गुणन के गुणधर्म

भिन्नात्मक संख्याओं (और पूर्ण संख्याओं) के लिए चित्रात्मक औचित्य

पूर्ण संख्याओं और भिन्नात्मक संख्याओं के योग के गुणधर्मों के चित्रात्मक औचित्य को देखने के बाद,

यह पोस्टर इन्हीं संख्या समुच्चय के लिए गुणन के गुणधर्मों पर विचार करता है।

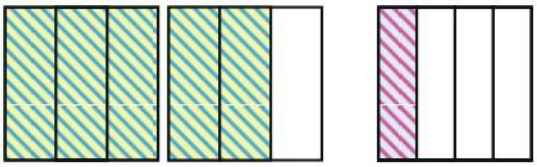


Figure 0

मॉडल : एक 'यूनिट स्क्वायर' (इकाई वर्ग) 1 पूर्ण का प्रतिनिधित्व करता है। ¼ को दर्शाने के लिए एक वर्ग को 4 समान ऊर्ध्वाधर (vertical) पट्टियों में काटा जाता है और उनमें से 1 को छायांकित किया जाता है। 5/3 के लिए दो वर्गों को 3-3 पट्टियों में बाँटकर 5 पट्टियों को छायांकित किया जाता है (**चित्र-0**)।

गुणन के 'ऐरे मॉडल' (array model) का इस्तेमाल करते हुए इन संख्याओं के लिए क्रम-विनिमेय (commutative) और वितरण (distributive) के गुणधर्म,पूर्ण संख्या के गुणधर्मों का सहज विस्तार हैं। इनमें, गुणनफल को उस आयताकार क्षेत्र द्वारा दर्शाया जाता है जिसकी ऊर्ध्वाधर भुजा पहले गुणक का प्रतिनिधित्व करती है और क्षैतिज (horizontal) भुजा दूसरी गुणक संख्या को दर्शाती है।

इसलिए 2/3 x 4/7 को नीचे चित्र-1 में दिखाया गया है, जहाँ छायांकित क्षेत्र 3 x 7 भागों में से 2 x 4 भाग है, यानी $\frac{2\times4}{3\times7}$। चित्र- 4 में $\frac{4}{3}\times\frac{2}{7}$ को दर्शाया है जहाँ छायांकित क्षेत्र इकाई वर्ग का 4x 2 भाग या 3 x 7 है, यानी $\frac{4}{3}\times\frac{2}{7}$। ध्यान दें कि चूँकि लम्बाई पर दिखाई गई संख्या $\frac{4}{3}$ एक विषम भिन्नात्मक संख्या (improper fraction) है, इसलिए ऊर्ध्वाधर दिशा में यह इकाई वर्ग (जिसे मोटी सीमा के साथ दिखाया गया है) उसके बाहर तक फैला है।

गुणन का क्रमविनिमेय गुणधर्म (Commutative Property of Multiplication)

इसमें 3 सम्भावनाएँ हैं :

1. सम भिन्नात्मक संख्या x सम भिन्नात्मक संख्या
2. विषम भिन्नात्मक संख्या x सम भिन्नात्मक संख्या (और ∴ सम भिन्नात्मक संख्या x विषम भिन्नात्मक संख्या)
3. विषम भिन्नात्मक संख्या x विषम भिन्नात्मक संख्या

हम 1 और 2 का एक-एक उदाहरण दिखा रहे हैं, और 3 को भी इसी तरह से किया जा सकता है।

सम भिन्नात्मक संख्या x सम भिन्नात्मक संख्या :

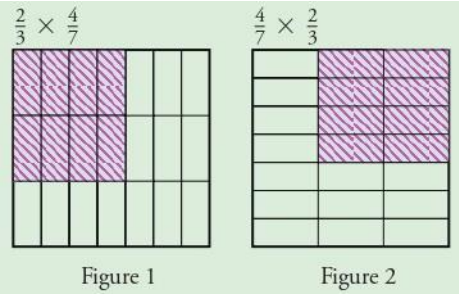


Figure 1 Figure 2

चित्र-1 को 90^0 घुमाने पर **चित्र-2** प्राप्त होता है।

चित्र-1 में, छायांकित क्षेत्र 3 x 7 भागों में से 2 x 4 भाग है यानी $\frac{2\times4}{3\times7}$, जबकि **चित्र-2** में, यह 7 x 3 भागों में से 4 x 2 भाग है यानी $\frac{4}{7} \times \frac{2}{3}$ । चूँकि घूर्णन (rotation) एक स्थिर परिवर्तन है, इसलिए लम्बाई और क्षेत्रफल नहीं बदलते। अतः

$\frac{2}{3} \times \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \times \frac{2}{3}$। अतः इसे किन्हीं भी दो सम भिन्नात्मक संख्याओं के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

सम भिन्नात्मक संख्या x विषम भिन्नात्मक संख्या :

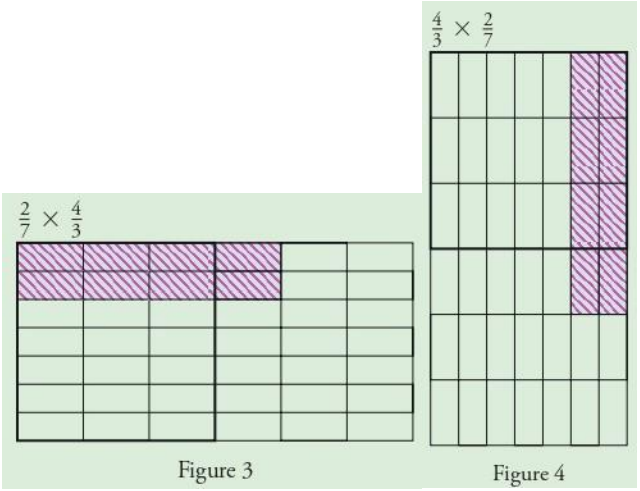


Figure 3 Figure 4

नोट : पिछली स्थिति की तरह ही, **चित्र-3** को 90^0 घुमाने पर **चित्र-4** प्राप्त होता है। इसलिए क्षेत्रफल अपरिवर्तित रहता है, अर्थात : $\frac{2}{7} \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \times \frac{2}{7}$।

चित्र-3 में दूसरी संख्या $\frac{4}{3}$ विषम भिन्नात्मक संख्या है, इसलिए छायांकित क्षेत्र क्षैतिज दिशा में इकाई वर्ग के आगे तक फैलता है।

चित्र-4 में पहला गुणक एक विषम भिन्नात्मक संख्या है, जिससे छायांकित क्षेत्र ऊर्ध्वाधर दिशा में इकाई

वर्ग के आगे तक फैलता है।

इस मॉडल का उपयोग 'पूर्ण संख्या × भिन्नात्मक संख्या' को दर्शाने के लिए किया जा सकता है, क्योंकि कोई भी विषम भिन्नात्मक संख्या एक प्राकृत संख्या और एक सम भिन्नात्मक संख्या का योग होती है। शून्य (0) से जुड़े गुणन परिभाषा के अनुसार शून्य ही होते हैं। इसलिए, शून्य के शामिल होने पर क्रमविनिमेय गुणधर्म निर्विवाद रूप से सत्य होता है।

गुणन का वितरण गुणधर्म (Distributive Property of Multiplication)

इसमें 6 सम्भावनाएँ होती हैं

1. सम भिन्नात्मक संख्या × योग
    a. सम भिन्नात्मक संख्या × (सम भिन्नात्मक संख्या + सम भिन्नात्मक संख्या)
    b. सम भिन्नात्मक संख्या × (सम भिन्नात्मक संख्या + विषम भिन्नात्मक संख्या)
    c. सम × (विषम भिन्नात्मक संख्या + विषम भिन्नात्मक संख्या)

2 विषम भिन्नात्मक संख्या × योग
    a. विषम भिन्नात्मक संख्या × (सम भिन्नात्मक संख्या + सम भिन्नात्मक संख्या)
    b. विषम भिन्नात्मक संख्या × (सम भिन्नात्मक संख्या + विषम)
    c. विषम भिन्नात्मक संख्या × (विषम भिन्नात्मक संख्या + विषम भिन्नात्मक संख्या)

ध्यान दें कि योग के क्रमविनिमेय गुणधर्म (commutativity) के कारण सम भिन्नात्मक संख्या + विषम भिन्नात्मक संख्या = विषम भिन्नात्मक संख्या + सम भिन्नात्मक संख्या होता है। हम यहाँ 1a और 2b का एक-एक उदाहरण दिखा रहे हैं। पाठक शेष का स्वयं पता लगा सकते हैं।

सम भिन्नात्मक संख्या x (सम भिन्नात्मक संख्या x सम भिन्नात्मक संख्या)

$\frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$

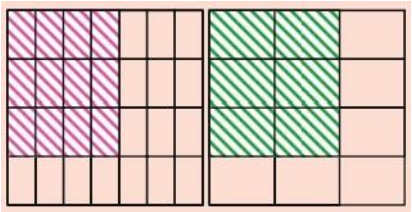


Figure 11

दोनों छायांकित क्षेत्रों की कुल क्षैतिज (horizontal) लम्बाई योग $\frac{4}{7} + \frac{2}{3}$ को दर्शाती है, जबकि लम्बवत (vertical) लम्बाई $\frac{3}{4}$ है। इसलिए कुल छायांकित क्षेत्र $\frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right)$ है। दूसरी ओर, गुलाबी क्षेत्र को

$\frac{3}{4} \times \frac{4}{7}$ दर्शाता है जबकि हरा क्षेत्र $\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ को चित्रित करता है। इसलिए कुल छायांकित क्षेत्र $\frac{3}{4} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ है। अतः:

$\frac{3}{4} \times \left(\frac{4}{7} + \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$।

विषम भिन्नात्मक संख्या x (सम भिन्नात्मक संख्या + विषम भिन्नात्मक संख्या)

$$\frac{5}{3} \times \left(\frac{2}{7} + \frac{7}{4}\right) = \frac{5}{3} \times \frac{2}{7} + \frac{5}{3} \times \frac{7}{4}$$

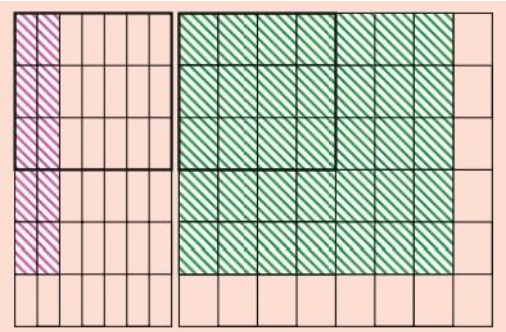


Figure 12

चित्र-12 को **चित्र-11** की तरह ही समझा जा सकता है। ध्यान दें कि जब भी कोई विषम भिन्नात्मक संख्या गणना में शामिल होती है, तो उसके आयाम की ओर छायांकित क्षेत्र इकाई वर्ग के बाहर फैल जाता है। यह मॉडल किन्हीं भी तीन भिन्नात्मक संख्याओं (और शून्य सहित प्राकृत संख्याओं) के किसी भी संयोजन के लिए गुणन के वितरण गुणधर्म का चित्रात्मक औचित्य दिखाता है।

गुणन का साहचर्य गुणधर्म (Associative Property of Multiplication)

गुणन के साहचर्य गुणधर्म में तीन भिन्नात्मक संख्याओं का गुणनफल शामिल होता है। इसके लिए हम आयतन (Volume) और 3D मॉडल यानी 'यूनिट क्यूब' (इकाई घन) का उपयोग एक पूर्ण के रूप में करते हैं। और क्रमश: x, y और z अक्षों पर तीन भिन्नात्मक संख्याओं को दर्शाते हैं।

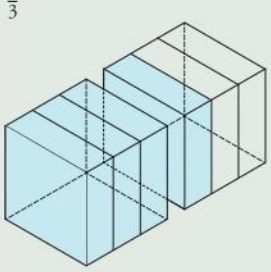
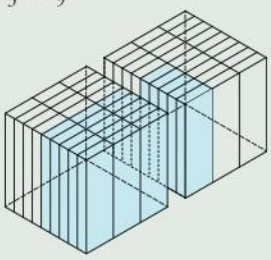
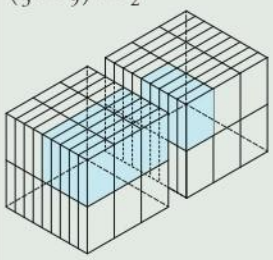
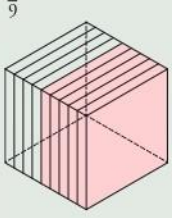
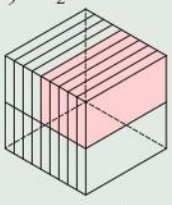
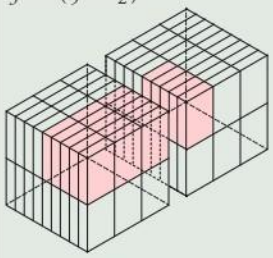
इसमें 8 सम्भावनाएँ हो सकती हैं :

1. तीनों सम भिन्नात्मक संख्याएँ
2. दो सम भिन्नात्मक संख्या और एक विषम भिन्नात्मक संख्या
    a. सम भिन्नात्मक संख्या× सम भिन्नात्मक संख्या × विषम भिन्नात्मक संख्या
    b. सम भिन्नात्मक संख्या × विषम भिन्नात्मक संख्या × सम भिन्नात्मक संख्या
    c. विषम भिन्नात्मक संख्या × सम भिन्नात्मक संख्या × सम भिन्नात्मक संख्या

3. एक सम भिन्नात्मक संख्या और दो विषम भिन्नात्मक संख्या
    a. सम भिन्नात्मक संख्या × विषम भिन्नात्मक संख्या × विषम भिन्नात्मक संख्या
    b. विषम भिन्नात्मक संख्या × सम भिन्नात्मक संख्या × विषम भिन्नात्मक संख्या
    c. विषम भिन्नात्मक संख्या × विषम भिन्नात्मक संख्या × सम भिन्नात्मक संख्या
4. तीनों विषम भिन्नात्मक संख्या

हम यहाँ 2c का एक उदाहरण दे रहे हैं और बाकी को इसी तरह से देखा जा सकता है। चूँकि यहाँ 3D प्रतिरूप हैं इसलिए हम इसे चरण-दर-चरण (step-wise) दिखा रहे हैं। हम निम्न उदाहरण पर विचार करते हैं :

$$\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}\right)\times\frac{1}{2}=\frac{4}{3}\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}\right)$$

	Step 1	Step 2	Step 3
Left hand side: $\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}\right)\times\frac{1}{2}$	$\frac{4}{3}$  Figure 5	$\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}$  Figure 6	$\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{9}\right)\times\frac{1}{2}$  Figure 7
Right hand side: $\frac{4}{3}\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}\right)$	$\frac{5}{9}$  Figure 8	$\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}$  Figure 9	$\frac{4}{3}\times\left(\frac{5}{9}\times\frac{1}{2}\right)$  Figure 10

दृश्यात्मक स्पष्टता के लिए, हमने दोनों इकाई घनों (unit cubes) के बीच थोड़ी जगह रखी है। लेकिन यह जगह होना अनिवार्य नहीं है। ध्यान दें कि दोनों स्थिति में अन्तिम आयतन (volume) समान है और इसे किन्हीं भी तीन भिन्नात्मक संख्याओं (और प्राकृत संख्याओं) के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है।

नोट : स्वाती सरकार द्वारा निर्मित यह पोस्टर एक तरह का चित्रात्मक औचित्य (visual justifications) प्रदान करता है जो प्रमाण (proofs) के समान नहीं हैं। यह पद्मप्रिया शिराली के दो पुल-आउट्स (PullOuts) - 'गुणन' (एट राइट एंगल्स मार्च, 2014) और 'भिन्न' (एट राइट एंगल्स जून, 2012), तथा शैलजा डी. शर्मा के 'भिन्नात्मक संख्या गुणन के लिए दृश्य विधि' (एट राइट एंगल्स जुलाई, 2018) पर आधारित है।

यह एट राइट एंगल्स मार्च, 2019 में प्रकाशित Properties of Multiplication का अनुवाद है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** हृदय कान्त दीवान **सम्पादन :** राजेश उत्साही