकारों, नाविकों और सर्वेक्षकों द्वारा भी इनका उपयोग किया जाता है। आधुनिक समय में ग्लोबल पोजिशनिंग सिस्टम (जीपीएस) के उपकरणों में भी इनका उपयोग किया जाता है।

त्रिभुज बहुभुजों के समुच्चय की सबसे सरल आकृति है। तीन से अधिक भुजाओं वाले किसी भी उत्तल बहुभुज को त्रिभुजों में बाँटा जा सकता है। इसलिए, त्रिभुजों के मूल गुणधर्मों को समझने से ज़्यादा भुजाओं वाले बहुभुजों का गहन अध्ययन सम्भव हो पाता है।

बहुभुजों की दुनिया में त्रिभुज अलग दिखाई देते हैं, क्योंकि ये एकमात्र आकृतियाँ हैं जो बहुत कठोर (rigid) होती हैं; ये बहुत दबाव झेल सकती हैं और कभी आकृति नहीं बदलती हैं। त्रिभुज की यह विशेषता अद्वितीय है। इसी वजह से, यह त्रि-विमीय निर्माण कार्यों में उपयोग के लिए आदर्श हैं।

व्यावहारिक व क्रियाशील गतिविधियों एवं पड़ताल करने के मौकों को शामिल करके और विज्ञान के साथ एकीकरण करके— उदाहरण के लिए, किसी त्रिकोणीय संरचना की मजबूती की जाँच करने में — त्रिभुजों के अध्ययन को समृद्ध किया जा सकता है बाद के सालों में त्रिभुजों के जिन गुणधर्मों से बच्चों का सामना होगा उन्हें कागज़ मोड़ने की गतिविधियों और जियोजेब्रा के साथ खेल करते हुए औपचारिक शब्दावली और औपचारिक प्रमाणों का इस्तेमाल किए बिना खोजा जा सकता है। त्रिभुजों की समरूपता को आकार और अनुपात की सहज समझ के माध्यम से प्रस्तुत किया जा सकता है।

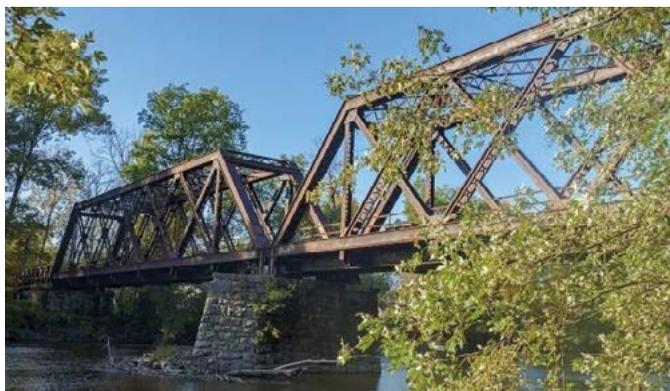
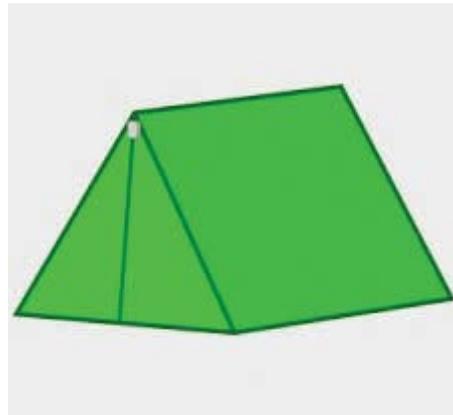
प्रयोग करने, अवलोकन करने और परिणामों को दर्ज करने के बाद चर्चा करने से सीखने की प्रक्रिया में वृद्धि होगी और वह समृद्ध होगी। इस विषय से परिचय कराने से पहले बच्चों के पास चाँदे और परकार को उपयोग करने का कौशल होना चाहिए। उन्हें विभिन्न प्रकार के कोणों और रैखिक सममिति का भी थोड़ा ज्ञान होना चाहिए।

अच्छा होगा कि इस विषय की शुरुआत त्रिभुजों पर चर्चा करके और



आकृतियों के बारे में विद्यार्थियों के अवलोकन और ज्ञान पर बात करके की जाए। चर्चा इस बात की ओर ध्यान आकर्षित कर सकती है कि त्रिभुज तीन भुजाओं वाली आकृति है। बच्चे उन सन्दर्भों और स्थानों के बारे में बात कर सकते हैं, जहाँ उन्हें त्रिभुज दिखाई देते हैं। वे इस बारे में सोचना शुरू कर सकते हैं कि पुल जैसी संरचनाओं में उन्हें त्रिभुज क्यों दिखाई देते हैं? उन्हें त्रिभुजों के बारे में क्या पसन्द है? किसी विषय में रुचि जगाना सीखने को प्रभावी और आनन्ददायी बना सकता है।

इसलिए शुरुआत में दी गई कुछ गतिविधियाँ बच्चों को त्रिभुजों की विशिष्टता का पता लगाने के लिए प्रेरित करती हैं।



गतिविधि 1

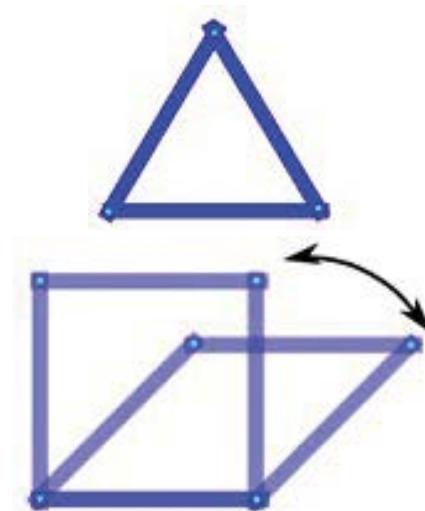
उद्देश्य : कठोरता के परीक्षण के लिए त्रिभुज और अन्य बहुभुजों की तुलना करना।

सामग्री : प्लास्टिक की नलियाँ, रबर ट्यूब

नलियों और रबर ट्यूब या स्टेपल पिनों से एक त्रिभुज का ढाँचा बनाएँ।

क्या हम नलियों को मोड़े बिना इसकी आकृति बदल सकते हैं? हम ऐसा नहीं कर सकते हैं। त्रिभुज एक कठोर आकृति है। नलियों और कनेक्टर से कोई भी एक चतुर्भुज (चार भुजाओं वाली आकृति) बनाएँ। क्या हम इसकी आकृति बदल सकते हैं? हाँ। हम नलियों को दबाकर और खींचकर ऐसा कर सकते हैं। इस आकृति में एक अतिरिक्त नली जोड़ें। इस प्रकार दो त्रिभुज बन जाएँगे। क्या अब आप इसकी आकृति बदल सकते हैं?

अब यही गतिविधि पाँच भुजाओं वाली एक आकृति के साथ करके देखें। इसे मज़बूत बनाने के लिए आपको कितनी और नलियों की ज़रूरत होगी?



गतिविधि 2

उद्देश्य : त्रिभुज की मज़बूती को दर्शाना

सामग्री : समान माप की 3 कार्ड शीट। एक कार्ड शीट को घनाभ, दूसरी को बेलन और तीसरी को त्रिकोणीय प्रिज्म की आकृति का रूप दिया जाना है।

बच्चे प्रत्येक आकृति की मज़बूती का आकलन उन किताबों की संख्या के आधार पर कर सकते हैं, जिन्हें प्रत्येक संरचना बिना ढहे सँभाल सकती है।

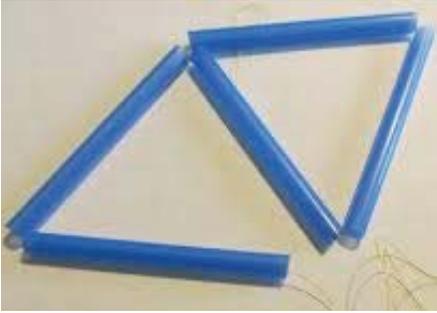
इसके बाद त्रिभुज की मज़बूती पर चर्चा करें। अपनी सममित आकृति के कारण समद्विबाहु त्रिभुज और समबाहु त्रिभुज दोनों विषमबाहु त्रिभुजों की तुलना में अधिक मज़बूत होते हैं।



गतिविधि 3

उद्देश्य : यह दिखाना कि त्रिभुज बनाने के लिए किन्हीं भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए।

सामग्री : विभिन्न लम्बाइयों (4, 6, 8, 10, 12 आदि) की 10 से 12 नलियाँ, सुतली वाला धागा या रबर ट्यूब



बच्चे समूहों में काम करें। प्रत्येक समूह बिना सोच-विचार किए कोई भी तीन नलियाँ ले ले और उन नलियों से त्रिभुज बनाने की कोशिश करे।

वे बोर्ड पर बनाई गई एक तालिका में अपने माप दर्ज करें और यह भी नोट करें कि वे उन मापों के साथ त्रिभुज बना पाए या नहीं।

क्या बच्चों के सभी समूह त्रिभुज बना पाए?

यदि आवश्यक हो, तो यह दर्शाने के लिए कि कुछ संयोजनों से त्रिभुज बनाना सम्भव नहीं है, शिक्षक उन नलियों को ले सकते हैं जो त्रिभुज नहीं बनाती हैं।

ऐसा क्यों है कि कुछ खास लम्बाइयों वाली नलियों के संयोजनों से हम त्रिभुज नहीं बना पाते हैं?

बच्चे त्रिभुजों की माप के लिए एक तालिका बना सकते हैं और

उसका अध्ययन कर सकते हैं।

तीसरी भुजा के साथ दो भुजाओं के योग के सम्बन्ध का पता लगाने के लिए :

AB	BC	AC	AB + BC	AB + AC	BC + AC

AB + BC की AC के साथ तुलना कैसे की जाती है? इसी तरह से भुजाओं की अन्य जोड़ियों की तुलना करें।

क्या कोई पैटर्न या निष्कर्ष निकलता है?

त्रिभुज बनाने के लिए किन्हीं भी दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से अधिक होना चाहिए— इस बात को समझने में बच्चों की मदद करने के लिए शिक्षक सूचक प्रश्न (leading questions) पूछ सकते हैं।

इसके अनुवर्तन (follow up) के रूप में बच्चे परिणाम की जाँच करने के लिए इस गतिविधि को दोहरा सकते हैं।

- ‘क्या 12 सेंटीमीटर, 2 सेंटीमीटर और 8 सेंटीमीटर लम्बाई वाली भुजाओं से त्रिभुज बनाया जा सकता है?’ क्यों या क्यों नहीं?
- ‘क्या 10 सेंटीमीटर, 5 सेंटीमीटर और 5 सेंटीमीटर लम्बाई वाली भुजाओं से त्रिभुज बनाया जा सकता है?’ क्यों या क्यों नहीं?

गतिविधि 4

उद्देश्य : यह दर्शाना कि त्रिभुज के कोणों का योग 180 अंश होता है।

सामग्री : विभिन्न लम्बाइयों की नलियाँ, चाँदा, त्रिभुजों के कट-आउट

बच्चे चित्र में दिखाए अनुसार बिन्दुकित रेखाओं पर त्रिभुज के तीनों कोनों को मोड़कर इस गुणधर्म की जाँच कर सकते हैं। मोड़ इस तरह से बनाए जाने चाहिए कि आधार सबसे लम्बी भुजा हो (ध्यान रखें कि आधार पर अधिक कोण नहीं होना चाहिए)।

पहले दोनों भुजाओं के मध्यबिन्दुओं (D और E) को चिह्नित करें और फिर D और E से आधार BC पर लम्ब डालकर मोड़ की रेखाएँ बनाएँ।

तीनों कोण आधार पर फिट होंगे और मिलकर 180 अंश का कोण बनाएँगे।

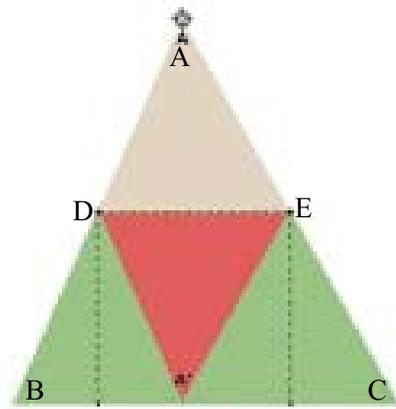
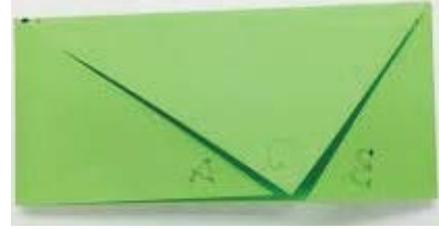
इस परिणाम की जाँच करने के लिए बच्चों को सभी प्रकार के त्रिभुजों के साथ इस मोड़ने वाली गतिविधि को करके देखना चाहिए।

त्रिभुज बनाने के लिए तीन नलियों को जोड़ें। उनके अन्तःकोणों को मापें और एक तालिका में दर्ज करें।

विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों के लिए इस गतिविधि को दोहराएँ।

क्रमांक	कोण 1	कोण 2	कोण 3	कोण 1 + कोण 2 + कोण 3

इस तालिका से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?



गतिविधि 5

उद्देश्य : यह दर्शाना कि बाह्य कोण अपने दोनों सम्मुख अन्तःकोणों के योग के बराबर होता है।

सामग्री : विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों (समकोण, समद्विबाहु समकोण, समद्विबाहु न्यून कोण, समद्विबाहु अधिक कोण, न्यून कोण व अधिक कोण त्रिभुज) के समूह

नोट : यह गतिविधि पिछली गतिविधि का अनुवर्तन करती है और इसे पिछले परिणाम की व्युत्पत्ति (derivation) के रूप में माना जा सकता है।

सभी बच्चे त्रिभुज की आउटलाइन बनाएँ। वे तीनों कोणों को नाम दें और उन्हें मापें।

फिर वे त्रिभुज की किसी भी एक भुजा को एक ओर बढ़ाएँ और विस्तारित भुजा द्वारा बनाए गए बाह्य कोण को मापें। इस जानकारी को बोर्ड पर बनी एक तालिका में दर्ज करें।

बाह्य कोण, आसन्न अन्तःकोणों (adjacent interior angles) से कैसे सम्बन्धित है?

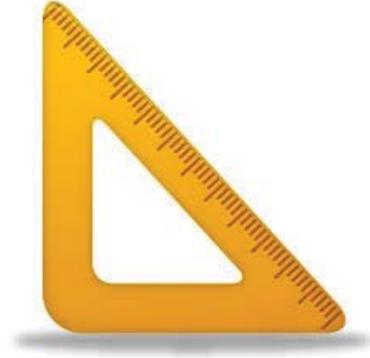
बाह्य कोण दोनों सम्मुख अन्तःकोणों (opposite interior angles) के योग के बराबर होता है— इस बात पर ध्यान देने में बच्चों की मदद करने के लिए शिक्षक सूचक प्रश्न पूछ सकते हैं।

क्या किसी अन्य भुजा को बढ़ाए जाने पर भी ऐसा होता है? बच्चे मापें और परिणाम की जाँच करें।

त्रिभुज 1	कोण A	कोण B	A + B	बाह्य कोण C
	कोण B	कोण C	B + C	बाह्य कोण A
	कोण A	कोण C	A + C	बाह्य कोण B

क्या बच्चे इस सम्बन्ध के कारण को उचित ठहरा सकते हैं?

सन्दर्भ : <https://azimpremjiuniversity.edu.in/SitePages/resources-ara-issue-no-7-july-2020-triangles-to-tetrahedrons.aspx>



गतिविधि 6

उद्देश्य : भुजाओं के सन्दर्भ में त्रिभुजों के समूह की पड़ताल करना।

सामग्री : कई मापों वाले अलग-अलग प्रकार के त्रिभुज (समबाहु, विषमबाहु, समद्विबाहु)। बोर्ड पर लगाने के लिए त्रिभुजों के प्रकारों और उनके सम्बन्धित नामों को दर्शाने वाला चार्ट।

बच्चे त्रिभुजों के दिए गए एक समूह में से इन्हें भुजाओं के आधार पर विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत करें और फिर इन्हें नाम देना सीखें।

(भुजाओं के आधार पर) तीन प्रकार के त्रिभुजों की पहचान करने के बाद बच्चे उनके कोण मापें और मापों को दर्ज करें।

समबाहु त्रिभुज के कोणों के बारे में आपने क्या देखा?

समद्विबाहु त्रिभुज के कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

विषमबाहु त्रिभुज के कोणों के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

त्रिभुज के प्रकार	कथन
	सभी कोण हैं
	दो कोण हैं
	सभी कोण हैं

सूचक प्रश्न पूछकर शिक्षक सटीक परिभाषाओं पर पहुँचने में बच्चों की मदद करें।

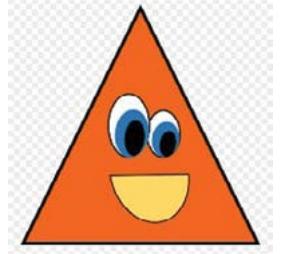
क्या समबाहु त्रिभुज का आकार उसके कोणों को प्रभावित करता है?

क्या होगा यदि समबाहु त्रिभुज की किसी एक भुजा को बड़ी भुजा से बदल दिया जाए? छोटी भुजा से बदल दिया जाए?

क्या समद्विबाहु त्रिभुज की स्थिति में बच्चे समान भुजाओं के समान कोणों से सम्बन्ध पर ध्यान देते हैं?

यदि एक समद्विबाहु त्रिभुज को शीर्ष पर अधिक नुकीला कर दिया जाए, तो यह आधार कोणों को कैसे प्रभावित करता है?

यदि भुजाएँ समान रहें और उनके बीच का कोण बड़ा कर दिया जाए, तो यह आधार कोणों को कैसे प्रभावित करता है?



गतिविधि 7

उद्देश्य : कोणों के सन्दर्भ में त्रिभुजों के समूह की पड़ताल करना।

सामग्री : विभिन्न कोणों वाले अलग-अलग प्रकार के त्रिभुज (न्यून कोण, अधिक कोण, समकोण)। विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों (कोणों के आधार पर) और उनके सम्बन्धित नामों को दर्शाने वाला चार्ट।

बच्चे त्रिभुजों के दिए गए एक समूह में से इन्हें कोणों के आधार पर विभिन्न प्रकारों में वर्गीकृत करें और इन्हें नाम देना सीखें।

क्या बच्चे इस बात पर ध्यान देते हैं कि न्यून कोण त्रिभुज की स्थिति में तीनों कोण न्यून कोण हैं?

अधिक कोण त्रिभुज में तीन अधिक कोण क्यों नहीं हो सकते हैं? क्या इसमें दो अधिक कोण हो सकते हैं?

क्या एक त्रिभुज में दो समकोण हो सकते हैं? क्यों या क्यों नहीं? यदि त्रिभुज का एक कोण समकोण है, तो हम अन्य दो कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?

खेल : गुणधर्मों की तालिका भरना

(<https://nrich.maths.org/2927>)

सामग्री : ऐसे कार्डों (12 से 15 कार्ड) का सेट जो तालिका में दिखाए अनुसार भुजाओं, कोणों, सममित रेखाओं आदि से सम्बन्धित त्रिभुजों के गुणधर्मों को बताते हैं।

4 x 4 की एक जाली तैयार करें जिसमें बच्चे चयनित गुणधर्म वाले कार्डों को पहले स्तम्भ और पहली पंक्ति में रखें।

दूसरे बच्चे के लिए चुनौती यह है कि उसे सम्बन्धित खाने में एक ऐसा त्रिभुज बनाना है जिसमें वे दोनों गुणधर्म हों जो स्तम्भ के शीर्ष और पंक्ति की शुरुआत में लिखे गए हैं।

कुछ संयोजन ऐसे भी हो सकते हैं जो सम्भव नहीं हैं! यदि कोई बच्चा ऐसी आकृति नहीं बना पाए, तो वह 'पास' दे सकता है और देख सकता है कि दूसरे बच्चे इस कर पाते हैं या नहीं। जो भी अन्तिम आकृति बनाता है वह जीतता है।

चर्चा करें : यदि वर्ग एक विशेष प्रकार का आयत है, तो क्या समबाहु त्रिभुज एक विशेष प्रकार का समद्विबाहु त्रिभुज हो सकता है?

नोट : शिक्षक भुजा बनाम कोणों का उपयोग करके इसी प्रकार की एक तालिका बना सकते हैं।

सन्दर्भ: <https://www.cut-the-knot.org/triangle/Triangles.shtml>

	सभी कोण असमान हैं	एक कोण समकोण है	एक कोण समकोण है, परन्तु कोई सममित रेखा नहीं है।
2 भुजाएँ समान हैं			
3 भुजाएँ समान हैं			
कोई भी भुजा समान नहीं है			

गतिविधि 8

उद्देश्य : यह दर्शाना कि त्रिभुज की सबसे लम्बी भुजा त्रिभुज के सबसे बड़े कोण के सम्मुख होती है।

सामग्री : विभिन्न विषमबाहु त्रिभुज

बच्चे त्रिभुजों के शीर्षों को नामांकित करें। वे इन त्रिभुजों की भुजाओं और कोणों को मापें और उन्हें एक तालिका के रूप में दर्ज करें।

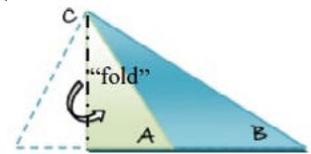
भुजा की माप	किसके सम्मुख है	कोण की माप
AB	कोण.....	
BC	कोण.....	
AC	कोण.....	

सबसे लम्बी भुजा कोण..... के सम्मुख है।
सबसे छोटी भुजा कोण..... के सम्मुख है।



इसे कागज़ मोड़ने के माध्यम से भी किया जा सकता है।

त्रिभुज की दो भुजाओं की तुलना करने के लिए : एक भुजा को दूसरी भुजा पर मोड़ें यानी कि सम्मिलित कोणों के समद्विभाजक के साथ मोड़ें।



त्रिभुज के दो कोणों की तुलना करने के लिए : त्रिभुज को इस तरह से मोड़ें कि उसका एक शीर्ष दूसरे पर आ जाए, यानी कि उभयनिष्ठ भुजा के लम्ब समद्विभाजक के साथ मोड़ें।

गतिविधि 9

उद्देश्य : त्रिभुज के प्रकार यानी समकोण त्रिभुज, न्यून कोण त्रिभुज या अधिक कोण त्रिभुज का निर्धारण करना।

सामग्री : 1×1 से लेकर 12×12 तक की वर्गाकार जाली वाले कागज़ जिसमें पीछे का भाग सादा यानी जाली की लाइनों के बिना हो।

शुरुआत में बच्चों को जालियों के किनारों का उपयोग करके त्रिकोणीय आकृतियों को एक साथ रखने के लिए जालियों के सादे भाग का उपयोग करने के लिए कहें।

वे कुछ समकोण त्रिभुज, कुछ न्यून कोण त्रिभुज और कुछ अधिक कोण त्रिभुज बनाने में सक्षम होंगे।

अब बच्चे वर्गाकार जालियों को देखने के लिए आकृतियों को पलट सकते हैं और इस तरह के प्रत्येक त्रिभुज की जानकारी एक तालिका के रूप में दर्ज कर सकते हैं।

उन्होंने क्या देखा? यदि त्रिभुज न्यून कोण त्रिभुज हो तो भुजाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

यदि त्रिभुज अधिक कोण त्रिभुज हो तो भुजाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

यदि त्रिभुज समकोण त्रिभुज हो तो भुजाओं में क्या सम्बन्ध होता है?

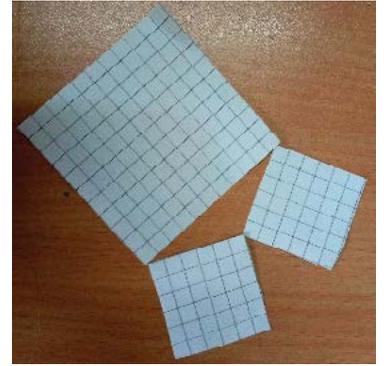
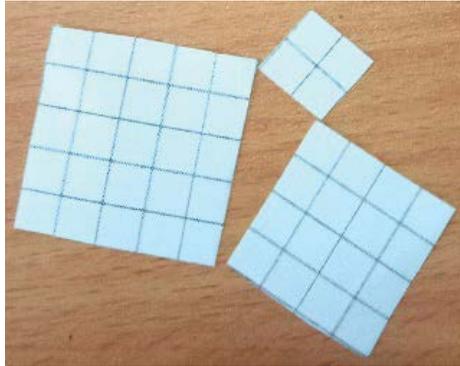
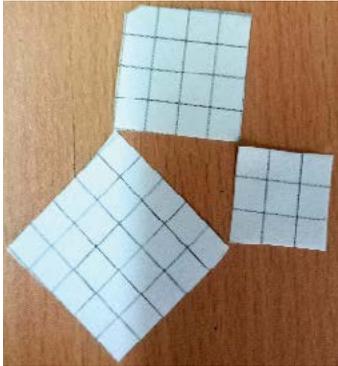
यदि त्रिभुज समद्विबाहु हो तो क्या होता है?

यदि त्रिभुज समबाहु हो तो क्या होता है?

क्या केवल भुजाओं की लम्बाई देखकर त्रिभुज के प्रकार को निर्धारित करना सम्भव है?

यदि एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई 4, 5 और 8 हो, तो यह किस प्रकार का त्रिभुज होगा?

यदि एक त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई 6, 5 और 7 हो, तो यह किस प्रकार का त्रिभुज होगा?



क्रमांक	त्रिभुज का प्रकार	भुजा की लम्बाई	वर्गों के क्षेत्रफल	सम्बन्ध $a^2 + b^2 > c^2$	सम्बन्ध $a^2 + b^2 < c^2$	सम्बन्ध $a^2 + b^2 = c^2$

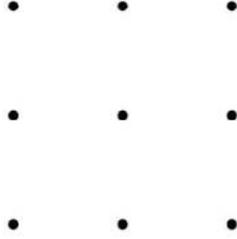
शिक्षक बच्चों को दिखा सकते हैं बिन्दुओं को नाम देने के लिए पंक्ति और कॉलम संख्या का उपयोग कैसे किया जाता है।

गतिविधि 10

उद्देश्य : वर्गाकार बिन्दुकित कागज़ पर त्रिभुज बनाना।

सामग्री : समान दूरी पर स्थित 4 बिन्दुओं वाले, 6 बिन्दुओं वाले और 8 बिन्दुओं वाले वृत्त

बच्चे 3×3 की जाली की आउटलाइन बना सकते हैं और इस जाली के अन्दर बनाए जा सकने वाले विभिन्न त्रिभुजों की पड़ताल कर सकते हैं।



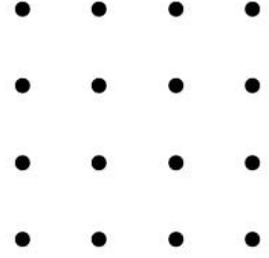
त्रिभुज के प्रत्येक शीर्ष को इस जाली के बिन्दु पर होना चाहिए।

अलग-अलग प्रकार के कितने त्रिभुज बनाना सम्भव है?

क्या समबाहु त्रिभुज बनाना सम्भव है?

क्या समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बनाना सम्भव है?

4×4 की बिन्दुकित जाली पर सम्भावित अलग-अलग प्रकार के सभी त्रिभुज बनाएँ। क्या आप सभी त्रिभुजों को बना पाएँ? आपको कैसे मालूम?



विस्तार :

8×8 की जाली की

आउटलाइन बनाएँ। मान लीजिए कि त्रिभुज का एक शीर्ष बिन्दु (4, 4) पर है।

इस बिन्दु को एक शीर्ष मानकर कितने अलग-अलग समद्विबाहु त्रिभुज बनाए जा सकते हैं?

गतिविधि 11

उद्देश्य : वृत्त में त्रिभुज बनाना।

सामग्री : वर्गाकार बिन्दुकित कागज़

बच्चे वृत्त बना सकते हैं और उन पर ज़रूरत के अनुसार बिन्दु चिह्नित कर सकते हैं।

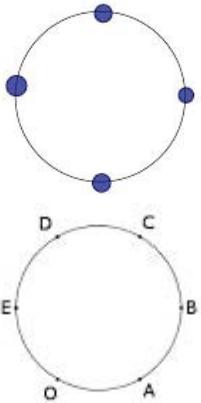
समान दूरी पर स्थित 4 बिन्दुओं वाले एक वृत्त में आप अलग-अलग कितने त्रिभुज बना सकते हैं?

इस तरह के त्रिभुजों के कोणों की माप क्या है?

समान दूरी पर स्थित 6 बिन्दुओं वाले एक वृत्त में आप अलग-अलग कितने त्रिभुज बना सकते हैं?

क्या आप यह सुनिश्चित कर सकते हैं कि आपने ऐसे सभी त्रिभुज बना लिए हैं?

बच्चे प्रत्येक प्रकार के त्रिभुज को अलग से दर्शाने के लिए रंगीन पेंसिलों का इस्तेमाल कर सकते हैं और उनके कोणों को माप सकते हैं।



प्रत्येक त्रिभुज के कोणों की माप क्या है?

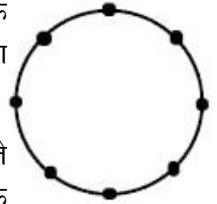
क्या बच्चे समान त्रिभुजों को खोजने के लिए सममिति के विचारों का उपयोग करते हैं?

समान दूरी पर स्थित 9 बिन्दुओं वाले एक वृत्त में आप अलग-अलग प्रकार के कितने त्रिभुज बना सकते हैं?

आप कितने त्रिभुज बना पाएँ? प्रत्येक त्रिभुज के कोणों की माप क्या है?

8 बिन्दुओं वाले वृत्त पर आप कितने अलग-अलग त्रिभुजों को बना सकते हैं?

क्या आप प्रत्येक त्रिभुज के कोण ज्ञात कर सकते हैं?



गतिविधि 12

उद्देश्य : घनों की पड़ताल करना और उनमें त्रिभुजों की कल्पना करना ।

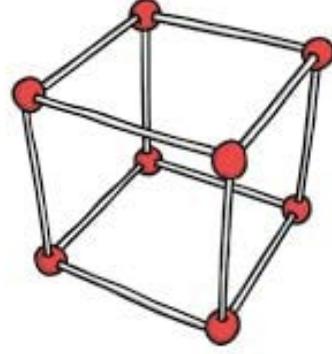
सामग्री : स्ट्रॉ और मॉडलिंग मिट्टी से बनी गेंदें

बच्चों को स्ट्रॉ और मिट्टी की गेंदों का उपयोग करके घन का ढाँचा बनाने के लिए कहें।

घन के ढाँचे के शीर्ष बिन्दुओं को मिलाने पर त्रिभुज बनते हैं।

यहाँ कितने प्रकार के त्रिभुज हैं?

चुनौती : क्या वे बनाए जा सकने वाले कुल त्रिभुजों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं?



गतिविधि 13

उद्देश्य : समबाहु त्रिभुज को मोड़ना।

सामग्री : विभिन्न मापों वाले कागज़ के समबाहु त्रिभुज

बच्चे एक समबाहु त्रिभुज को कई प्रकार से मोड़कर उससे बनने वाली आकृतियों को देख सकते हैं।

यदि समबाहु त्रिभुज को उसकी सममित रेखा पर मोड़ा जाए तो कौन-सी आकृति बनती है?

यदि इसे दूसरी सममित रेखा पर मोड़ा जाए तो क्या वही आकृति मिलती है?

अगर समबाहु त्रिभुज का आकार बड़ा हो तो क्या बनने वाली आकृति अलग होगी?

क्या सममित रेखा पर मोड़ने से बनने वाली आकृति हर बार समबाहु त्रिभुज हो सकती है?

क्या आप कागज़ के समबाहु त्रिभुज को इस तरह से मोड़ सकते हैं कि आपको 4 छोटे समबाहु त्रिभुज मिलें?



गतिविधि 14

उद्देश्य : समद्विबाहु त्रिभुज को मोड़ना।

सामग्री : विभिन्न मापों वाले कागज़ के समद्विबाहु त्रिभुज (दो प्रकार के समद्विबाहु न्यूनकोण त्रिभुज, समद्विबाहु समकोण त्रिभुज, समद्विबाहु अधिक कोण त्रिभुज)

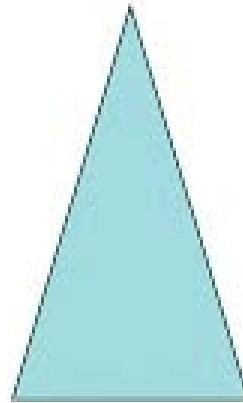
बच्चे समद्विबाहु त्रिभुज को उसकी सममित रेखा पर मोड़ सकते हैं।

जब आप ऐसा करते हैं तो आपको किस प्रकार का त्रिभुज मिलता है?

यदि शीर्ष के कोण को बड़ा कर दें तो क्या मोड़ने पर बनने वाली आकृति अलग होगी?

क्या परिणामी आकृति हमेशा समद्विबाहु त्रिभुज हो सकती है?

नोट : बच्चों को न केवल सममित रेखा, बल्कि किसी भी रेखा पर कागज़ मोड़ने की अनुमति है। साथ ही वे कागज़ को कई बार भी मोड़ सकते हैं।



गतिविधि 15

उद्देश्य : वर्गाकार कागज़ को मोड़ना और बने हुए त्रिभुजों की पड़ताल करना।

एक वर्गाकार कागज़ को इस तरह मोड़ें कि आपको 4 बराबर त्रिभुज मिलें। आपको किस प्रकार के त्रिभुज देखने को मिलते हैं? सभी कोणों की माप लिख लें। उचित कारण दें कि मोड़े गए सभी वर्गाकार कागज़ों के लिए कोण समान क्यों होंगे।

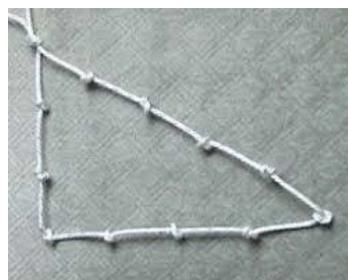
गतिविधि 16

उद्देश्य : 12 समान भागों में विभाजित एक रस्सी से त्रिभुज बनाना।

प्राचीन मिस्रवासी गाँवों के जरिए बारह बराबर भागों में विभाजित एक रस्सी का उपयोग करके समकोण त्रिभुज बनाते थे।

यदि आपके पास ऐसी रस्सी होती तो आप इससे और कौन-से त्रिभुज बना सकते थे?

क्या उनमें कोई समकोण होगा?



गतिविधि 17

उद्देश्य : छेद वाली पट्टियों से त्रिभुज बनाना।

सामग्री : 3 अलग-अलग लम्बाइयों की मोटी कार्ड पट्टी जिनसे त्रिभुज बनता हो। उदाहरण के लिए 10 सेंटीमीटर, 7 सेंटीमीटर और 5 सेंटीमीटर लम्बाई की पट्टियाँ जिनके किनारों पर छेद हों।

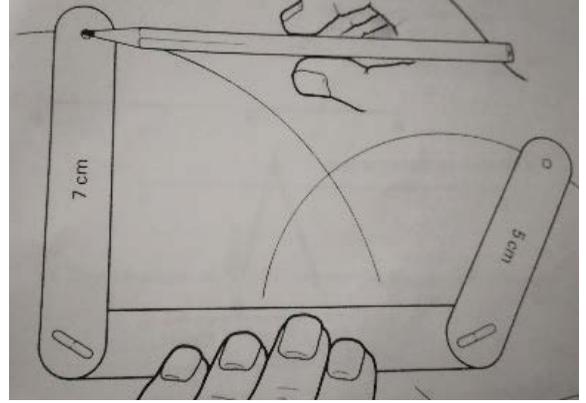
त्रिभुज बनाने के लिए स्टेपल पिनों का उपयोग करके तीनों पट्टियों को एक साथ जोड़ें।

त्रिभुज को 7 सेंटीमीटर और 5 सेंटीमीटर की पट्टियों के जोड़ पर खोलें। मध्य पट्टी (10 सेंटीमीटर) को मज़बूती से पकड़कर रखें या इसे कागज़ पर पिन से लगा दें। पट्टी को घुमाकर चाप बनाने के लिए एक पट्टी (7 सेंटीमीटर) के छेद में एक पेंसिल बिन्दु का उपयोग करें।

पट्टी को घुमाकर एक और चाप बनाने के लिए दूसरी पट्टी (5 सेंटीमीटर) के छेद में एक पेंसिल बिन्दु का उपयोग करें।

दोनों चाप एक-दूसरे को एक बिन्दु पर काटते हैं। इस बिन्दु को चिह्नित करें।

ध्यान दें कि यह वही बिन्दु है जहाँ 7 सेंटीमीटर और 5 सेंटीमीटर वाली पट्टियाँ पहले जुड़ी थीं।



गतिविधि 18

उद्देश्य : परकार और रूलर से त्रिभुज बनाना।

शिक्षक परकार और रूलर से त्रिभुज बनाने की इस गतिविधि की तुलना पिछली गतिविधि से कर सकते हैं।

पट्टी की लम्बाई को अब परकार द्वारा मापी गई लम्बाई से बदल दिया गया है।

क्या बच्चे इस बात को समझ पाते हैं कि वे जो चाप खींच रहे हैं वह एक वृत्त के हिस्से हैं जो दिए गए बिन्दु से निश्चित लम्बाई पर हैं?

जब बच्चे खुद को छोटे-छोटे चाप खींचने और प्रतिच्छेद बिन्दु (जहाँ चाप एक-दूसरे को काटते हैं) प्राप्त करने तक सीमित कर लेते हैं, तब अच्छा होगा अगर वे इस रचना प्रक्रिया के तर्क को स्पष्ट रूप से बता पाएँ।

पहला चाप, रेखा के एक छोर से 4 सेंटीमीटर की दूरी पर स्थित बिन्दुओं का संग्रह है।



दूसरा चाप, रेखा के दूसरे छोर से 5 सेंटीमीटर की दूरी पर स्थित बिन्दुओं का संग्रह है।

जिस बिन्दु पर वे प्रतिच्छेद करते हैं वह रेखा के एक छोर से 4 सेंटीमीटर और दूसरे छोर से 5 सेंटीमीटर की दूरी पर स्थित है।

अब पूछें : यदि आपको किसी त्रिभुज के तीनों कोण दिए गए हों तो क्या आप एक त्रिभुज की रचना कर सकते हैं? क्या आपका त्रिभुज आपके दोस्त के त्रिभुज के समान ही दिखता है?

आगे की रचनाएँ

- चाँदे का उपयोग करके त्रिभुज की रचना करने पर चर्चा।
- समबाहु त्रिभुज की रचना पर चर्चा।
- समद्विबाहु त्रिभुज की रचना पर चर्चा।
- समद्विबाहु समकोण त्रिभुज की रचना पर चर्चा।

टिप्पणी

आगे दी गई गतिविधियाँ बच्चों को कागज़ मोड़ने के माध्यम से त्रिभुजों के कुछ गुणधर्मों की पड़ताल करने और उन्हें खोजने का मौका देने के लिए हैं।

बच्चों को इन गुणधर्मों की शब्दावली या औपचारिक ज्ञान सीखने की आवश्यकता नहीं है। इन्हें आमतौर पर आगे की कक्षाओं में पढ़ाया जाता है।

गतिविधि 19

उद्देश्य : त्रिभुजों को मोड़ने के माध्यम से गुणधर्मों का पता लगाना – 1

सामग्री : त्रिभुज की अलग-अलग आकृतियाँ (सभी 8 प्रकार की)

सन्दर्भ : www.arvindguptatoys.com (ज्यामिति और कागज़ मोड़ने की गतिविधियों पर वीडियो के लिए)।

बच्चे त्रिभुज की प्रत्येक भुजा को अपने ही ऊपर और शीर्ष को शीर्ष पर मोड़ सकते हैं। जब हम ऐसा करते हैं तो किस तरह की रेखाएँ बनती हैं?

क्या तीनों रेखाएँ किसी एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद (एक-दूसरे को काटती हैं) करती हैं? क्या सभी त्रिभुजों में वे इसी तरीके से प्रतिच्छेद करती हैं?

नोट : अधिक कोण त्रिभुज में प्रतिच्छेद बिन्दु त्रिभुज के बाहर होगा। इसे देखने के लिए आप त्रिभुज को वृत्त के अन्दर बना सकते हैं।

प्रतिच्छेद बिन्दु से तीनों शीर्षों की दूरी क्या है?

प्रत्येक भुजा से प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है? (यह लम्बवत दूरी होगी और कागज़ मोड़ने के माध्यम से इसे ज्ञात किया जा सकता है।)

आपने क्या देखा?

गतिविधि 20

उद्देश्य : त्रिभुजों को मोड़ने के माध्यम से गुणधर्मों का पता लगाना – 2

सामग्री : त्रिभुज की अलग-अलग आकृतियाँ (सभी 8 प्रकार की)

बच्चे त्रिभुज के प्रत्येक कोण को उसी पर ऊपर मोड़ सकते हैं और बनी हुई रेखाओं का अवलोकन कर सकते हैं।

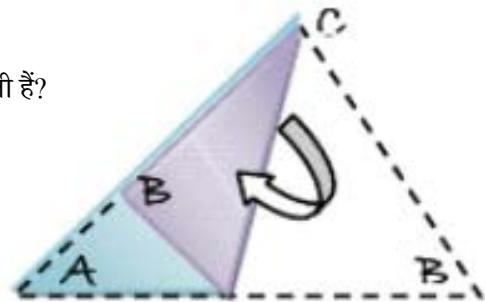
क्या तीनों रेखाएँ किसी एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद (एक-दूसरे को काटती हैं) करती हैं?

प्रत्येक शीर्ष से प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है?

प्रत्येक भुजा से प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है?

आपने क्या देखा?

भुजाओं को ऐसे मोड़ें कि मोड़ सम्मुख शीर्ष से होकर गुजरें।



गतिविधि 21

उद्देश्य : त्रिभुजों को मोड़ने के माध्यम से गुणधर्मों का पता लगाना – 3

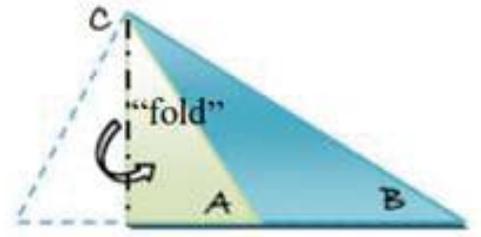
भुजाओं को ऐसे मोड़ें कि मोड़ सम्मुख शीर्ष से होकर गुजरें। क्या यह तीनों रेखाएँ किसी एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं?

टिप्पणी : अधिक कोण त्रिभुज की स्थिति में इसे अलग प्रकार से किए जाने की जरूरत है, क्योंकि प्रतिच्छेद बिन्दु त्रिभुज के बाहर होता है। यह किसी बिन्दु से लम्ब डालने के समान होगा।

प्रत्येक शीर्ष से इस प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है?

प्रत्येक भुजा से इस प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है?

आपने क्या देखा?



गतिविधि 22

उद्देश्य : त्रिभुजों को मोड़ने के माध्यम से गुणधर्मों का पता लगाना – 4

प्रत्येक भुजा के मध्य बिन्दु को चिह्नित करें। प्रत्येक शीर्ष को उसके आधार के मध्य बिन्दु से मिलाकर 3 मोड़ बनाएँ।

क्या यह तीनों रेखाएँ किसी एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करती हैं?

क्या इस बिन्दु के बारे में कोई खास बात है?

प्रत्येक शीर्ष से इस प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है?

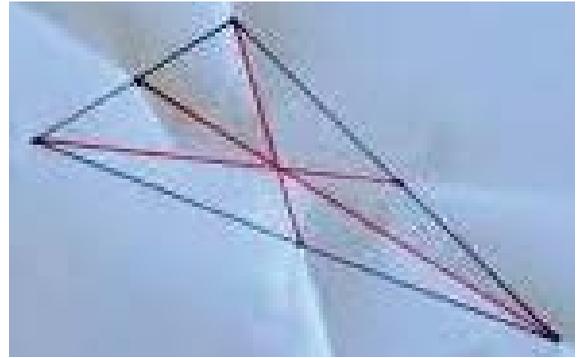
प्रत्येक भुजा से इस प्रतिच्छेद बिन्दु की दूरी क्या है?

प्रतिच्छेद बिन्दु से किसी एक शीर्ष की दूरी की तुलना संगत आधार से उसकी दूरी के साथ कैसे की जा सकती है?

इसी गतिविधि को किसी अन्य शीर्ष व आधार के साथ करके देखें।

इसी गतिविधि को अब तीसरे शीर्ष व आधार के साथ करके देखें।

क्या आपको कोई पैटर्न नज़र आया?



प्रयोग : यह बिन्दु त्रिभुज का 'सन्तुलन बिन्दु' भी है। ऐसा एक त्रिभुज गत्ते के टुकड़े पर बनाएँ। उसे काट लें और इस बिन्दु को चिह्नित करें। यदि सही तरीके से किया जाए तो त्रिभुज पेंसिल की नोंक पर सन्तुलित हो जाएगा या इस बिन्दु से जुड़े धागे के टुकड़े पर पूरी तरह समान स्तर पर लटकेगा।

गतिविधि 23

उद्देश्य : परिमाण के सम्बन्ध की पड़ताल करना।

बच्चे एक त्रिभुज बनाकर उसकी प्रत्येक भुजा के मध्य बिन्दु को चिह्नित करें।

इन तीनों बिन्दुओं को मिलाकर एक और त्रिभुज बनाएँ।

उन्से पूछें : नए बने त्रिभुज का परिमाण मूल त्रिभुज के परिमाण से कैसे सम्बन्धित है?

जो अन्य त्रिभुज बने हैं उनके बारे में आपने क्या देखा?

गतिविधि 24

उद्देश्य : समरूप त्रिभुजों की पड़ताल करना।

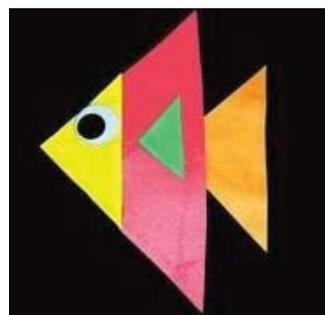
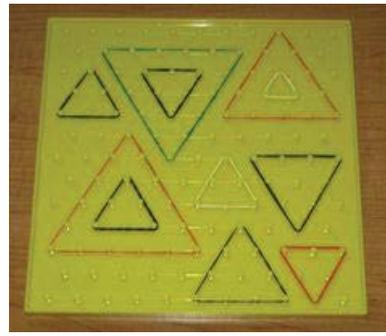
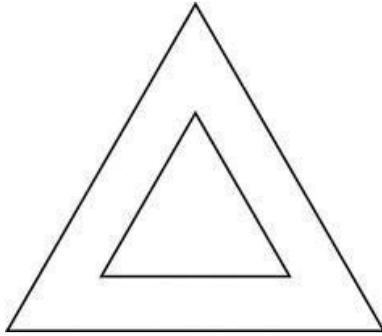
बच्चों को समरूप त्रिभुजों के कुछ चित्र दिखाए जा सकते हैं।

किस प्रकार से यह त्रिभुज 'समान' हैं? किस प्रकार से यह 'अलग' हैं?

आप इन त्रिभुजों के कोणों के बारे में क्या कह सकते हैं?

यदि किसी त्रिभुज की एक भुजा को बढ़ाया जाए तो क्या उसका स्वरूप समान होगा?

'समरूप' का मतलब है कि त्रिभुजों की आकृति बिल्कुल समान है, परन्तु उनकी माप अलग-अलग हो सकती है।



गतिविधि 25

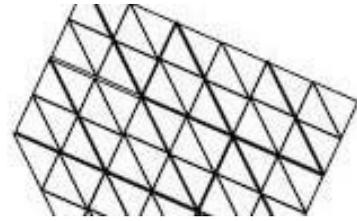
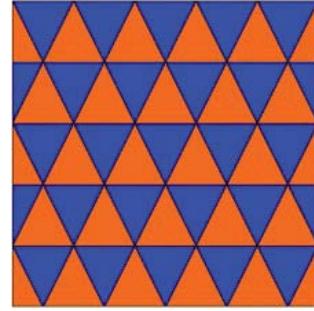
उद्देश्य : त्रिभुजों की टाइलिंग करना।

टिप्पणी : सभी त्रिभुजों से टाइलिंग की जा सकती है। शिक्षकों को विभिन्न प्रकार के त्रिभुजों के साथ प्रयोग करके बच्चों का ध्यान इस ओर आकर्षित करना चाहिए।

यदि भुजाओं का मिलान करना हो तो दो समबाहु त्रिभुजों को कितने प्रकार से एक साथ रखा जा सकता है?

यदि भुजाओं का मिलान करना हो तो दो समद्विबाहु त्रिभुजों को कितने प्रकार से एक साथ रखा जा सकता है?

क्या विषमबाहु त्रिभुजों से भी टैसिलेशन कर सकते हैं?



आभार :

कागज़ मोड़ने वाली गतिविधियों के चित्र नीचे दी गई लिंक से लिए गए हैं :

<https://www.scribd.com/document/366908902/paper-folding-discovery>

मैं लेख के पहले मसौदे का मेहनत से अध्ययन करने और कई मूल्यवान सुझाव देने के लिए **स्वाती सरकार** का शुक्रिया अदा करना चाहती हूँ।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली, सह्याद्रि स्कूल (पुणे) और ऋषि वैली (आन्ध्रप्रदेश) में स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर में 1983 से काम कर रही हैं। यहाँ वह विभिन्न विषय पढ़ाती हैं, जैसे कि गणित, कम्प्यूटर अनुप्रयोग, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू। पिछले कुछ वर्षों से वह शिक्षक-शिक्षा आउटरीच कार्य में संलग्न हैं। वर्तमान में वह पाठ्यचर्या सुधार और प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों पर एससीईआरटी (आन्ध्रप्रदेश) के साथ काम कर रही हैं। 1990 के दशक में उन्होंने चेन्नई के प्रसिद्ध गणित-शिक्षक स्वर्गीय श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वह उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलिमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को बनाया था। इस प्रोग्राम को 'स्कूल इन ए बॉक्स' के नाम से भी जाना जाता है। पद्मप्रिया से padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथिमैटिक्स सेंटर, ऋषि वैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University's At Right Angles (a resource for school mathematics) मार्च, 2021 में प्रकाशित Triangles का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : निदेश सोनी

पुनरीक्षण एवं कॉपी एडिटिंग : कविता तिवारी सम्पादन : राजेश उत्साही