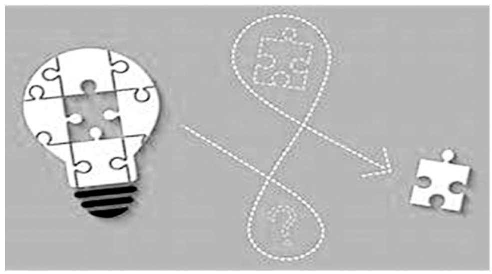
समस्या समाधान एवं उसकी कसौटी

मनोज कुमार शराफ़

आम ज़िन्दगी में किसी समस्या से सामना होने पर हम समस्या को पहचानते हुए उसके अलग-अलग हल ढूँढ़ने की कोशिश करते हैं। गणितीय समस्या आम ज़िन्दगी की समस्या से कुछ फ़र्क़ होती है, लेकिन उसमें भी समस्या को पहचानना और उसके अलग-अलग हल क्या हो सकते हैं, इसके बारे में सोचना शामिल है। इस लेख में कुछ दिलचस्प गणितीय समस्याओं और उनके समाधान के विभिन्न तरीक़ों पर विचार किया गया है। लेख यह भी दर्शाता है कि एक ही समस्या को हल करने के कई तरीक़े हो सकते हैं। अन्त में कुछ समस्याएँ भी दी गई हैं जिन्हें हल करने का प्रयास हम सभी कर सकते हैं। -सं.

पिछले कई महीनों से मैं एक बात सुन रहा हूँ कि इस बार के *एनसीएफ़-एसई* 2023 में समस्या समाधान पर विशेष ज़ोर दिया गया है। इस सन्दर्भ में मुझे दो कहानियाँ याद आती हैं। संयोगवश दोनों ही कहानी उन किसानों से सम्बन्धित हैं जिनकी औपचारिक शिक्षा नहीं हुई थी। पहली कहानी कुछ इस तरह है।

एक बार दो कारीगर बहस कर रहे थे कि उनके पास 3 मीटर की जो रस्सी है उसके चार बराबर टुकड़े कैसे करें। चूँकि इस रस्सी की लम्बाई 3 मीटर थी, और इसलिए यह अच्छी-ख़ासी समस्या थी। जब वे 3 मीटर को 4 से विभाजित कर रहे थे तब उन्हें उत्तर के रूप में 0.75 मीटर मिल रहा था। अब समस्या यह थी कि उनके पास एक मीटर से कम लम्बाई नापने का कोई उपकरण नहीं था, तब वे उस रस्सी के 0.75 मीटर के चार टुकड़े कैसे करते? वहाँ से निकलने वाले किसान ने उनकी समस्या सुनी, और एक प्रयास करने का अवसर माँगा। पहले तो वे कारीगर हैरान हुए कि यह किसान उनकी समस्या को हल करने का दावा कर रहा है। लेकिन और कोई उपाय न होने के कारण उन्होंने उस किसान को एक अवसर देने का



चित्र 1

फ़ैसला किया। किसान ने पहले रस्सी को दो फ़ोल्ड किया फिर उसे दोबारा दो फ़ोल्ड करके, फ़ोल्ड होने वाले स्थान पर निशान लगा दिए। इस प्रकार बिना मापे भी रस्सी के बराबर चार टुकड़े कर दिए गए।

दूसरी कहानी भी इससे कुछ अलग नहीं है। दो इंजीनियर एक टेढ़े-मेढ़े पाइप से बिजली के एक पतले तार (लगभग धागे जैसे पतले और मुलायम) को इस पार से उस पार गुज़ारना चाहते थे। उन्होंने कई जतन कर लिए थे पर सफलता हाथ नहीं आ रही थी। संयोग से वहाँ भी एक किसान गुज़र रहा था। उसने उनकी समस्या सुनी, और उन इंजीनियरों से एक अवसर माँगा। पहले तो उसकी बात को नहीं

माना गया, पर अन्य कोई उपाय नहीं देखकर उसे एक अवसर देना स्वीकार कर लिया गया। किसान ने एक पतले लेकिन कम कोमल तार के एक सिरे में उस पतले तार को कसकर बाँध दिया। वह धीरे-धीरे उसे पाइप से वैसे ही गुज़ारने लगा जैसे लोग पजामे में नाड़ा लगाते हैं। कई दफ़ा उसे, उस तार के जोड़े को उमेठना भी पड़ा, पर अन्त में तार का यह जोड़ा पाइप के दूसरे सिरे तक पहुँच ही गया। फिर क्या था पतले तार को आगे की ओर व दूसरे तार को पीछे की ओर खींच लिया गया।

समस्या समाधान की ये दोनों प्रक्रियाएँ औपचारिक शिक्षा के बाहर किन्तु स्वाभाविक सहज बुद्धि पर निर्भर हैं। उपरोक्त दोनों कहानियों से ऐसा प्रतीत होता है जैसे सभी समस्याओं का समाधान सहज बुद्धि से सम्भव है। लेकिन चर्चा को आगे बढ़ाने से पहले हमें यह देखना चाहिए कि आख़िर समस्या और उसके समाधान से हमारा क्या अभिप्राय है। समस्या (गणितीय) वह है जिसका सामना किसी व्यक्ति को अपनी ज़िन्दगी में तब करना पड़ता है जब उसे उसके हल का कोई रास्ता तुरन्त नहीं मिल पाता। इस स्थिति में उसे हल को प्राप्त करने के लिए सचेत रूप से दूसरे तरीक़ों को अपनाना होता है जिन्हें हम समस्या समाधान विधि कहते हैं। समस्या समाधान विधि किसी मौजूदा समस्या की पहचान करने, समस्या के मूल कारण या कारणों का पता लगाने, समस्या को हल करने, कार्यवाही का सर्वोत्तम तरीक़ा तय करने, और फिर अन्तत: समस्या को हल करने के लिए उसे लागू करने की प्रक्रिया हो सकती है। समस्या समाधान के लिए हम जो कुछ भी करते हैं वह हमारे पूर्व अनुभवों, ज्ञान और समझ पर आधारित होता है।

एनसीएफ़एसई-2023 के अनुसार, "समस्या समाधान विधि, शाब्दिक प्रश्न और तर्क-पहेलियों और निगमनात्मक तर्क-शिक्षण का एक मज़ेदार तरीक़ा है। सरल पहेलियाँ, छात्रों के तर्क और रचनात्मक सोच व लेखन कौशल को मनोरंजक तरीक़ों से विकसित करने में मदद कर सकती हैं।"

वैसे तो हर समस्या को हल करने के अपने तरीक़े हो सकते हैं जो आपके पूर्व ज्ञान और समझ पर आधारित होते हैं। लेकिन प्रसिद्ध गणितज्ञ जॉर्ज पोल्या द्वारा समस्या के समाधान पर लिखी अपनी पुस्तक *How to Solve It* में समस्या के समाधान के लिए जिन चार चरणों का उल्लेख किया गया है, उनका ज़िक्र यहाँ प्रासंगिक है। ये चार चरण इस प्रकार हैं :-

चरण : 1 समस्या की पहचान

समस्या क्या है? इसे व्यक्तिगत समस्या समाधान की दिशा में पहला क़दम होना चाहिए।

चरण : 2 रणनीति या योजना बनाना

समस्या को हल करने के लिए योजना का निर्माण अर्थात अपने ज्ञान और अनुभव के आधार पर समस्या के सम्भावित हल के विषय में प्रगति और एक योजना बनाना।

चरण : 3 योजना पर अमल

बनाई गई योजना का अनुपालन करना और हल करना।

चरण : 4 उत्तर का परीक्षण

दिए गए अनुभव के लिए अपने उत्तर की जाँच करना।

जॉर्ज पोल्या द्वारा समस्या के समाधान हेतु सुझाए गए उपरोक्त चार चरणों को समझने के लिए कुछ समस्याओं और उनके हल पर विचार करते हैं।

समस्या–1 : एक बार एक फल बेचने वाली महिला आम का टोकरा लेकर बाज़ार से जा रही थी। वह एक व्यक्ति से टकरा जाती है जिसके कारण उसके सारे फल सड़क पर बिखर जाते हैं। महिला से टकराने वाला व्यक्ति फल उठाने लगता है, तभी उसे चिन्ता होती है कि वह फल वाली महिला से पूछे कि उसके टोकरे में कितने फल थे ताकि वह सभी फल

पहला समूहीकरण	9	14	**19**	24	29	34	**39**	44	49	54	**59**	64	69	74	79	84	89
दूसरा समूहीकरण	7	11	15	**19**	23	27	31	35	**39**	43	47	51	55	**59**	63	67	71
तीसरा समूहीकरण	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	35	38	41	44	47	50	53

तालिका 1

गिनकर रख सके, और कोई फल इधर-उधर न रह जाए। पूछने पर महिला ने बताया कि उसके टोकरे में कितने फल थे उसे यह तो याद नहीं, लेकिन जब उन फलों को 5-5 के समूह में रखा जा रहा था तब 4 फल बच रहे थे। इसी प्रकार, जब उन्हें 4-4 के समूह रखा जा रहा था तब 3 फल बच रहे थे, और जब आम 3-3 के समूह में रखे जा रहे थे तब 2 फल बच रहे थे। मिलने वाले व्यक्ति ने थोड़ी देर सोचा, फिर उसने सड़क से उतने फल खोजकर महिला के टोकरे में डाल दिए। अगर महिला के टोकरे में 90 से कुछ कम फल थे तब आख़िर उसके टोकरे में कुल कितने फल थे?

समाधान-1 : इस समस्या को हल करने के लिए हमें पता करना होगा कि आख़िर महिला के टोकरे में कितने फल थे। इसलिए हम दी गई संख्याओं के अनुसार अलग-अलग समूहीकरण करने का प्रयास करते हैं, और उसमें बचने वाले फलों की संख्या जोड़ते जाते हैं। जैसे— 5-5 का समूह बनाने पर फलों की संख्या क्रमशः 5, 10, 15, 20, ... होगी, और यदि उनमें बचे फल 4 को जोड़ते जाएँ तब वे क्रमश: 9, 14, 19, 24, 29, ... होंगे। इसी तरह, 4-4 का समूह बनाने पर फलों की संख्या क्रमशः 4, 8, 12, 16, ... होगी, और यदि उनमें बचे 3 फलों को जोड़ दें तब वे क्रमश: 7, 11, 15, 19, ... होंगे। तालिका 1 में तीनों तरह के समूहीकरण को दर्शाया गया है। हर समूह में गहरे काले रंग से रेखांकित संख्याएँ वे हैं जो सभी समूह की शर्तों के हिसाब से सही हैं। अतः महिला के पास सम्भवत: 59 फल थे।

समाधान-2 : एक और तरीक़े से इसे हल करने का प्रयास करें। सबसे पहले फलों की संख्या के इकाई अंक पर विचार करते हैं। पहली स्थिति में, इकाई में या तो 4 होगा या फिर 9 होगा। दूसरी स्थिति में, इकाई में 7, 1, 5, 9, 3 में से कोई एक होगा। तीसरी स्थिति में, इकाई में 5, 8, 1, 4, 7, 0, 3, 6, 9 होगा। उपरोक्त स्थितियों का पालन करने के लिए (तीनों स्थितियों में) इकाई में 9 होना ज़रूरी है। अब दहाई अंक पर विचार करते हैं और संख्या 9, 19, 29, 39, 49, 59, 69, आदि का परीक्षण करने पर हम यह पाते हैं कि इनमें से वह संख्याएँ हमारे काम की नहीं हैं जो 3 से पूरी-पूरी विभाजित होती हों, क्योंकि ऐसे 3-3 का समूह बनाने पर एक भी शेष नहीं बचेगा, और तीसरी स्थिति नहीं बनेगी। इसलिए सम्भावित फलों की संख्या 19, 29 और 59 में से कोई एक हो सकती है। दी गई शर्तों के लिए 19, 29 और 59 का एक-एक करके नीचे दी गई तालिका 2 के अनुसार परीक्षण करते हैं :

संख्या	5 से विभाजित करने पर	4 से विभाजित करने पर	3 से विभाजित करने पर
19	भागफल = 3 और शेषफल = 4	भागफल = 4 और शेषफल =3	भागफल = 6 और शेषफल =1
29	भागफल = 5 और शेषफल = 4	भागफल = 7 और शेषफल =1	भागफल = 9 और शेषफल = 2
59	भागफल = 11 और शेषफल = 4	भागफल = 14 और शेषफल = 3	भागफल = 19 और शेषफल = 2

तालिका 2

इस प्रकार टोकरे में फलों की संख्या 59 ही होने की सम्भावना है, क्योंकि यह दी गईं सभी परिस्थितियों का पालन करती है।

समाधान–1 एवं समाधान–2 का विश्लेषण

समाधान-1 और समाधान-2 के लिए अपनाई गई प्रक्रिया पर विचार करने पर हम यह पाएँगे कि सबसे पहले हमने सोचा था कि आख़िर हमें क्या जानना है। इसका उत्तर था, हमें टोकरे में रखे फलों की संख्या ज्ञात करनी है। फिर हमने सोचा कि इसके सम्भावित हल क्या-क्या हो सकते हैं, और ये हल हम कैसे प्राप्त कर सकते हैं? इसके बाद हमने दी गईं परिस्थितियों (शर्तों) का पालन करते हुए एक सारणी तैयार की, और सभी असंगत सम्भावनाओं को ख़ारिज करना शुरू किया। ऐसा करते हुए हम एक सबसे सटीक सम्भावना तक पहुँच पाए। सभी सम्भावित उत्तरों का परीक्षण कर हमने यह तय किया कि महिला के टोकरे में 59 फल थे।

आइए, इस समस्या को हल करने के दो और तरीक़ों के बारे में विचार करते हैं।

समाधान–3 : मान लीजिए, महिला ने 5-5 के x समूह, 4-4 के y समूह और 3-3 के z समूह बनाए होंगे। तब गणितीय रूप से इसे $5x + 4 = 4y + 3 = 3z + 2$ लिखा जा सकता है। (याद रखें कि 5 का समूह बनने पर 4 बाक़ी रहते थे इसलिए $5x + 4$।) अब इन सभी में एक जोड़ने पर

$$5x + 5 = 4y + 4 = 3z + 3$$

$$5(x + 1) = 4(y + 1) = 3(z + 1)$$

अब एक ऐसी संख्या चाहिए जो 3, 4, 5 से पूरी-पूरी विभाजित हो जाए ताकि वह $5(x + 1)$, $4(y + 1)$, $3(z + 1)$ का कोई गुणज हो। चूँकि 3, 4 और 5 का LCM तो 60 होता है, लेकिन फलों की संख्या 60 के गुणज से 1 कम ही होगी, क्योंकि फल बच भी रहे हैं। इसके अन्तर्गत हैं: 59, 119, 179, ... इत्यादि। चूँकि फल 90 से कम हैं इसलिए यह गुणज संख्या 60 के गुणज से 1 कम होगी।

उत्तर की जाँच

59 को 5 से विभाजित करने पर भागफल = 11 और शेषफल = 4

59 को 4 से विभाजित करने पर भागफल = 14 और शेषफल = 3

59 को 3 से विभाजित करने पर भागफल = 19 और शेषफल = 2

समाधान–4 : मान लीजिए, महिला के पास x फल थे। चूँकि 5 का समूह बनाने से 4 बचता है इसलिए जैसे ही एक और मिला देते हैं तब 5 बचेगा। इससे 5 का एक और समूह बन जाएगा। इसी तरह, 4 का समूह बनाने से 3 बच रहा है तब एक मिला देने से 4 का समूह बन जाएगा और वह $x + 1$, 5, 4 और 3 से पूरा-पूरा विभाजित हो जाएगा। 3, 4 एवं 5 से पूरी-पूरी विभाजित होने वाली संख्या इसकी LCM होगी जोकि 60 है, और महिला के फलों की संख्या LCM के गुणज से 1 कम अर्थात $60 - 1 = 59$ होगी।

समाधान–3 और समाधान–4 का विश्लेषण

हम देखते हैं कि इन दोनों समाधानों (समाधान-3 एवं समाधान-4) में जॉर्ज पोल्या द्वारा सुझाए गए समस्या समाधान के पहले चरण अर्थात क्या ज्ञात करना है, पर विचार करने के बाद समस्या को हल करने के लिए एक रणनीति बनाई गई है। इस रणनीति में दो बातें मुख्य हैं– 1. समस्या को छोटी-छोटी सरल समस्याओं के रूप में विभाजित करके उनका समाधान करना; और

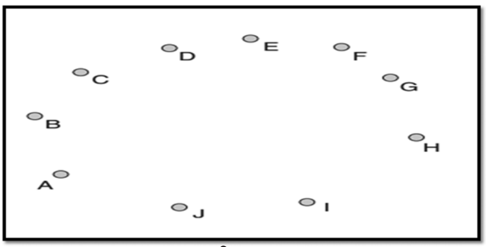
2. समस्या को एक समीकरण के रूप में परिवर्तित कर समीकरण को हल करना।

हल करने के बाद हमने अपने उत्तर की जाँच भी की ताकि त्रुटि की आशंका न हो। इस प्रकार देखें तो समस्या समाधान के लिए रणनीति बनाना और उसपर अमल करना सबसे महत्त्वपूर्ण चरण है। गहराई से समझने के लिए एक-दो और समस्याओं पर विचार करते हैं।

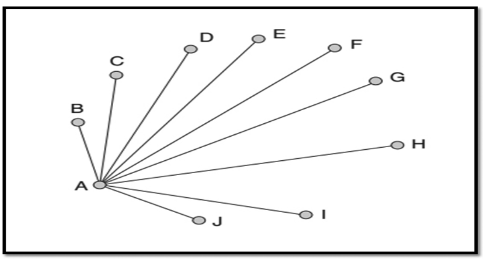
समस्या–2 हाथ मिलने की संख्या ज्ञात करना

अगर किसी मैदान में 10 खिलाड़ी एक दूसरे से हाथ मिलाएँगे तो कुल कितनी बार हाथ मिलेंगे?

समाधान–1 : मान लीजिए कि चित्र 2 में एक समतल के दस बिन्दु क्रमशः A, B, C, D, E, F, G, H, I, J से दर्शाए गए हैं। इनमें से कोई भी 3 बिन्दु संरेखीय नहीं हैं। चित्र 3 में एक व्यक्ति A जिन 9 व्यक्तियों से हाथ मिलाएगा उसे दिखाया गया है। इसी प्रकार, B शेष बचे 8 लोगों से हाथ मिलाएगा क्योंकि वह A से हाथ मिला चुका है, और C बाक़ी 7 लोगों से हाथ मिलाएगा क्योंकि वह A, B से पहले ही हाथ मिला चुका है। इसी प्रकार, आगे बढ़ने पर हमें हाथ मिलने की कुल संख्या 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 अर्थात 45 प्राप्त होगी।



चित्र 2



चित्र 3

समाधान–2 : आगे चित्र 4 में दो लोगों के जोड़ों में हाथ मिलाने की संख्या को एक वर्ग द्वारा दर्शाया गया है। यहाँ x बताता है कि कोई भी आदमी ख़ुद से हाथ नहीं मिलाता है।

हाथ मिलने की कुल संख्या बक्सों की संख्या के बराबर होगी।

हाथ मिलने की संख्या = (कुल बक्सों की संख्या – x वाले बक्सों की संख्या) / 2 = (100 – 10) / 2 = 45

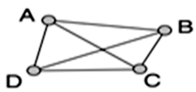
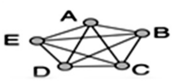
man	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A	X									
B		X								
C			X							
D				X						
E					X					
F						X				
G							X			
H								X		
I									X	
J										X

चित्र 4

समाधान–3 : मान लीजिए, एक कमरे में उपस्थित सभी व्यक्ति दूसरे 9 व्यक्तियों से हाथ मिलाते हैं, और इस आधार पर कुल 10 x 9 = 90 हाथ मिलाए जा सकते हैं। लेकिन A ने B से हाथ मिलाए, और B ने A से। यह दोनों स्थितियाँ एक ही हैं और यह दोनों 90 में गिनी गई हैं। अत: हाथ मिलाने की कुल संख्या 90 की आधी होगी, माने उत्तर 90 / 2 = 45 होगा।

समाधान–4 : यदि हम चित्र द्वारा हाथ मिलने को चित्रित करें तब 2 लोग एक रेखा पर दिखाए जा सकते हैं। तीन लोगों के लिए त्रिभुज होगा और तीनों एक दूसरे से रेखा से जुड़े होंगे। चार और उससे आगे बढ़ने पर अब विकर्ण बनना शुरू होगा क्योंकि A और C, B और D जैसे कुछ बिन्दुओं को भी हाथ मिलाना है। अब हमारे पास 4 भुजाएँ और 2 विकर्ण हो जाएँगे। यानी 4 लोगों के हाथ मिलाने की संख्या 6 होगी। इसी प्रकार, 5 होने पर E और 6 होने पर F और जुड़ जाएगा तब हमें मिलने वाले हाथों की संख्या ज्ञात करने के लिए बहुभुज की भुजाओं की संख्या के साथ-साथ विकर्णों की संख्या पर भी ध्यान देना होगा। 5 लोगों के लिए 5 भुजाएँ और 5 विकर्ण होंगे जैसा कि चित्र 3 में दिखाया गया है। अतः 5 खिलाड़ी 5 + 5 = 10 बार हाथ मिलाएँगे। 6 खिलाड़ियों के लिए विकर्णों की संख्या 9 हो जाएगी। जब

हम इस प्रकार गणना करते हैं तब हम देखते हैं कि हाथ मिलाने की संख्या भुजाओं और विकर्णों की संख्या के जोड़ से बनती है, और हम विकर्णों की संख्या पता करने के लिए सूत्र बना सकते हैं।

लोगों की संख्या	चित्र	हाथ मिलाया गया
1		
2		
3		
4		
5		

तालिका 3

जैसा कि हम देख ही सकते हैं कि हाथ मिलाने की संख्या = बहुभुज के विकर्णों की संख्या + बहुभुज की भुजाओं की संख्या। 5, 6 और इससे आगे की गणना करने पर हम एक सामान्यीकृत सूत्र बना सकते हैं।

जैसे– 5 भुजा वाले बहुभुज के विकर्णों की संख्या 5 (5 – 3) / 2 = 5 होगी, जबकि 4 भुजा वाले बहुभुज के विकर्णों की संख्या 4 (4 – 3) / 2 अर्थात 2 होगी। अतः n भुजाओं वाले बहुभुजों की संख्या = n (n – 3) / 2 होगी, जहाँ n बहुभुजों की भुजाओं की संख्या है।

अतः 10 व्यक्तियों में से प्रत्येक के बाक़ी सभी से बारी-बारी एक बार हाथ मिलाने से मिलने वाली कुल हाथ मिलाने की संख्या = 10 x 7 / 3 + 10 = 35 + 10 = 45 होगी।

इस प्रकार हम देखते हैं कि किसी समस्या को कई तरीक़ों से हल कर सकते हैं। हल प्राप्ति के लिए अपनाई गईं रणनीतियाँ हमारे ज्ञान, अनुभव और चिन्तन प्रक्रिया पर निर्भर करती हैं। उपरोक्त समस्या समाधान (हल) पर ध्यान दें तो समस्या को हल करने के लिए कुछ बिन्दु उभरकर आते हैं। इन्हें हम समस्या समाधान हेतु अपनाई जाने वाली रणनीति कह सकते हैं। जॉर्ज पोल्या द्वारा सुझाए गए चार चरणों के आधार पर समस्या समाधान के लिए एक व्यवस्थित रणनीति तैयार की जा सकती है।

समस्या समाधान हेतु रणनीति

1. समस्या को परिभाषित करना;
2. सम्बद्ध सूत्र का प्रयोग करना;
3. विचार करते हुए सम्भावना की तलाश करना, और सुसंगत सम्भावना तक पहुँचने के लिए असंगत तर्क को ख़ारिज करते जाना;
4. पैटर्न की तलाश करना, और आगमन / निगमन तर्क का प्रयोग करना;
5. समस्या को छोटे-छोटे सरल रूप में विभाजित करना, और इन सरल समस्याओं का समाधान करना; और
6. समस्या को एक समीकरण में परिवर्तित करना, और हल करना।

समस्या समाधान चक्र में, सूचना (शर्त) एकत्र करना, समस्या की पहचान, रणनीति निर्माण, समस्या का समाधान, और उत्तर की जाँच शामिल हैं। जॉर्ज पोल्या के सभी चरणों पर विचार करते समय और समस्या समाधान के विभिन्न चरणों का पालन करते समय हमें एक क्रमबद्ध चिन्तन की ज़रूरत होती है। कई बार हम समस्या समाधान के तयशुदा चरणों का

पालन करके भी किसी समस्या को हल नहीं कर पाते हैं। ऐसे में हमें इन चरणों को क्रमशः न अपनाकर कभी आगे तो कभी पीछे जाना पड़ सकता है। अपनी समस्या को देखते हुए हमें इनके क्रम को बदलना भी पड़ सकता है, या हम कुछ चरण छोड़ या जोड़ भी सकते हैं।

पाठक चाहें तो नीचे दी कुछ समस्याओं के समाधान जॉर्ज पोल्या द्वारा सुझाए गए चरणों और रणनीतियों को अपनाकर प्राप्त कर सकते हैं।

1. **किसान की समस्या** : एक किसान अपने खेत के बाड़े बनाने के लिए कुछ मीटर काँटेदार तार लाता है। जब वह अपने तार को खेत के चारों ओर 4 बार लपेटता है तो 10 मीटर कम पड़ता है, और जब वह 3 बार लपेटता है तो 30 मीटर अधिक हो जाता है। उसे कम-से-कम कितने मीटर वायर लेना चाहिए?

2. **वसीयत की समस्या** : एक व्यक्ति ने मरने पर अपनी वसीयत में यह निर्देश छोड़ दिया कि उसकी जायदाद का आधा हिस्सा उसकी पत्नी को मिले; जो कुछ बचे उसका 1/7 हिस्सा उसके बेटे को दिया जाए; फिर जो कुछ बच जाए उसका 2/3 भाग उसके नौकर को दे दिया जाए; और बाक़ी बचे 2000 रुपए उसके पालतू कुत्ते के रखरखाव पर ख़र्च किए जाएँ। अब सवाल यह है कि वह आदमी कुल मिलाकर कितना रुपया छोड़ गया था?

चित्र 5

3. **बकरी और मुर्ग़ी की संख्या** : एक गाँव में एक किसान रहता था। उसने ढेर सारी मुर्ग़ियाँ और बकरियाँ पाल रखी थीं। एक दिन उसके जानवरों की चोरी हो गई। वह दौड़ा-दौड़ा पास के थाने में गया और थानेदार को बताया कि उसके बाड़े में कुछ मुर्ग़ियाँ और कुछ बकरियाँ थीं। उन्हें किसी ने चुरा लिया है, पर मुझे याद नहीं कि कितनी मुर्ग़ियाँ और कितनी बकरियाँ थीं। हाँ, इतना ज़रूर याद है कि उनकी कुल संख्या 20 और उनके पैरों की कुल संख्या 56 थी। क्या आप बता सकते हैं कि उस किसान के पास कितनी बकरियाँ और कितनी मुर्ग़ियाँ थीं?

1. *How to Solve It : A New Aspect of Mathematical Method*, G. Polya
2. *National Curriculum Framework for School Education – 2023*, National Steering Committee for National Curriculum Frameworks of India.
3. National Council of Teachers of Mathematics. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, VA: Author. Shirley A. Hill, President and Team, National Council of Teachers of Mathematics.
4. National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author. Kirsner, Steven A. and others
5. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: Author. J. Ferrini-Mundy and others

मनोज कुमार शराफ को ट्रिनिटी कॉन्वेंट, विद्या भारती, लायंस स्कूल और डीएव्ही जैसे विभिन्न विद्यालयों में गणित शिक्षक के रूप में क़रीब 27 वर्ष अध्यापन कार्य का अनुभव है। पिछले 6 वर्षों से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन, रायपुर में गणित विशेषज्ञ के रूप में कार्य कर रहे हैं। गणित पर कई लेख व कहानियाँ अनेक पुस्तकों में प्रकाशित हो चुकी हैं।

सम्पर्क : manoj.sharaf@azimpremjifoundation.org