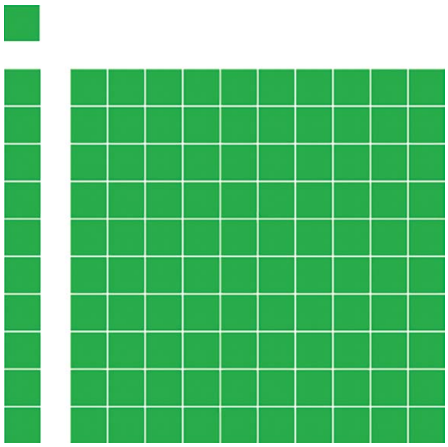
द्विविमीय आधार-10 ब्लॉक

(जिसे फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स भी कहते हैं)

मैथ स्पेस

सीखने-सिखाने की कई सामग्री आधार 10 (बेस 10) की संरचना को समझने में और यह समझने में मदद करती हैं कि हम पूर्ण संख्याओं की संकल्पना और उपयोग कैसे करते हैं। इनमें से कुछ चार संक्रियाओं से परिचित करवाने और उनका अन्वेषण करने में भी सहायता करती हैं। हमने पाया कि इनमें से सबसे बढ़िया 'द्विविमीय आधार-10 ब्लॉक' (2D base -10 block) है जो फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स (सपाट-लम्बे-इकाई) - FLU के नाम से लोकप्रिय है।



चित्र-1

इकाई एक छोटा वर्ग है या 1 है। 'लॉन्ग' (लम्बा) इकाई का 10 गुना है और इसलिए 10 है। 'फ्लैट' एक बड़ा चपटा वर्ग है जो इकाई का 100 गुना और लॉन्ग का 10 गुना है, इसलिए यह 100 है। **चित्र-1** इन बुनियादी ब्लॉक को दर्शाता है। तीनों प्रकार के ब्लॉक एक ही रंग के होने चाहिए। इसका कारण नीचे बताया गया है।

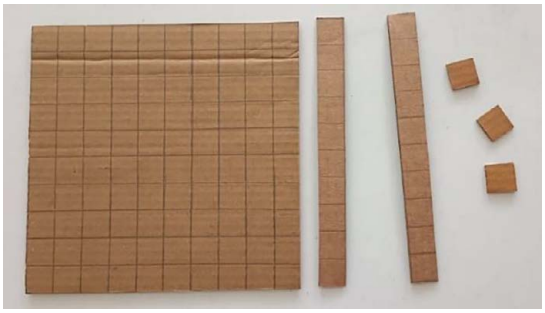
चूँकि यह एक पूर्व-समूहीकृत आनुपातिक सामग्री है, इसलिए 'लॉन्ग' को 10 इकाइयों में विभाजित नहीं किया जा सकता है। तो, इसका विनिमय 10 इकाइयों के लिए होगा। इसी तरह 10 लॉन्ग के लिए एक फ्लैट का आदान-प्रदान करना होगा। इस पूर्व-समूहित प्रकृति के कारण FLU प्रत्यक्ष समूहीकरण

की-वर्ड : *सीखने-सिखाने की सामग्री (टीएलएम), स्थानीय मान, संख्या संक्रिया, मानसिक चित्रण*

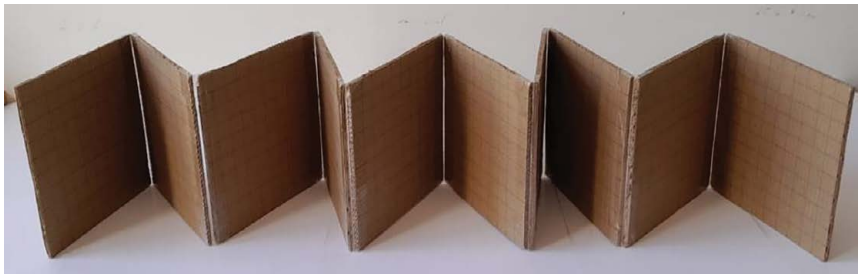
और असमूहीकरण का अनुभव प्रदान नहीं कर सकता है, जैसा समूहीकृत सामग्री (उदाहरण के लिए तीलियों के बण्डल) प्रदान करते हैं। इसलिए सलाह दी जाती है कि FLU का उपयोग कुछ समूहीकरण योग्य सामग्री से थोड़े अनुभव के बाद किया जाए।

हम सलाह देते हैं कि छोटे बच्चों के लिए यानी बुनियादी स्तर पर, पूर्व-प्राथमिक और कक्षा-1 और 2 में, नालीदार (कोरुगेटेड) कार्डबोर्ड से बना थोड़ा बड़ा संस्करण प्रदान किया जाए (**चित्र-2**)। ब्लॉक के आकार निम्नानुसार हो सकते हैं :

- इकाई : 2 सेमी × 2 सेमी
- लम्बाई : 20 सेमी × 2 सेमी
- चौड़ाई : 20 सेमी × 20 सेमी

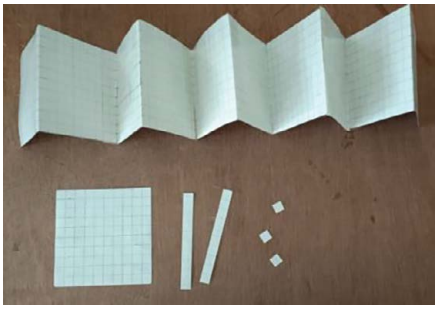


चित्र-2



चित्र-3

यदि इस स्तर पर बच्चों को 1000 से परिचित कराया जाता है, तो उसे 10 फ्लैट को पारदर्शी सेलो-टेप से जोड़कर भी बनाया जा सकता है (**चित्र-3**)।



चित्र-4

बड़े बच्चे, यानी प्रारम्भिक और मध्य चरण में (क्रमशः कक्षा-3 से 5 और कक्षा-6 से 8), के लिए मोटे चार्ट पेपर या मोटे पोस्टर पर चौखाना नोटबुक को चिपकाकर छोटे ब्लॉक का उपयोग किया जा सकता है (**चित्र-4**)।

FLU का उपयोग इन कार्यों के लिए किया जा सकता है :

- पूर्ण संख्याओं की तुलना करना।
- जोड़-घटाव, विशेष रूप से मानक कलन विधि की रचना करना।
- गुणा और भाग, दोनों के लिए सारणी की धारणा का उपयोग करके।
- वर्ग और वर्गमूल — दीर्घ विभाजन विधि द्वारा वर्गमूल ज्ञात करने के लिए कलन विधि का परिचय और रचना करना।

प्रत्येक उपयोग के लिए पर्याप्त ब्लॉक्स की पर्याप्त संख्या होनी चाहिए :

- जोड़-घटाव — प्रत्येक प्रकार के कम-से-कम 20।
- गुणा-भाग — कम-से-कम 12-20 फ्लैट, 90 लॉन्ग और 90 यूनिट।
- वर्ग और वर्गमूल — गुणन-विभाजन के समान।

जब बच्चे पूर्ण संख्याओं के साथ खेलना शुरू करते हैं (उनकी तुलना करना और चारों संक्रियाओं का उपयोग करना), तो उनका काम नियमों और कलन विधि के पीछे के कारण को समझे बिना मात्र प्रतीकात्मक हेर-फेर तक ही सीमित हो जाता है। FLU संख्याओं और उनके द्वारा दर्शाई गई मात्राओं से जोड़कर इस अन्तर को काफ़ी अच्छी तरह से भर देता है।

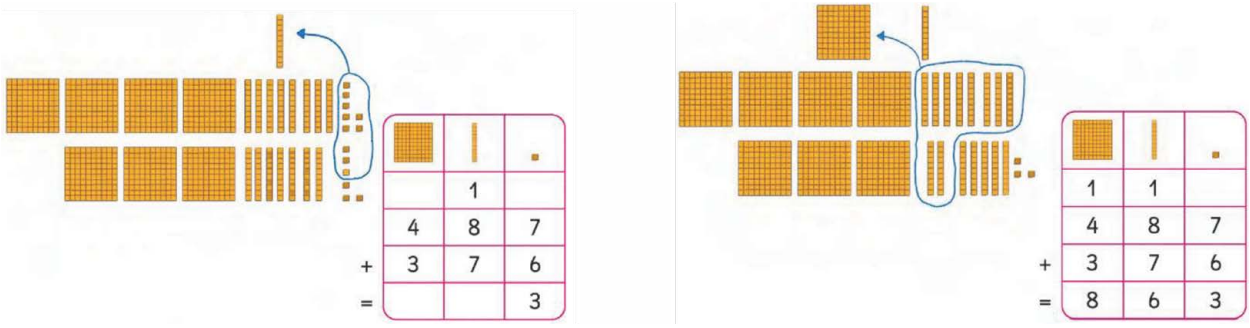
दो पूर्ण संख्याओं की तुलना करते समय, FLU विद्यार्थी को यह समझने में मदद करता है कि एक लॉन्ग 9 यूनिट से बड़ा है

और इसी तरह एक फ्लैट 9 लॉन्ग (या 90 यूनिट) से बड़ा है। इसलिए, कोई भी 2 अंक की संख्या 1 अंक की संख्या से बड़ी होती है और इसी प्रकार कोई भी 3 अंक की संख्या किसी भी 2 अंक की संख्या से बड़ी होती है। इस प्रकार के अवलोकन को सामान्यीकृत किया जा सकता है। जैसे, "अधिक अंकों वाली पूर्ण संख्या बड़ी होती है", उदाहरण के लिए 10002 > 98। कोई यह निष्कर्ष भी निकाल सकता है कि यदि दो अंकों वाली दो संख्याओं में पहला अंक अलग-अलग है, तो उन्हें लॉन्स की अलग-अलग संख्याओं के साथ दर्शाया जाता है। स्वाभाविक रूप से, अधिक लॉन्ग वाली संख्या बड़ी होती है। अर्थात, "यदि दो संख्याओं में अंकों की संख्या समान है, तो बड़े पहले अंक वाली संख्या बड़ी होती है।" उदाहरण के लिए: 43 > 34। यही निष्कर्ष उन्हें यह तर्क करने में भी मदद कर सकता है कि 403 > 289। और अन्त में, यदि पहले अंक बराबर हैं, तो हमें अगले अंकों की मात्राओं की जाँच करनी चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि 3 अंक वाली 2 संख्याओं के पहले अंक समान हैं, तो हमें प्रत्येक को दर्शाने के लिए आवश्यक 'लॉन्ग' की संख्या की जाँच करनी होगी। अर्थात, दाईं ओर का अगला अंक। उदाहरण के लिए 640 > 638। यदि वे भी समान हैं, फिर अगले अंकों की जाँच करें। उदाहरण के लिए 756 > 753। इस प्रकार, अन्तिम नियम पर पहुँचते हैं, "यदि पहला अंक समान है, तो दाईं ओर के अगले अंक की जाँच करें, बड़ा अंक ⟹ बड़ी संख्या" और "यह तब तक जारी रखें जब तक अंक असमान न हो जाएँ।"

स्तम्भ जोड़ना और 'हासिल' (कैरी ओवर) या पुनर्समूहन कुछ सरल विचारों के साथ स्वयं हो जाता है :

- FLU का उपयोग करके जोड़ी जाने वाली प्रत्येक संख्या बनाना।
- योग का अर्थ है मिलाना।
- जब भी, एक प्रकार के 10 हों, तो अगले बड़े ब्लॉक के साथ आदान-प्रदान करें — अर्थात, यदि 10 या अधिक 'यूनिट' हैं तो 10 यूनिट को एक 'लॉन्ग' से बदलें या यदि 10 या अधिक लॉन्ग हैं तो उनमें से 10 को एक 'फ्लैट' से बदलें।

शिक्षक यह दर्शा सकता है कि कलन विधि इसे रिकॉर्ड करने का एक तरीक़ा मात्र है। **चित्र-5** इसे 487 + 376 के लिए दर्शाता है।



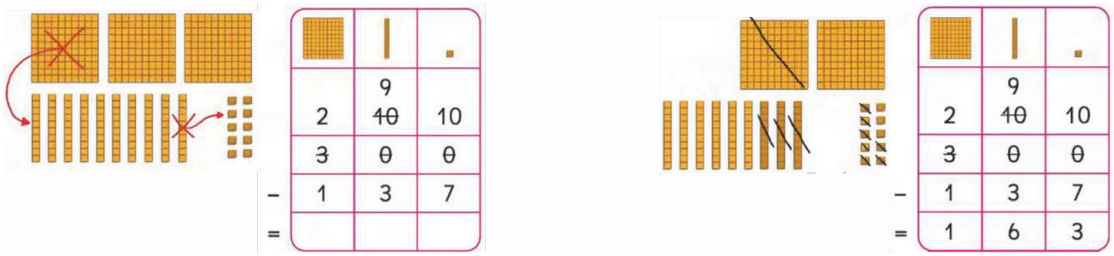
चित्र-5

घटाव के लिए भी समान प्रक्रिया होगी :

- FLU का उपयोग करके पहली संख्या बनाना।
- दूसरी संख्या का मानसिक चित्रण करना, विशेष रूप से इसे बनाने के लिए ज़रूरी FLU।
- घटाव (व्यवकलन) का अर्थ है 'कम करना'।
- यदि आवश्यक हो, तो लॉन्ग और फ़्लैट का आदान-प्रदान करें, ताकि घटाने के लिए प्रत्येक प्रकार पर्याप्त मात्रा में हो।

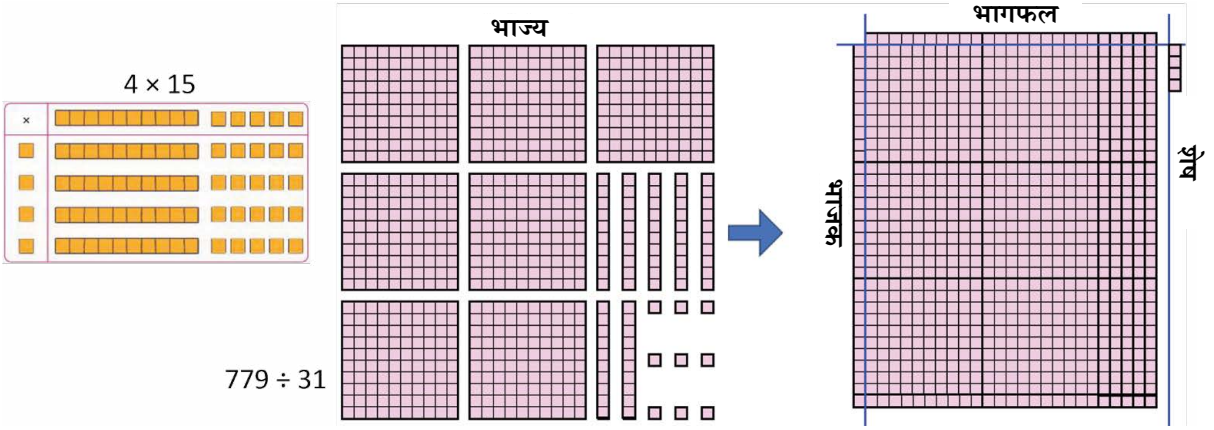
फिर, शिक्षक यह दर्शाने में मदद कर सकते हैं कि मानक कलन विधि इसे कैसे प्रदर्शित करती है। **चित्र-6** में इसे 300-137 के लिए दर्शाया गया है। यह एक कठिन घटाव (व्यवकलन) है जहाँ शुरुआत में ही दो दौर के आदान-प्रदान की आवश्यकता होती है!

पूर्ण संख्याओं का विभाजन नामक लेख में हम पूर्ण संख्याओं के विभाजन का वर्णन पहले ही कर चुके हैं। **चित्र-7** में गुणन का एक उदाहरण (4 × 15) और भाग के लिए दूसरा उदाहरण (779 ÷ 31) दर्शाया गया है।



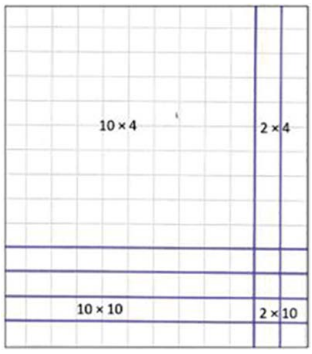
चित्र-6

आमतौर पर FLU, बड़े और छोटे दोनों संस्करण, बनाते समय ऐसी सारणी का सामना करना पड़ता है। **चित्र-8** में 14 × 12 को दर्शाने के लिए आवश्यक सामग्री दर्शाई गई है, यानी 1 फ्लैट, 4 + 2 = 6 लॉन्ग और 2 × 4 = 8 यूनिट जो चौखाने काग़ज़ की एक शीट से बनाई जा सकती हैं।



चित्र-7

वर्गों को गुणन का एक विशेष मामला माना जा सकता है। विशेष रूप से 2-अंक की संख्याओं के वर्ग, $(a + b)^2$ के पैटर्न से मिलते-जुलते होते हैं। वर्गमूल ज्ञात करने के लिए विभाजन कलन विधि में इसी समानता का उपयोग किया जाता है और इसे FLU का उपयोग करके शुरू किया जा सकता है।



चित्र-8

अलबत्ता, चूँकि यह बहुत बाद में, उच्च कक्षा के विद्यार्थियों के साथ किया जाता है, वास्तविक मैनिप्यूलेटिव्स की आवश्यकता कम होगी। लेकिन आप इस विचार का उपयोग तस्वीर और कच्चे चित्र बनाने के लिए कर सकते हैं। मैथिगॉन पॉलीपैड (Mathigon Polypad) सहित कई आभासी मैनिप्यूलेटिव्स साइट वर्चुअल FLU प्रदान करती हैं, जो वास्तविक मैनिप्यूलेटिव्स के समान ही अच्छे हैं। हालाँकि, ये अलग-अलग रंगों में आते हैं। लेकिन अच्छी बात है कि इनका रंग बदला जा सकता है। **चित्र-1** पॉलीपैड का उपयोग करके तैयार किया गया था।

FLU को आसानी से दशमलव तक बढ़ाया जा सकता है क्योंकि इसका आधार-10 है। हालाँकि, कुछ महत्त्वपूर्ण परिवर्तन करने होंगे।

- फ्लैट 1 पूर्ण हो जाता है और इसलिए, भीतर कोई रेखाएँ नहीं होनी चाहिए।
- लॉन्ग फ्लैट का 1/10 वाँ हिस्सा है, यानी 0.1 और इसमें भी कोई रेखा नहीं होनी चाहिए।
- इकाई लॉन्ग का 1/10 वाँ हिस्सा हैं, अर्थात फ्लैट का 1/100 वाँ हिस्सा है, यानी 0.01।

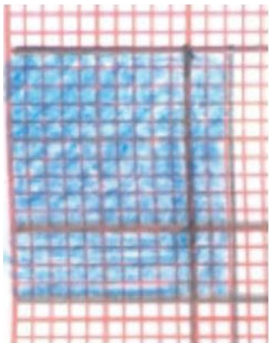
हम कोई रेखा नहीं रखने की अनुशंसा करते हैं ताकि विद्यार्थी दशमलव FLU में बड़े वर्ग को 1 या पूर्ण के रूप में देख सकें। यदि इसमें रेखाएँ होंगी, तो विद्यार्थी गिनने लगेंगे और यह 1 रहने की बजाय 100 हो जाएगी। चूँकि जब विद्यार्थी दशमलव के साथ काम करना शुरू करेंगे तब उनकी उम्र अधिक रहेगी, इसलिए वास्तविक मैनिप्यूलेटिव्स साधनों की आवश्यकता कम होगी और ज़्यादा ध्यान चौखाना काग़ज़ पर चित्र बनाने को लेकर होना चाहिए। यह काम, चौखाना नोटबुक और बाद में सेंटीमीटर ग्राफ़ पेपर पर किया जा सकता है :

- 10 सेमी × 10 सेमी का वर्ग 1 माना जाएगा।
- 10 सेमी × 1 सेमी का आयत 0.1 माना जाएगा।
- 1 सेमी × 1 सेमी का वर्ग और 10 सेमी × 1 मिमी का आयत 0.01 माना जाएगा। बाद वाला चित्र 0.34 × 0.27 जैसे दशमलव गुणन में बहुत उपयोगी है।
- 1 सेमी × 1 मिमी आयत 0.001 माना जाएगा।
- 1 मिमी × 1 मिमी वर्ग 0.0001 माना जाएगा।

जोड़ और घटाव लगभग पहले जैसे ही हैं। गुणन भी काफ़ी हद तक पूर्ण संख्या के समकक्ष उदाहरण से काफ़ी मिलता जुलता है।

चित्र-9 ग्राफ़ पेपर पर 0.14 × 0.12 को दर्शाता है, जो 14 × 12 के समान ही है।

FLU बीजगणितीय टाइलों को आधार के रूप में सामान्यीकृत भी करता है, अर्थात 10 को चर x द्वारा बदल दिया जाता है। हम बीजगणितीय टाइलों पर आगे के अंक में चर्चा करेंगे। लेकिन यहाँ यह उल्लेख करना आवश्यक है कि प्रक्रियाएँ, विशेषकर गुणन और भाग के सन्दर्भ में, समान ही हैं!



चित्र-9

यह उल्लेखनीय है कि अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय की अनुपमा एस. एम. ने सामान्य FLU को 1000 तक बढ़ाया है।

References

1. How to make FLU (including a thousand): https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/matherials#h.r8y4lfrj399c
2. Addition-subtraction with FLU (ppt): https://drive.google.com/file/d/1ALzKVaLe3cZfvZxsG38ObpHh55ChGLY7/view
3. Multiplication with FLU (ppt): https://drive.google.com/file/d/1G1LY8Btc1lsF5zuYpnFTQPBpFtDKlASg/view
4. Division with FLU (ppt): https://drive.google.com/file/d/17HS5ygXG-3aWrhmv3WZPskLZMHZ_sJri/view
5. Sikkim math textbook, Class 3: https://www.scertsikkim.ac.in/_files/ugd/05f8ad_d72c9029dc8f438cbcfb0026ff982a62.pdf
6. Chand, Amit: How the Square Root Algorithm Works, At Right Angles, Mar 2021 http://publications.azimpremjifoundation.org/2655/1/4_How%20the%20Square%20Root%20Algorithm%20works.pdf
7. Mathigon Polypad: https://mathigon.org/polypad#numbers

मैथ स्पेस अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय में एक गणित प्रयोगशाला है जो विद्यालयों, शिक्षकों, अभिभावकों, बच्चों, स्कूली शिक्षा में कार्य कर रहे ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों की ज़रूरतों को पूरा करती है। यह गणित के लिए सीखने-सिखाने की विभिन्न सामग्री [mat(h)erials] और साथ-साथ कम लागत वाले संस्करणों की सम्भावना की खोज करती है जिन्हें कबाड़ से बनाया जा सकता है। यह गणित को दो तरह से सम्बोधित करने का प्रयास करती है, उनके लिए जो गणित से डरते हैं या नफ़रत करते हैं और उनके लिए भी जो इससे जुड़ना पसन्द करते हैं। यह एक ऐसा स्थान है जहाँ कई लोगों के साथ बातचीत के माध्यम से विचार उत्पन्न होते हैं और विकसित होते हैं। मैथ स्पेस से mathspace@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : कुमार गन्धर्व **पुनरीक्षण :** सुशील जोशी **कॉपी एडिटर :** अनुज उपाध्याय