गणित तर्क की क्षमता कैसे बढ़ाता है ?

मुकेश मालवीय

हम सभी मानते हैं कि विद्यार्थियों को गणित पढ़ाने का मक़सद उनमें गणितीय सोच और तार्किक बुद्धि का विकास करना है। इस लेख में बताया गया है कि स्कूल में गणित पढ़ाने के जो तौर-तरीक़े अपनाए जाते हैं, वे इस मक़सद को हासिल नहीं कर पाते हैं। क्योंकि विद्यार्थी सुझाए गए नियमों, सूत्रों, विधियों का इस्तेमाल और अभ्यासभर कर रहे होते हैं। सीखने की इन स्थितियों में विद्यार्थियों के ख़ुद से सोचने, विचारने और तर्क करने के मौक़े कम ही बन पाते हैं। गणित की कुछ अवधारणाओं पर चर्चा करते हुए लेख बताता है कि गणितीय तर्क और सोच की समझ क्या हैं, और ये कैसे विकसित होती हैं। इसकी कुछ गतिविधियाँ और प्रक्रियाएँ भी लेख सुझाता है। -सं.

गणित विषय के बारे में प्रायः यह कहा जाता है कि इस विषय को जानने-समझने से तार्किक बुद्धिमत्ता विकसित होती है। जिस तरह से मैंने स्कूल में गणित सीखा है उस गणित ने तो मुझे सवालों को हल करने के लिए सूत्र और क़ायदों या विधियों का अनुपालक और इस्तेमालकर्ता ही बनाया। आज जब मैं सोचता हूँ कि गणित को सीखना-समझना, तार्किकता को विकसित करना कैसे हो सकता है, मुझे इसके सैकड़ों आधार इस विषय में दिखते हैं। स्कूलों में गणित सीखने-समझने के दौरान ऐसा समय प्रायः बहुत कम आता है जहाँ इसे सीखने वाले अपनी सीख के आधार पर अपनी सोच से कोई निष्कर्ष या दावा या कोई कथन या सूत्र ख़ुद से बना सकते हों। गणित सीखते समय सीखने वालों के लिए ख़ुद से सोचने का अवसर आना जिसमें वह समझ-सोचकर कोई निष्कर्ष वाली बात कह सके, एक तरह से तर्क को उपजाने वाला समय होता है। जैसे– मैं दो संख्याओं को जोड़ने के बहुत सारे अभ्यास करता हूँ, और मुझे सिखाए गए तरीक़े से मैं सही जोड़ कर लेता हूँ। यहाँ जोड़ना सीखना, बताई गई प्रक्रिया का पालन करना सीखना है। पर यहीं मुझसे कोई यह सवाल करे कि इन जोड़ के अभ्यास से आप दो संख्याओं के जोड़ के बारे में ऐसा कुछ कह सकते हो जो प्रत्येक जोड़ की प्रक्रिया पर लागू हो। इस सवाल के जवाब के लिए मैं अपने जोड़ के अभ्यास, जो मैंने ही किए हैं, देखते हुए यह सोचता हूँ कि एक संख्या में दूसरी संख्या जोड़ने पर एक तीसरी संख्या आ रही है। यह तीसरी संख्या कैसी है? यह संख्या उन दोनों संख्याओं से बड़ी है। यह सभी जोड़ में दिख रहा है। अब मैं यह बात पक्के तौर पर कह सकता हूँ कि किन्हीं भी दो संख्याओं को जोड़ने पर बनने वाली संख्या उन दोनों संख्याओं से बड़ी होगी। (यदि इस दावे में आप शून्य के जोड़ की घुसपैठ नहीं कर रहे होंगे।) मेरा यह निष्कर्ष शायद आपको बहुत हल्का लगा हो, पर मैं यही निष्कर्ष यदि 7 या 8 वर्ष की उम्र में जोड़ के उन सवालों को हल करने के साथ सोचने का अवसर पाकर निकाल सका होता तो यह आपको वज़नी लगता।

गणितीय तर्क की ये क्षमता गणित सीखते-समझते हुए या गणित की समस्या से जूझते

चित्र : मुकेश मालवीय

हुए उपजती है, या पहले बनी किसी समझ या अनुभव के आधार पर नई परिस्थिति में उस समझ को इस्तेमाल करने से बनती है। गणित के सन्दर्भ में विशेष रूप से मात्रा, आकार, माप, आदि से जुड़ी समस्या या सवाल की व्याख्या करना, और ख़ुद तय करना कि इस समस्या या सवाल को करने के लिए क्या-क्या करना होगा, और इस तरह ही क्यों करना होगा? यह सब सोचना, करना और कहना तर्क करना कहला सकता है। तर्क हर बार समस्या के हल के लिए ही नहीं बनाए जाते, कई बार वह विचार की तरह भी आ सकते हैं। जैसे– कक्षा 4 की एक लड़की को 5 का पहाड़ा लिखते हुए यह सूझा कि 5 ऐसी संख्या है जिसमें किसी भी संख्या का गुणा करो, उत्तर की संख्या में 0 या 5 ही आएगा। मैंने समझने की कोशिश की कि वह क्या कह रही है। आप भी समझे न, वह क्या कह रही थी? किसी सवाल के लिए सीधे सूत्र और विधि का इस्तेमाल करना सीखना तकनीकी सिखाना है, गणित नहीं। तर्क के कुछ उदाहरण लेते हैं :

संख्या की ज़रूरत से पहले

मैं जब छोटा था, मेरे घर के पास एक बग़ीचा हुआ करता था। मैं इस बग़ीचे में रोज़ जाता था। वहाँ एक गुलाब का पौधा था। मुझे किसी दिन इसमें कम गुलाब दिखते, किसी दिन काफ़ी ज़्यादा। मैं घर आकर बताता कि आज गुलाब कम खिले हैं या ज़्यादा। संख्याओं को समझना सीखने के पहले से मेरी संचेतना में कम-ज़्यादा, बड़ा-छोटा, दूर-पास, थोड़ा-बहुत, आदि शब्दों के अर्थ आ गए थे। ये अर्थ कैसे बने होंगे? क्या ये गणित की पाठ्यपुस्तक के 'संख्या पूर्व अवधारणा' नामक अध्याय को पढ़ने से बने होंगे? मेरा मानना है कि स्कूल की उम्र में पहुँचने के पहले ही तुलना की समझ बच्चों के संज्ञान में बन जाती है। वे आकार, दूरी और मात्रा में तुलना कर सकते हैं। हम सभी को हासिल 'तुलना' की इस समझ या तर्क को गणित सीखने का बुनियादी आधार बनाना चाहिए।

मुझे और मेरी दोस्त को गिनना नहीं आता। मैंने हाथ में कुछ चूड़ियाँ पहनी हैं। उसने भी कुछ पहनी हैं। वह कहती है, "मेरी चूड़ियाँ ज़्यादा हैं।" मैं कहती हूँ, "मेरे हाथ में चूड़ियाँ ज़्यादा हैं।" हम दोनों स्कूल की मैडम के पास गए। उन्होंने इसके लिए हमें गिनती सीखने को कहा।

उसी दोस्त ने मुझे एक खेल सिखाया। उसने पहले मुझे एक चूड़ी निकालने को कहा, फिर उसने अपने पास की चूड़ी मेरी चूड़ी पर रखी। इसके बाद मेरी एक चूड़ी रखने को कहा। उसके ऊपर भी उसने अपनी चूड़ी रख दी। इस तरह हम चूड़ियों की जोड़ी बनाते रहे। हमें समझ में आ गया कि किसके पास ज़्यादा चूड़ियाँ हैं।

तुलना का तर्क आदिम समय से अपनाया जाता रहा है

गिनती सीखने में संख्या का नाम बच्चे पहले सीखते हैं। संख्या नाम का मात्रात्मक सम्बन्ध बच्चे बहुत बाद में बनाते हैं। इंसान ने भी जब गिनती बनाई तब पहले संख्या नाम बना लिए हों बाद में उनको मात्रा से जोड़ा हो, शायद ऐसा

नहीं हुआ होगा। गिनती, एक और की अवधारणा से बनी। एक काल्पनिक उदाहरण देता हूँ। मेरे पास गाय जैसे कुछ जानवर हैं। अब यदि मुझे इन्हें गिनने की ज़रूरत पड़े तो सबसे पहले मुझे जो तर्क मिलेगा वह एक-एक की संगतता का होगा। माने, हर एक गाय के लिए कोई एक निशान बना सकता हूँ। जैसे– मेरे पास इतनी /////////// गाय हैं। इन डण्डियों (///////////) का अर्थ तभी खुलता है जब मैं एक डण्डी को एक गाय के रूप में देखूँ। अगर (सदियों बाद) मुझे यह ज़रूरत पड़े कि यह /////////// कुल कितनी गायें थीं तब मैं यह सोचूँगा कि यह निशान (/) एक गाय थी। इसमें एक और गाय // मिली है जो / से एक अधिक है। फिर एक और गाय /// है जो // से एक अधिक है। इस तरह एक और गाय //// है जो /// से एक अधिक है। आज के समय में इस तरह सोचना और लिखना अजीब लग रहा है। अब मैं संख्या नाम के उदाहरण पर आ जाता हूँ, और कहता हूँ मेरे पास 11 गाय हैं। पर सवाल वही है, ग्यारह क्या होता है? ग्यारह 10 से एक अधिक है। तब 10 क्या है? दस 9 से एक अधिक है। इस तरह हम क्रमशः एक पर पहुँचेंगे। हम किसी संख्या के नाम और उसमें निहित मात्रा को समझने के लिए एक से उस संख्या की तुलना कर रहे होते हैं। हम 546 को इसलिए समझते हैं क्योंकि हमने 1 की समझ के आधार पर ही इसका अर्थ बनाया है, पर हमारे लिए इसे स्वीकारना मुश्किल है। संख्याओं की हमारी समझ में 1 से तुलना के आधार पर बने अर्थ स्वतःस्फूर्त हो गए हैं। जैसे– संख्या 546 को समझने के लिए कहते हैं कि यह संख्या पाँच सौ और चालीस व छह से मिलकर बनी है। क्या पाँच सौ और चालीस व छह स्वतंत्र अवधारणाएँ हैं?

नियम और विधियों को सीखना

स्कूलों में बच्चे संख्याओं को ठीक से समझे बिना ही उन्हें जोड़ने-घटाने के नियम सीख लेते हैं। 35 + 24 को हल करने का नियम है, पहले 5 और 4 को जोड़कर लिखो फिर 3 और 2 को जोड़कर लिख दो। इस तरह के कई जोड़ कर लेने पर दिमाग़ में यह नियम पक्का हो जाता है। नियम अभ्यास करने से पक्के हो जाते हैं। इसलिए गणित में अभ्यास प्रश्नावलियाँ होती हैं। इस तरह गणित अभ्यास का विषय बनने लगता है। गणित में समझ का इस्तेमाल इतना सीमित हो गया है कि यह सिर्फ़ तरीक़ा या सूत्र का इस्तेमाल करना सिखाता है। उदाहरण के लिए, 35 + 24 = 59 होता है। यह सवाल मैं बताए गए तरीक़ों का इस्तेमाल करके सही कर लेता हूँ। इस तरह के जोड़ने के सवाल हल करने से मेरी संचेतना में कोई ज़्यादा फ़र्क़ नहीं पड़ा क्योंकि जोड़ कैसे किया जाता है, इसके नियम मैंने अपना लिए हैं। अगर मुझसे (जब मैं यह जोड़ सीखने की उम्र में था) यह 2 सवाल पूछे जाते,

1. किन दो संख्याओं को जोड़ने पर 59 आता है?
2. 35 और 24 का जोड़ कितना होता है?

तब मैं दूसरे का जवाब जल्दी से देता। पहले सवाल का भी दे सकता था, पर थोड़ा सोचना

चित्र : मुकेश मालवीय

पड़ता। और उत्तर में यही कहता कि 35 और 24 जोड़ने पर 59 आएगा। पर इस सवाल का जवाब तो बिलकुल ही नहीं दे पाता कि 35 और 24 के अलावा कोई दूसरी दो संख्या बताएँ जिनका जोड़ 59 आता हो। कितने ही सवाल थे जोड़ को समझने के, या जोड़ के ज़रिए संख्याओं को समझने के। वे सारे सवाल ऐसे होते जिनके जवाब के लिए मुझे बताया गया तरीक़ा या विधि इस्तेमाल करने के अलावा ख़ुद से कुछ सोचना पड़ता, तर्क बनाना पड़ता लेकिन वो मेरे गणित ने मुझसे पूछे ही नहीं। और मैं सिर्फ़ तरीक़े सीखता गया।

स्कूलों में शुरुआती गणित का पहला तर्क एक-एक से संगतता को भी ज़्यादातर एक नियम की तरह ही बताया जाता है। नियम या तरीक़ा अपनाने से हमारे तर्क नहीं बनते।

मान लीजिए, 1/2 + 1/3 को जोड़ना है। शिक्षिका बच्चों को समझा रही हैं कि पहले 1/2 में 3/3 का गुणा कर दो, तो यह 3/6 हो गया। अब 1/3 में 2/2 का गुणा कर दो यह 2/6 हो गया। अब 3/6 + 2/6 में ऊपर के 3 और 2 को जोड़ दो। जोड़ 5 आयेगा। उत्तर 5/6 आ गया।

इस तरह के 10 से 15 सवालों को बच्चों से हल करवाया जाएगा तब वे भिन्न के जोड़ करने में सक्षम हो जाएँगे। इस तरह की प्रक्रिया को सिखाना, सीखने वालों के सारे तर्क को मारने वाला या कुन्द करने वाला होता है। बच्चे जब 1/2 + 1/3 को अपने तर्क से हल करते हैं तब उसका उत्तर 2/5 लाते हैं। इस उत्तर को नकार कर हम यदि उत्तर 5/6 चाहते हैं, तब समझ बनाने के स्वाभाविक क्रम को अपनाना होगा, जोकि इतना आसान नहीं होगा।

1/2 किसी एक का आधा हिस्सा है। यदि मैं 1 के दो बराबर हिस्से करूँ तो हर हिस्सा 1/2 होगा। मुझे कई सारे उदाहरण, चित्रों के ज़रिए या किसी वस्तु जैसे काग़ज़ के हिस्से करके बताना होगा।

इसी तरह किसी इकाई का 1/3 हिस्सा क्या होता है, इसे पहले उदाहरण के आधार पर बच्चे ख़ुद समझ लेंगे।

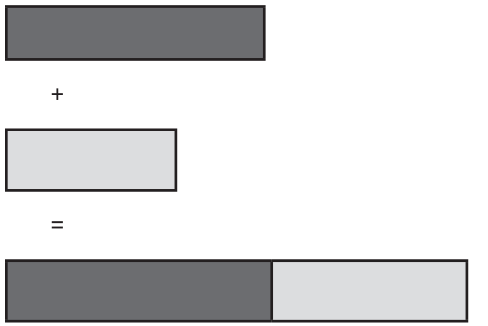
अब 1/2 + 1/3 का क्या मतलब है?

हमारे पास एक इकाई का 1/2 हिस्सा है उसमें वैसी ही इकाई का 1/3 हिस्सा जोड़ना है।

1/2 हिस्सा

1/3 हिस्सा

यहाँ ये दोनों हिस्से हम जोड़ सकते हैं



पर यह कैसे बताएँ कि दोनों हिस्से मिलाकर कितना हो गए?

जब हम 2 और 3 को जोड़ते हैं, तो इसमें जो 2 है वो 1 + 1 से मिलकर बना है, और 3 भी 1 + 1 + 1 से मिलकर बना है। यानी इसमें 2 और 3 की इकाई एक जैसी ही है।

परन्तु भिन्न में 1/2 हिस्से और 1/3 हिस्से में क्या समानता है?

हमें 1/2 हिस्से और 1/3 हिस्से की तुलना करनी चाहिए।

हम सोच सकते हैं कि 1/2 हिस्से और 1/3 हिस्से में क्या सम्बन्ध है?

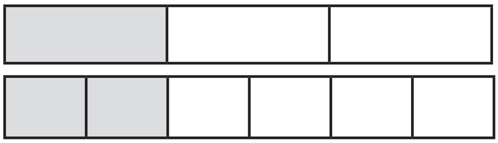
1/3 हिस्से को मैं यदि 1/2 वाले हिस्से के ऊपर रखूँ, तब 1/2 का कुछ हिस्सा बचा रहता है। 1/3 हिस्से को यदि 1/2 पर 2 बार रखूँ तब दूसरे 1/3 का कुछ हिस्सा बाहर निकल

जाएगा। यानी 1/3 का 1/2 हिस्से से कोई सीधा (गुणात्मक) सम्बन्ध नहीं है।

अब हमें क्या करना चाहिए?

1/3 वाले हिस्से को छोटे हिस्से में बाँट सकते हैं।

1/3 वाले हिस्से को यदि दो बराबर भाग कर दें तब 1/3 का यह आधा भाग कितना होगा? 1/3 का आधा को क्या कहें?



हम भिन्न को या हिस्सों को उसकी पूरी इकाई के सन्दर्भ में ही बता सकते हैं।

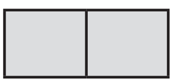
1/3 का आधा हिस्सा करने पर यह उस पूरी इकाई के 1/6 हिस्से के बराबर होगा।

इस 1/6 हिस्से को जब मैं 1/2 वाले हिस्से पर रखता हूँ तब यह 1/2 को 3 बार में पूरा ढँक लेता है। इसका मतलब यह हुआ कि 1/6 का 3 गुना, दूसरे हिस्से 1/2 के बराबर है।

इसे हम इस तरह लिख सकते हैं।

1/6 + 1/6 + 1/6 = 3/6 = 1/2

और 1/3 को



1/6 + 1/6 = 2/6 = 1/3

अब हम इन हिस्सों को जोड़कर बता सकते हैं क्योंकि हमें दोनों हिस्सों को बताने वाली इकाई मिल गई।

यानी 1/6 जैसे पाँच हिस्से मिलकर 5/6 हो जाएँगे।

मैं जब बच्चों के साथ इस तरह भिन्न का जोड़ कर रहा था तब बच्चों के हाथ में काग़ज़ कि स्ट्रिप थीं, वे मेरे सवालों पर सोच रहे थे, साथ-साथ ख़ुद भी इन भिन्नों को समझने की कोशिश कर रहे थे। सीखने वालों के लिए यह एक सन्तुष्टि थी क्योंकि बताए गए तर्क से उनकी सहमति (सह + मति) थी।

आगे जाकर अलग-अलग हर वाले भिन्न को जोड़ने या घटाने के सवाल हल करते हैं जैसे 2/5 + 3/7 = ?

मेरे शिक्षक ने मुझे बताया था कि यहाँ भिन्न के हर का LCM लेना पड़ेगा। यह LCM क्या है, क्यों लेना है, इसका जवाब सोचने और तर्क की प्रक्रिया से मैंने ख़ुद समझा, क्योंकि मुझे अपने बच्चों को उनके क्यों का जवाब देना था।

कक्षा 11 तक ही गणित पढ़कर मैं शिक्षक बन गया। यह संयोग था कि मैं जिस स्कूल में शिक्षक बना, वह उन दिनों एकलव्य नाम की एक शैक्षिक संस्था के प्रायोगिक स्कूल का अंग था। यह संस्था शिक्षकों के लम्बे प्रशिक्षण और उनके साथ संवाद करती थी। यहाँ शिक्षकों के प्रशिक्षणों में वे सवाल थे जो हमारे सीखे हुए का मतलब समझने पर मजबूर करते थे। जैसे– लम्बाई में चौड़ाई का गुणा करने पर क्षेत्रफल कैसे निकल जाएगा; क्षेत्रफल क्या है; मूलधन × दर × समय / 100 = ब्याज, इसका क्या मतलब है कोई बताए; भाग करने की विधि में जो तरीक़ा अपनाया जा रहा है, वह वैसा ही क्यों है; आदि। कुल मिलाकर, हम यहाँ पहली बार अपने सीखे हुए गणित पर ख़ुद सवाल उठा रहे थे, और ख़ुद से सोचकर तर्क से अपने जवाब खोज रहे थे। यह समय ज़्यादा दिनों तक नहीं रहा, पर इस संवाद ने हम शिक्षकों में सोचने, विचारने, चिन्तन करने, और ख़ुद का मौलिक नज़रिया विकसित करने का बीजारोपण किया।

मैं छठवीं, सातवीं कक्षाओं को पढ़ाता हूँ। अभी 15 दिन पहले 10वीं कक्षा के कुछ विद्यार्थी मेरे पास आए और पूछने लगे, "सर, पाई क्या होता है?" मैंने उनसे कहा, "मुझे भी नहीं मालूम, पर हम मिलकर सोचते हैं। तुमने पाई कहाँ पढ़ा?" उन्होंने कहा, "वृत्त की परिधि का सूत्र है– वृत्त की परिधि = $2\pi r$"

हमने मिलकर वृत्त की परिधि को समझा कि यह एक गोलाकार दूरी (परिधि को दूरी कहना भी सोचने की प्रक्रिया से आया) है। किसी एक वृत्त की परिधि निकालनी है तो इस दूरी को मापकर हम बता देते कि यह परिधि इतने सेमी की है। तब सूत्र बनाने का क्या मतलब है? सूत्र बताता है कि अलग-अलग माप के सभी वृत्तों के लिए यह सही होगा कि किसी भी वृत्त की परिधि की माप उस वृत्त के व्यास और पाई के गुणनफल के बराबर होगी। यह समझ हमारी थोड़ी देर की आपसी चर्चा से बन गई। हम अब इस निष्कर्ष पर थे कि किसी वृत्त की परिधि की माप उस वृत्त के व्यास (2 आर) की माप में पाई का गुणा करने पर आती है। अगले चरण में हमारे पास यह सवाल था कि यदि पाई का गुणा व्यास की माप में करना है तब यह पाई क्या है? कुछ उदाहरणों से हमने समझा कि गुणा हम संख्याओं का ही कर सकते हैं, माने पाई कोई संख्या ही है। (यह निष्कर्ष भी सोचने और तर्क की प्रक्रिया से आया कि पाई एक संख्या है।) एक बच्चे ने कहा, "यदि पाई एक संख्या है तब उस संख्या को लिखना चाहिए। पाई क्यों लिख रहे हैं?" अब इस उत्तर पर सहमति थी कि यह दूसरी संख्या जैसी नहीं होगी, कुछ फ़र्क़ होगी। हमने पाई का मान तय करने के लिए निर्णय लिया कि यह परिधि के माप में व्यास की माप के भाग देने पर आता है। हमने फ़र्श पर 6 सेमी त्रिज्या का एक वृत्त बनाया। व्यास को मापना आसान है। यह सीधी दूरी है जो 12 सेमी थी, पर परिधि वृत्ताकार दूरी थी। इसके लिए हमने एक धागे का उपयोग किया। धागे को वृत्त की परिधि पर सावधानी से जमाया। फिर धागे को सीधा करके माप लिया। हमारी माप लगभग 38 सेमी थी। हमारे वृत्त की परिधि 38 में व्यास 12 का भाग देने पर लगभग 3.16 आया। इस तरह हमने वृत्त के पाई को समझा, और उसका मान निकाला। इस पाई के ज़रिए हमने वृत्त की परिधि और व्यास को समझा। बाद में हमने पुस्तकों से पढ़कर यह भी जान लिया कि पाई एक अपरिमेय संख्या है जिसका मान 22/7 के आसपास है। पर यहीं हमारी अगली चर्चा, अपरिमेय संख्या क्या है, पर चली गई।

यह पाई वाली चर्चा ख़त्म होने से पहले हम इस बात पर थोड़ा रुके, और उस पहले व्यक्ति के इस सुन्दर एहसास के बारे में सोचने लगे जिसे यह सूझा होगा कि वृत्त की परिधि और उसके व्यास में कोई रिश्ता ज़रूर है। तब हमने गणित में कुछ और रिश्तों पर बात की जैसे समकोण त्रिभुज की भुजाओं के रिश्ते के बारे में। मैंने बच्चों से कहा, "आप गणित में ऐसे कुछ और रिश्तों ढूँढ़ पाओ तो मुझे बताना।"

मुकेश मालवीय पिछले दो दशक से भी ज़्यादा समय से स्रोत शिक्षक के रूप में सरकारी और ग़ैर-सरकारी भूमिकाओं में सक्रिय हैं। कक्षा अनुभवों को लेकर सतत लिखते रहते हैं। वर्तमान में अनुसूचित जाति विकास विभाग के शासकीय आवासीय ज्ञानोदय विद्यालय, होशंगाबाद (मध्य प्रदेश) में शिक्षक पद पर कार्यरत हैं। आप एनसीईआरटी की प्रिपरेटरी स्टेज की कक्षा 3, 4 और 5 की गणित की पाठ्यपुस्तकों के लेखन में शामिल रहे हैं।

सम्पर्क : mukeshmalviya15@gmail.com