

गुणनफल को इष्टतम बनाना

पार्श्विक सोच के कुछ शानदार उपयोग

स्वाती सरकार

‘नै’ण्डम डिजिट्स” नामक खेल उच्च स्तरीय चिन्तन कौशल की माँग करता है। यह खेल सभी खिलाड़ियों के लिए एक साझा बोर्ड के साथ शुरू होता है। बोर्ड मूलतः दो बहु-अंकीय पूर्ण संख्याओं के साथ जोड़, घटा या गुणा करने के लिए है। इसमें संक्रियाएँ निर्धारित होती हैं। साथ ही यह भी निर्धारित होता है कि संक्रिया के लिए इस्तेमाल होने वाली प्रत्येक पूर्ण संख्या कितने अंकों की होगी। अलबत्ता, इन संख्याओं के अंकों की जगह खाली छोड़ दी जाती है। जैसे ही सुगमकर्ता प्रत्येक अंक का नाम बताता है, खिलाड़ी तुरन्त उन्हें बोर्ड पर रखते हैं। एक बार रखे जाने के बाद अंक की स्थिति नहीं बदली जा सकती। अग्रणी (पहला) अंक शून्य नहीं हो सकता; अर्थात् इसे किसी भी संख्या के सबसे बाएँ खाने में नहीं रखा जा सकता। यदि किसी खिलाड़ी को ऐसा करने के लिए मजबूर किया जाता है, तो उसे अयोग्य घोषित कर दिया जाता है। यदि खिलाड़ी योग, अन्तर या गुणनफल को अधिकतम करने का विकल्प चुनते हैं, तो विजेता वह होता है जिसका परिणाम अधिकतम है (योग, अन्तर और गुणनफल)। अलबत्ता, खिलाड़ी न्यूनतम परिणाम का लक्ष्य भी चुन सकते हैं। दोनों ही मामलों में, खिलाड़ियों को यह सोचना पड़ता है कि अपने परिणाम को इष्टतम बनाने के लिए प्रत्येक अंक को कहाँ रखा जाए। प्रत्येक खेल के बाद सर्वोत्तम परिणाम पर चर्चा करना एक अच्छा विचार होगा। खेल पर अधिक विवरण <https://shorturl.at/hkxV3> पर देखा जा सकता है।

हम 2-अंकीय × 2-अंकीय गुणन के लिए उक्त खेल खेल रहे थे और गुणनफल को अधिकतम करना चाहते थे। दिए गए अंक 2, 5, 8 और 9 थे, हालाँकि ज़रूरी नहीं कि इसी क्रम में हों। अधिकतम सम्भव गुणनफल पर चर्चा

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} \times \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$$

चित्र-1

की-वर्ड : तर्क करना, सम्बन्ध बनाना, रणनीति बनाना, गणित के खेल

करते समय, यह बिल्कुल स्पष्ट था कि 2 और 5 को इकाई के स्थान पर होना चाहिए, जबकि 8 और 9 को दहाई के स्थान पर होना चाहिए। उच्च अंक अग्रणी (पहले) अंक होने चाहिए और निम्न अंक इकाई स्थान पर होने चाहिए, यह निष्कर्ष हमें ऐसी चर्चाओं से मिल जाता है लेकिन 95×82 या 92×85 में से कौन-सा बड़ा है? बिना गणना किए हम इसका पता कैसे लगा सकते हैं?

एक खिलाड़ी ने तर्क दिया कि 92×85 बड़ा होगा क्योंकि $92 - 85 = 7$ का अन्तर छोटा है ($95 - 82 = 13$ के अन्तर की तुलना में)। उसने तर्क दिया कि गुणनफल को अधिकतम करने के लिए, संख्याओं के बीच के अन्तर को कम-से-कम किया जाना चाहिए।

क्या यह सही है?

1. क्या आप निम्नलिखित की जाँच कर सकते हैं?
 - क. $73 \times 52 = \text{-----}$ बनाम $72 \times 53 = \text{-----}$
 - ख. $61 \times 84 = \text{-----}$ बनाम $64 \times 81 = \text{-----}$
 - ग. $92 \times 41 = \text{-----}$ बनाम $91 \times 42 = \text{-----}$
 - घ. $85 \times 72 = \text{-----}$ बनाम $82 \times 75 = \text{-----}$
2. क्या यह 2-अंकों से आगे सामान्यीकृत होता है?
 - क. $95 \times 3 = \text{-----}$ बनाम $93 \times 5 = \text{-----}$
 - ख. $84 \times 2 = \text{-----}$ बनाम $82 \times 4 = \text{-----}$
 - ग. $743 \times 12 = \text{-----}$ बनाम $123 \times 74 = \text{-----}$
 - घ. $854 \times 23 = \text{-----}$ बनाम $234 \times 85 = \text{-----}$
3. क्या यह तब भी सामान्यीकृत होता है जब सबसे बड़ा अंक (पहला) अग्रणी अंक नहीं होता?
 - क. $36 \times 4 = \text{-----}$ बनाम $34 \times 6 = \text{-----}$
 - ख. $59 \times 28 = \text{-----}$ बनाम $58 \times 29 = \text{-----}$
 - ग. $190 \times 46 = \text{-----}$ बनाम $140 \times 96 = \text{-----}$
4. $27 \times 35 = \text{-----}$ के अन्तराल के साथ $35 - 27 = \text{-----}$ बनाम $73 \times 52 = \text{-----}$ के अन्तराल के साथ $73 - 52 = 21$? इस मामले में यह काम क्यों नहीं करता?

यह विचार उस जाने-माने परिणाम से लिया गया है कि किसी आयत का क्षेत्रफल अधिकतम होता है यदि वह एक वर्ग है। खोज-बीन करके कोई भी देख सकता है कि वास्तव में, जैसे-जैसे कोई आयत, एक वर्ग के करीब आता जाता है, उसका क्षेत्रफल बढ़ता जाता है। अब एक आयत एक वर्ग के करीब तभी पहुँचता है जब क्रमागत भुजाओं के किसी भी जोड़े की लम्बाई अधिक-से-अधिक बराबर हो जाती है। या दूसरे शब्दों में, जब दो क्रमागत भुजाओं की लम्बाई के बीच अन्तर कम-से-कम होता जाता है। लेकिन इष्टतम बनाने के इस काम को करने के लिए एक और शर्त है जिसे पूरा किया जाना चाहिए। शर्त है कि भुजाओं की लम्बाईयाँ बदलने के साथ आयत का परिमाण नहीं बदलना चाहिए।

इसका हमारी समस्या से क्या सम्बन्ध है?

दो आयतों पर विचार करें।

	आयत क	आयत ख
लम्बाई-चौड़ाई	95 सेमी × 82 सेमी	92 सेमी × 85 सेमी
परिमाप	2 (95 सेमी+82 सेमी) = 2 × 177 सेमी	2 (92 सेमी + 85 सेमी) = 2 × 177 सेमी
क्षेत्रफल	95 सेमी × 82 सेमी = 7790 सेमी ²	92 सेमी × 85 सेमी = 7820 सेमी ²

चूँकि हमने पहले ही 2 और 5 को इकाई के रूप में तथा 8 और 9 को दहाई के रूप में तय कर लिया था, जोड़ के क्रम-विनिमय और साहचर्य गुणों के संयोजन का उपयोग करते हुए हमें एक ही योग प्राप्त होता है, अर्थात्

$$\begin{aligned} 95 + 82 &= 90 + 5 + 80 + 2 \\ &= 90 + 2 + 80 + 5 \\ &= 92 + 85 \end{aligned}$$

यह योग और कुछ नहीं बल्कि आयत A और B के परिमाप का आधा है। इसलिए इस मामले में निश्चित परिमाप की शर्त पूरी होती है। अब क्षेत्रफल और कुछ नहीं बल्कि इन संख्याओं का गुणनफल है। इसलिए, जब संख्याएँ क्रिबी होती हैं तो क्षेत्रफल अधिकतम हो जाता है।

इसलिए सामान्य तौर पर कहें तो यदि दो संख्याओं का योग समान है, तो उनका गुणनफल तब अधिकतम होता है जब उनका अन्तर सबसे कम होता है।

नोट : क्या ऊपर दिए प्रश्न 4 में संख्याओं की दो जोड़ियों के लिए योग समान रहता है?

एक टॉपिक से आगे जाना आसान नहीं होता। लेकिन इस खिलाड़ी ने ध्यान दिया कि 2-अंकीय × 2-अंकीय गुणा के खेल में (जब बड़े अंकों को दहाई के स्थान पर रखा गया हो) संख्याओं का योग बराबर रहता है। अतः वह इसे निश्चित परिमाप की शर्त से जोड़ पाया। उसने ध्यान दिया कि गुणनफल और कुछ नहीं बल्कि आयत का क्षेत्रफल है। और इस आधार पर उसने क्षेत्रफल के परिणाम को गुणनफल को अधिकतम करने में उपयोग कर लिया। किसी अंकगणितीय सवाल को हल करने में यह क्षेत्रमिति का बेहतरीन उपयोग है!!

सोचने के लिए

1. 2, 5, 8, 9 के लिए न्यूनतम गुणनफल क्या होगा?
2. यदि आप 2-अंकीय × 2-अंकीय के लिए गुणनफल को इष्टतम करना चाहते हैं तो आप कैसे रणनीति बनाएँगे?
3. आप 2-अंकीय × 3-अंकीय के गुणनफल को इष्टतम करने की रणनीति कैसे बनाएँगे?

खेलों के इस समूह का मूल विचार विद्यार्थियों को बेईमानी (cheating) करने या एक-दूसरे से नकल करने से रोकना था। अलबत्ता, यह उससे कहीं अधिक साबित हुआ।



स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय के स्कूल ऑफ कंटीन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्राध्यापक हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (पहला चित्रकला है)। वे भारतीय सांख्यिकी संस्थान से बी.स्टैट-एम.स्टैट और वाशिंगटन विश्वविद्यालय सिपेटल से गणित में एमएस हैं। वे एक दशक से अधिक समय से बच्चों और शिक्षकों के साथ गणित विषय पर काम कर रही हैं। विशेष रूप से ओरिगामी आधारित किसी भी चीज में उनकी गहरी रुचि है। स्वाती से swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमांशु बावनकर **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** प्रतिका गुप्ता