7 से विभाज्यता के नियम

जितेन्द्र वर्मा

विभाज्यता नियम स्कूली गणित में, विशेष रूप से उच्च प्राथमिक कक्षाओं में, अध्ययन के महत्त्वपूर्ण विषयों में से एक है। इनकी मदद से हम तुरन्त पहचान सकते हैं कि क्या एक संख्या दूसरे से विभाज्य है। हम किसी संख्या की 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 आदि से विभाज्यता जाँचने की विभिन्न विधियाँ जानते हैं। यह भी स्पष्ट है कि कुछ संख्याओं की किसी संख्या से विभाज्यता की जाँच करना काफ़ी आसान है, जबकि कुछ संख्याओं के लिए यह थोड़ा जटिल है। 7 से विभाज्यता चुनौतीपूर्ण होती है। नियम को सरल बनाने के कई प्रयास किए गए हैं। चिका ओफिली का 7 से विभाज्यता नियम (चिका का नियम) हाल ही में खोजा गया एक नियम है। यहाँ, हम मौजूदा तरीक़ों का उपयोग करके 7 के लिए तीन अलग-अलग विभाज्यता विधियों पर चर्चा करेंगे, जो इस अवधारणा में नए आयाम जोड़ती हैं।

विधि-1 : इकाई के अंक को दुगना करना

दी गई संख्या लीजिए	इकाई अंक को हटा दें और छँटी (बची) हुई संख्या लिखें	हटाए गए इकाई अंक को दुगना करें	छँटी हुई संख्या में से दुगना किया गया अंक घटाएँ	यदि घटाने पर शेष 0 है या 7 का गुणज है, तो मूल संख्या 7 से विभाज्य है। (यदि आवश्यक हो तो इस प्रक्रिया को दोहराएँ)
532	53	$2 \times 2 = 4$	$53 - 4 = 49$	49, 7 से विभाज्य है इसलिए 532 भी 7 से विभाज्य है
427	42	$2 \times 7 = 14$	$42 - 14 = 28$	28, 7 से विभाज्य है इसलिए 427 भी 7 से विभाज्य है
29792 2975 287	2979 297 28	$2 \times 2 = 4$ $2 \times 5 = 10$ $2 \times 7 = 14$	$2979 - 4 = 2975$ $297 - 10 = 287$ $28 - 14 = 14$	शेष संख्या 2975 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 287 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 14, 7 से विभाज्य है इसलिए 29792 भी 7 से विभाज्य है
अब 2308012 को हल करें				

की-वर्ड : गुणनखण्ड, विभाज्यता, जाँच, नियम, औचित्य

उपरोक्त उदाहरणों से समझ में आता है कि यह विधि तीन-अंकीय संख्या के लिए लम्बे विभाजन के बिना 7 से विभाज्यता की जाँच करने के लिए उपयोगी है, लेकिन 4 या ज़्यादा अंकों वाली संख्याओं के लिए काफ़ी लम्बी है।

नियम का आधार

माना कि $N = 1000\ a_3 + 100\ \ a_2 + 10\ a_1 + a_0$

(जहाँ a_0, a_1, a_2, a_3 4 अंकों की संख्या N के अंक हैं)

नियम के अनुसार, हम N के इकाई अंक के बिना, यानी छँटी हुई संख्या (जैसे N_T) लिखते हैं, और फिर छँटी हुई संख्या (N_T) में से इकाई अंक का दुगना घटाकर एक नई संख्या (M) प्राप्त करते हैं।

$N_T = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1$ (संख्या के छँटने के बाद स्थानीय मानों में परिवर्तन पर ध्यान दें।)

$M = N_T - 2a_0 = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 - 2a_0$

हमारा नियम कहता है कि यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है।

मान लें कि M, 7 का गुणज है, यानी किसी पूर्ण संख्या k के लिए $M = 7k$।

इसलिए, $M = 7k = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 - 2a_0$

या $100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 = 7k + 2a_0$

N में इस मान को रखने पर,

$N = 1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10\ a_1 + a_0$

$N = (1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10\ a_1) + a_0 = 10\ (100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1) + a_0$

$= 10\ (7k + 2a_0) + a_0 = 70k + 21a_0 = 7\ (10k + 3a_0)$

इसलिए, यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है। इसे आसानी से कितने भी अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

विधि-2 : इकाई अंक को 5 से गुणा करना

दी गई संख्या लीजिए	इकाई अंक हटा दें और छँटी (बची) हुई संख्या लिखें	हटाए गए इकाई अंक को 5 से गुणा करें	परिणाम को छँटी हुई संख्या में जोड़ें	यदि योग या तो 0 है या 7 का गुणज है, तो मूल संख्या 7 से विभाज्य है (यदि आवश्यक हो तो इस प्रक्रिया को दोहराएँ)
378	37	8 × 5 = 40	37 + 40 = 77	77, 7 से विभाज्य है इसलिए 378 भी 7 से विभाज्य है
2464	246	5 × 4 = 20	246 + 20 = 266	266 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ
266	26	5 × 6 = 30	26 + 30 = 56	56, 7 का गुणज है, इसलिए 266 और 2464 दोनों संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं
29792 2989 343	2979 298 34	2 × 5 = 10 9 × 5 = 45 3 × 5 = 15	2979 + 10 = 2989 298 + 45 = 343 34 + 15 = 49	2989 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 343 के लिए प्रक्रिया को दोहराएँ 49, 7 का गुणज है इसलिए 343, 2989 और 29792, तीनों संख्याएँ 7 से विभाज्य हैं
अब 2308012 को हल करें				

इस विधि के लिए, कोई भी निम्नानुसार औचित्य प्रदान कर सकता है, जो बहुत हद तक पिछले वाले के समान ही है।

माना कि $N = 1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10\ a_1 + a_0$

(जहाँ a_0, a_1, a_2, a_3, 4 अंकों की संख्या, N के अंक हैं)

नियम के अनुसार हम N के इकाई अंक के बिना, यानी छँटी हुई संख्या (जैसे N_T) लिखते हैं, और फिर N_T में इकाई अंक का पाँच गुना जोड़कर एक नई संख्या (मान लें M) प्राप्त करते हैं।

$N_T = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1$ (संख्या छाँटने के बाद स्थानीय मानों में परिवर्तन पर ध्यान दें।)

$M = N_T + 5a_0 = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 + 5a_0$

हमारा नियम कहता है कि यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है।

मान लें कि M, 7 का गुणज है, यानी किसी पूर्ण संख्या k के लिए $M = 7k$।

इसलिए, $M = 7k = 100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 + 5a_0$

या $100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1 = 7k - 5a_0$

N में इस मान को रखने पर,

$N = 1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10a_1 + a_0$

$N = (1000\ a_3 + 100\ a_2 + 10a_1) + a_0 = 10\ (100\ a_3 + 10\ a_2 + a_1) + a_0$

$= 10\ (7k - 5a_0) + a_0 = 70k - 49a_0 = 7\ (10k - 7a_0)$

इसलिए, यदि M, 7 का गुणज है, तो N भी 7 का गुणज है। इसे आसानी से कितने भी अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

विधि-3 : अंकों का समूह बनाना (नियम 1-3-2)

कोई भी संख्या लीजिए	इकाई अंक से आरम्भ करते हुए तीन अंकों के समूह बनाएँ	प्रत्येक समूह में सबसे दाएँ वाले अंक को 1 से, अगले वाले को 3 से और सबसे बाएँ वाले अंक को 2 से गुणा करें	सभी विषम समूहों को जोड़ें	सभी सम समूहों को जोड़ें	$(c\text{-}d)$ का अन्तर
	a	b	c	d	e
$N_1 = 672$	672	$6 \times 2 + 7 \times 3 + 2 \times 1 = 35$	35	0	35
परिणाम	$\lvert c-d \rvert = 35$, 7 से विभाज्य है। अतः संख्या N_1 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_2 = 4704$	004 704	$4 \times 1 = 4$ $7 \times 2 + 0 \times 3 + 4 \times 1 = 18$	18	4	$\lvert 18 - 4 \rvert = 14$
परिणाम	$\lvert c-d \rvert = 14$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_2 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_3 = 32921$	032 921	$3 \times 3 + 2 \times 1 = 11$ $9 \times 2 + 2 \times 3 + 1 \times 1 = 25$	25	11	$\lvert 25 - 11 \rvert = 14$
परिणाम	$\lvert c-d \rvert = 14$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_3 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_4 = 197526$	197 526	$1 \times 2 + 9 \times 3 + 7 \times 1 = 36$ $5 \times 2 + 2 \times 3 + 6 \times 1 = 22$	22	36	$\lvert 22 - 6 \rvert = 14$
परिणाम	$\lvert c-d \rvert = 14$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_4 भी 7 से विभाज्य है।				
$N_5 =$ 164953525268	164 953 525 268	$1 \times 2 + 6 \times 3 + 4 \times 1 = 24$ $9 \times 2 + 5 \times 3 + 3 \times 1 = 36$ $5 \times 2 + 2 \times 3 + 5 \times 1 = 21$ $2 \times 2 + 6 \times 3 + 8 \times 1 = 30$	30+36 = 66	21+24 = 45	$\lvert 66 - 45 \rvert = 21$
परिणाम	$\lvert c-d \rvert = 21$, 7 से विभाज्य है इसलिए, संख्या N_5 भी 7 से विभाज्य है।				

यह 7 से विभाज्यता की जाँच करने का एक और तरीक़ा है। आइए इसे चरण-दर-चरण समझते हैं।

1. संख्या के इकाई स्थान से आरम्भ करते हुए तीन अंकों के समूह बनाएँ। शेष अंक अन्तिम समूह में शामिल होंगे। क्रमशः पहला समूह विषम, दूसरा समूह सम, तीसरा विषम वग़ैरह होंगे।
2. प्रत्येक समूह में सबसे दाएँ अंक को 1 से, अगले वाले को 3 से और सबसे बाएँ वाले अंक को 2 से गुणा करें।
3. प्रत्येक समूह में प्राप्त सभी गुणनफल को जोड़ें।
4. विषम और सम समूहों का योग ज्ञात कीजिए।
5. यदि इन दोनों योगों का अन्तर, 7 से विभाज्य है या 0 है, तो मूल संख्या 7 से विभाज्य होगी।

नियम का आधार

मान लीजिए $N = 100000\, a_5 + 10000\, a_4 + 1000\, a_3 + 100\, a_2 + 10\, a_1 + a_0$

(जहाँ $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$, 6 अंकों की संख्या, N के अंक हैं)

$S_1 = a_0 \times 1 + a_{1,} \times 3 + a_2 \times 2$ $\qquad$ $S_2 = a_3 \times 1 + a_4 \times 3 + a_5 \times 2$

$M = S_1 - S_2$

हमारा नियम कहता है कि यदि *M*, *7* का गुणज है, तो *N* भी *7* का गुणज है।

मान लें कि *M*, 7 का गुणज है, यानी किसी पूर्ण संख्या *k* के लिए $M = 7k$।

$7k = (a_0 \times 1 + a_1 \times 3 + a_2 \times 2) – (a_3 \times 1 + a_4 \times 3 + a_5 \times 2) = (-2a_5 – 3a_4 – a_3 + 2_{a2} + 3a_1 + a_0)$

$N = (100002a_5 – 2a_5) + (10003a_4 – 3a_4) + (1001a_3 – a_3) + (98a_2 + 2a_2) + (7a_1 + 3a_1) + a_0$

$N = 7(14286a_5 + 1428a_4 + 143a_3 + 14a_2 + a_1) + (–2a_5 – 3a_4 – a_3 + 2a_2 + 3a_1 + a_0)$

$N = 7(14286a_5 + 1428a_4 + 143a_3 + 14a_2 + a_1) + 7k$

इसलिए, यदि *M 7 का गुणज है, तो N* भी 7 का गुणज है। इसे आसानी से कितने भी अंकों वाली संख्या के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

नोट : नियम 1-3-2 का उपयोग 2 या अधिक अंकों वाली किसी भी संख्या के लिए किया जा सकता है। यह हमें किसी भी संख्या की 7 से विभाज्यता आसानी से और शीघ्रता से ज्ञात करने में मदद कर सकता है।

तुलना

तरीक़ा	**आवश्यक संक्रियाएँ**	**टिप्पणी**
इकाई अंक को दोगुना करना	×, –	2 या 3 अंकीय संख्याओं के लिए उपयोगी।
इकाई अंक को 5 से गुणा करना	×, +	2 या 3 अंकीय संख्याओं के लिए उपयोगी।
नियम 132	×, +, –, समूहीकरण	तीन अंक से अधिक अंक वाली संख्याओं के लिए उपयोगी।

इस तरह की खोजबीन से शिक्षकों को ऐसे पाठों की योजना बनाने में मदद मिलती है, *जिससे विद्यार्थियों में समस्या समाधान, तार्किक सोच और गणनात्मक (अभिकलनात्मक) सोच की क्षमता विकसित होती है। विद्यार्थी गणित और गणनात्मक सोच की अमूर्तताओं और अन्य मुख्य तकनीकों, जैसे घटनाओं की गणितीय मॉडलिंग और समस्याओं को हल करने के लिए कलन के विकास के साथ काम करने में सहज हो जाते हैं।* (एनसीएफ़-एसई 2023)।

यदि विभाज्यता नियमों का शिक्षण संख्या कौशल का अभ्यास करने पर ही रुक जाता है, तो हम ऐसे समृद्ध विषय की क्षमता को, गम्भीर रूप से सीमित कर रहे हैं। यह पूछना कि नियम क्यों काम करता है, इसका सामान्यीकरण करने का प्रयास करना, विभिन्न नियमों की तुलना करना और फिर अपने स्वयं के नियम बनाने का प्रयास करना, विद्यार्थियों में न केवल गणितीय क्षमता विकसित करेगा बल्कि विषय का आनन्द और सौन्दर्य की समझ भी प्रदान करेगा।

Reference

1. http://publications.azimpremjifoundation.org/2306/1/3_Chika%27s_test_for_divisibility_by_7.pdf
2. https://ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf

जितेन्द्र वर्मा ज़िला धार, मध्य प्रदेश में अज़ीम प्रेमजी फ़ाउंडेशन में स्रोत व्यक्ति हैं। उन्होंने इग्नू नई दिल्ली से वित्त में एमबीए किया है। जितेन्द्र ने मध्य प्रदेश के पब्लिक स्कूलों में गणित शिक्षक और प्रिंसिपल के रूप में काम किया। वर्तमान में वे वैचारिक समझ के साथ-साथ गणित पढ़ाने में उपयोग की जाने वाली शैक्षणिक प्रक्रियाओं पर ध्यान केन्द्रित कर रहे हैं। वे 5 वर्षों से अधिक समय से शिक्षकों और बच्चों के साथ गणित पर काम कर रहे हैं। वे गणित से जुड़ी भ्रान्तियों को दूर करने और गणित को आसानी से सीखने और समझने के लिए शिक्षण संसाधनों की खोज और डिज़ाइन करने में संलग्न हैं। उनसे Jitendra.verma@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : यशोधरा कनेरिया **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय

गणित बहुत आसान काम है!

***एट राईट एंगल्स* नवम्बर 2023 अंक में प्रकाशित चुनौती**

हमने एक स्वादिष्ट चॉकलेट केक को 12 टुकड़ों में बाँटा और प्रत्येक टुकड़े को आधी प्लेट में परोसा!

आपकी चुनौती है कि इस स्थिति से आप गणित के कितने प्रश्न बना सकते हैं?

अपने प्रश्न AtRiA.editor@apu.edu.in पर भेजें।

दो पाठकों की प्रतिक्रियाएँ हम यहाँ प्रकाशित कर रहे हैं।

पाठक की प्रतिक्रिया

रोहिणी खापर्डे

rohin.haparde@mgsnagpur.org

स्कूल ऑफ स्कॉलर्स, अकोला।

सम्बद्धता संख्या 1130166

1. दो-तिहाई केक परोसने के लिए कितनी प्लेटों की आवश्यकता होगी?
2. यदि 12 टुकड़ों में से केवल 8 को ही परोसा जाना है, तो इतने केक को परोसने के लिए आवश्यक प्लेटों की संख्या और पूरे केक को परोसने के लिए आवश्यक प्लेटों की संख्या का अनुपात क्या है?

पाठक की प्रतिक्रिया

आस्तिक यादव

astikyadav@mgsnagpur.org

स्कूल ऑफ स्कॉलर्स हुडकेश्वर, नागपुर

1. यदि काटने से पहले मूल गोलाकार केक की त्रिज्या ‘r’ है और केक को 12 बराबर टुकड़ों में काटा जाता है और प्रत्येक को ‘p’ त्रिज्या वाली आधी प्लेट पर परोसा जाता है। केक के एक टुकड़े के क्षेत्रफल और एक आधी प्लेट के क्षेत्रफल के अनुपात की गणना ‘r’ और ‘p’ के रूप में करें।
2. यदि किसी ने एक तिहाई केक खा लिया, तो केक का कितना भाग शेष रह गया?
3. यदि आप पूरे केक को 100% मानें तो प्रत्येक प्लेट पर केक का कितना प्रतिशत है?
4. यदि कोई केक के 3 टुकड़े खाता है, तो उसने पूरे केक का कितना भाग खाया है?
5. यदि हम केक को 4 लोगों में बराबर-बराबर बाँटना चाहें तो प्रत्येक व्यक्ति को कितने टुकड़े मिलेंगे?

बत्ती गुल! के लिए सवालों के हमारे सुझाव

1. मान लो कि घर 3×3 का एक वर्ग है जिसमें 9 कमरे हैं। यदि शुरुआत में सभी कमरों की सभी बत्तियाँ ‘चालू’ हों तो क्या आप सारी बत्तियों को बन्द कर सकते हैं? ऐसा करने के लिए आपको कम-से-कम कितने प्रयास करने होंगे?
2. क्या आप $n \times n$ के एक वर्ग के लिए इसका सामान्यीकरण कर सकते हैं?
3. अगर घर की आकृति $m \times n$ के एक आयत जैसी हो, तो इस स्थिति के लिए क्या आप इस सवाल को विस्तार दे सकते हैं?
4. क्या आप $2 \times 2 \times 2$ के एक घन के लिए इस सवाल को विस्तार दे सकते हैं?

आप और किस तरह के विस्तार व सामान्यीकरणों के बारे में सोच सकते हैं? इन सवालों को आप कैसे हल करेंगे?

आप अपने जवाब और/या आपके द्वारा बनाई गई कोई भी पहेली AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेज सकते हैं।