Translation of Low Floor High Ceiling Tasks Try-Angles! : Swati Sircar & Sneha Titus_From_Azim Premji University At Right Angles_March,2016

कक्षा में

लो फ्लोर हाई सीलिंग टास्क

ट्राई-एंगल्स!

आप कितने प्रखर हो सकते हैं?

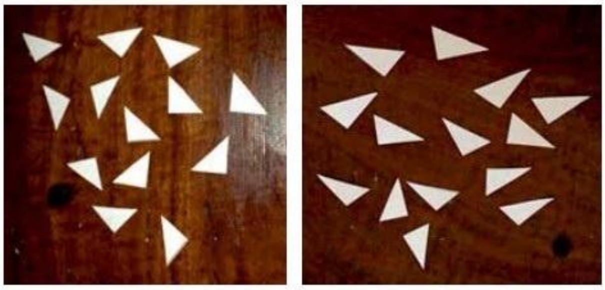
स्वाती सरकार और स्नेहा टाइटस

नवम्बर 2014 के अंक में, हमने 'लो फ्लोर हाई सीलिंग टास्क' नाम की एक नई श्रृंखला शुरू की थी। इस श्रृंखला का एक संक्षिप्त परिचय : एक गतिविधि को चुना जाता है जो सरल व उम्र के हिसाब से टास्क देने से शुरू होती है। ऐसा टास्क जिसे करने का प्रयास, कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा किया जा सकता हो। इन टास्कों की जटिलता बढ़ती जाती है ताकि प्रत्येक विद्यार्थी को अपनी अधिकतम क्षमता पर काम करने का प्रयास करने के लिए प्रेरित किया जा सके। इसमें सभी के लिए पर्याप्त काम होता है; लेकिन जैसे-जैसे गतिविधियों का स्तर जटिल होता जाता है, कम विद्यार्थी ही इन टास्कों को पूरा करने में सक्षम हो पाते हैं। हालाँकि, यहाँ महत्त्वपूर्ण यह है कि सभी विद्यार्थी व्यस्त रहते हैं और वे सभी पूरे टास्क के कम-से-कम एक हिस्से को पूरा करने में सक्षम होते हैं।

इस बार हम समकोण त्रिभुजों पर काम करेंगे जिसमें समद्विबाहू और विषमबाहू दोनों शामिल हैं। इस गतिविधि में रचनात्मकता, परिकल्पना करना, पैटर्न खोजना, आँकड़ों/अनुभवों को दर्ज करने की काफ़ी गुंजाइश है। सुगमकर्ता शिक्षक को चाहिए कि वह अपने विद्यार्थियों को उनके द्वारा सोचे गए अनुमानों के लिए प्रमाण खोजने के लिए प्रोत्साहित करें।

टास्क के लिए त्रिभुजों के 2 सेट की आवश्यकता होगी। प्रत्येक सेट में कम-से-कम 20 त्रिभुज होने चाहिए। त्रिभुज कार्डशीट से बने हो सकते हैं ताकि वे जल्दी खराब न हों। त्रिभुजों को बहुत आकार में बहुत बड़े होने की ज़रूरत नहीं है। वास्तव में, यह आइडिया हमें रद्दी काग़ज़ के उन टुकड़ों से आया जिन्हें कुछ आयताकार कार्डों के कोनों से काटकर अलग किया गया था (**चित्र-1**)।

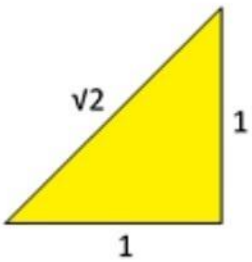
की-वर्ड : *त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग, आयत, समचतुर्भुज, समान्तरचतुर्भुज, समलम्ब चतुर्भुज, कोण, सर्वांगसमता, समरूप, सहयोगी, पैटर्न, कन्जेक्चर*



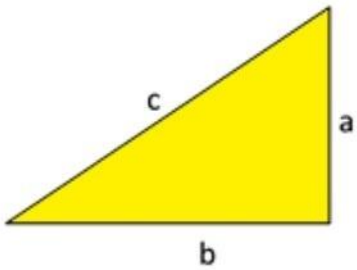
चित्र 1

पहला समूह सर्वांगसम समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों का है (मान लें कि इनकी भुजाएँ $1, 1, \sqrt{2}$ हैं) **चित्र-2**।

दूसरा समूह सर्वांगसम विषमबाहु समकोण त्रिभुजों का है (मान लें कि इनकी भुजाएँ *a, b, c* हैं) जहाँ $a < b < c$ है। **चित्र-3** देखें।



चित्र 2



चित्र 3

इन सभी टास्क में इन त्रिभुजों का उपयोग, कुछ ख़ास ज्यामितीय आकृति बनाने के लिए बिल्डिंग ब्लॉक के रूप में करना है। इन त्रिभुजों को जमाने के लिए एक आवश्यक शर्त यह है कि इनके बीच में कोई जगह नहीं होनी चाहिए और न ही इनमें कोई ओवरलैप हो (यानी एक-पर-एक चढ़ें नही हों, बस बिल्कुल सटे हों)। इन आकृतियों को विभिन्न तरीक़ों से बनाया जा सकता है। हमारा उद्देश्य, विद्यार्थियों को इन तरीक़ों को वर्गीकृत करके सामान्यीकरण करने के लिए प्रोत्साहित करना है।

यह लो फ्लोर हाई सीलिंग टास्क पूर्व-माध्यमिक कक्षाओं के विद्यार्थियों के लिए उपयुक्त होगा। उन्हें त्रिभुजों के गुण, एक चतुर्भुज के कोणों का योग, विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज और उनके गुण, और पाइथागोरस प्रमेय पता होने चाहिए। नवाचारी सुगमकर्ता शिक्षक इस गतिविधि को आगे बढ़ाकर अवतल चतुर्भुजों को भी शामिल कर सकते हैं, लेकिन त्रिभुज और उत्तल चतुर्भुज के दायरे में भी गणितीयकरण और कौशल विकास की बहुत सम्भावनाएँ हैं।

टास्क-1 : दिए गए त्रिभुजों से अलग-अलग चतुर्भुज बनाना

1.1 समद्विबाहू समकोण त्रिभुज के समूह से सभी सम्भावित चतुर्भुज बनाने की कोशिश करें और बनी आकृतिओं की पहचान करें। आप जितने चाहें उतने त्रिभुजों का उपयोग कर सकते

हैं लेकिन जमाए गए इन त्रिभुजों के बीच कोई जगह नहीं होनी चाहिए। इन्हें निम्न तालिका में भरें :

चतुर्भुज का नाम	**उपयोग में आए समद्विबाहू समकोण त्रिभुजों की संख्या**	**रेखाचित्र**	**और अधिक त्रिभुजों का उपयोग करके इस चतुर्भुज को बढ़ाने की सम्भावना**	
			रेखाचित्र	**अवलोकन**

1.2 इनमें कौन-सी आकृति नहीं है?

1.3 इसे विषमबाहू समकोण त्रिभुजों के साथ दोहराएँ। अपने परिणामों को इसी तरह की एक तालिका में दर्ज करें।

1.4 क्या आपको विषमबाहू समकोण त्रिभुजों से कोई नया चतुर्भुज मिला?

1.5 क्या कोई ऐसा चतुर्भुज है जिसे विषमबाहू समकोण त्रिभुजों से नहीं बनाया जा सकता है?

शिक्षकों के लिए नोट :

यह टास्क विद्यार्थियों के लिए चतुर्भुज के विभिन्न समूहों के बीच गुणों और असमानताओं की अपनी समझ का उपयोग करने का उत्तम तरीका है। उच्च स्तर पर गतिविधि करने की कोशिश विद्यार्थियों से सामान्य चतुर्भुज बनाने और उसके विशेष गुणों की जाँच करने की माँग करेगी। सुगमकर्ता शिक्षक को ध्यान रखना चाहिए कि वही चतुर्भुज त्रिभुजों की अलग-अलग संख्या से बनाया जा सकता है। या, फिर वही चतुर्भुज त्रिभुजों की उसी संख्या को अलग-अलग ओरिएन्टेशन में जमाकर बनाया जा सकता है। कोई चतुर्भुज मूल चतुर्भुज का एक बड़ा रूप हो सकता है, जिसमें त्रिभुज एक ही या अलग-अलग ओरिएन्टेशन में जमें हों। दिलचस्प यह है कि चतुर्भुज के आयाम बदल भी सकते हैं। और अगर न भी बदलें तो भी इस पहलू को तालिकाबद्ध करना और उसमें पैटर्न खोजना उपयोगी होगा। इसमें अनोख़े संख्या पैटर्न भी सामने आ सकते हैं। सुगमकर्ता विद्यार्थियों को व्यवस्थित रूप से अपने निष्कर्षों को दर्ज करने और इनसे सामान्यीकरण करने के लिए प्रोत्साहित करें और इसमें उनकी सहायता करें। मसलन जब समद्विबाहू समकोण त्रिभुजों का उपयोग किया जाता है, तो समचतुर्भुज (वर्ग के विशिष्ट केस को छोड़कर) और पतंग नहीं बनाई जा सकती। और जब विषमबाहू त्रिभुजों का उपयोग किया जाता है, तो वर्ग नहीं बनाया जा सकता है।

टास्क-2 : दिए गए त्रिभुजों से अलग-अलग त्रिभुज बनाना

2.1 समद्विबाहू समकोण त्रिभुजों का इस्तेमाल कर अधिक-से-अधिक त्रिभुज बनाने की कोशिश करें। आपको किस-किस प्रकार के त्रिभुज मिलते हैं? अपने परिणामों को पहले की तरह तालिका में दर्ज करें।

2.2 कौन-से त्रिभुज सम्भव हैं? समझाइए क्यों।

2.3 उपरोक्त कार्य को विषमबाहू समकोण त्रिभुजों के साथ दोहराएँ और अपने परिणामों को तालिका में दर्ज करें।

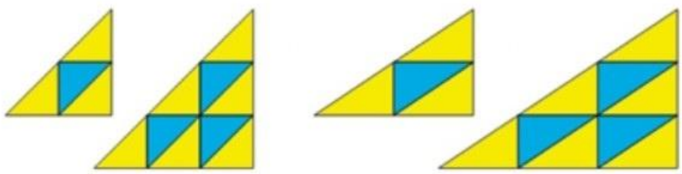
2.4 आपको किस-किस तरह के त्रिभुज मिले? यह पिछले मामले से कैसे अलग है?

शिक्षकों के लिए नोट :

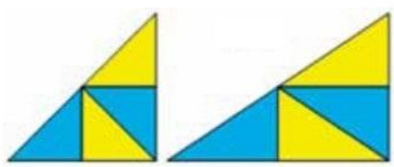
समद्विबाहू समकोण त्रिभुजों से केवल समद्विबाहू समकोण त्रिभुज बनाना सम्भव है; इसके लिए एक प्रमाण, पाठक, लो फ्लोर हाई सीलिंग के *एट राइट एंगल्स* के नवम्बर 2015 में छपे लेख में देख सकते है। विषमबाहू त्रिभुजों से, विषमबाहू समकोण त्रिभुज तथा न्यूनकोण और अधिककोण समद्विबाहू त्रिभुज बनाना सम्भव है। इसमें कुछ अच्छे पैटर्न उभरते हैं, जैसे कि 1, 4, 9, 16, ... त्रिभुजों से बनने वाले त्रिभुज और इसके एवं क्रमगत विषम संख्याओं के जोड़ के बीच सम्बन्ध। सुगमकर्ता को विद्यार्थियों को अपने काम को व्यवस्थित रूप से दर्ज करने और अपने निष्कर्षों को तर्कसंगत रूप से समझाने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए।

यह टास्क विशेष रूप से रोमांचक है क्योंकि मध्य-बिन्दु प्रमेय और थाल्स के मूल आनुपातिक प्रमेय जैसे कुछ प्रमेय, त्रिभुजों की कुछ जमावटों में स्पष्ट रूप से दिखाई देते हैं (**चित्र-4** देखें)। यह प्रदर्शन और प्रमाण के बीच अन्तर करने का एक अच्छा अवसर हो सकता है।

चित्र-5 में देखें कि कैसे त्रिभुजों का यह ओरिएन्टेशन समद्विबाहू समकोण त्रिभुजों और विषमबाहू समकोण त्रिभुजों के बाहरी त्रिभुजों के परिकेन्द्र (circumcentre) को स्पष्ट रूप से चिह्नित करता है। अधिक सूक्ष्मता में, यह चित्र दर्शाता है कि एक समद्विबाहू समकोण त्रिभुज में, सभी तीनों भुजाओं के लम्बवत समद्विभाजी समवर्ती होते हैं।



चित्र 4



चित्र 5

टास्क-3 : पिछले काम का विस्तार, न्यूनकोण/अधिककोण त्रिभुजों से त्रिभुज बनाना

3.1 ऊपर त्रिभुज बना रही कौन-सी जमावट न्यूनकोण त्रिभुजों से बन सकती है?

3.2 कौन-सी जमावट न्यूनकोण त्रिभुजों से नहीं बन सकती?

3.3 ऊपर की जमावट में से कौन-सी अधिककोण त्रिभुजों से बन सकती है?

3.4 कौन-सी जमावट अधिककोण त्रिभुजों से नहीं बन सकती?

शिक्षकों के लिए नोट :

चित्र-4 जैसी जमावट न्यूनकोण और अधिककोण त्रिभुजों से सम्भव हैं, जबकि **चित्र-5** जैसी जमावट न्यूनकोण और अधिककोण त्रिभुजों से नहीं बनाई जा सकती; वे केवल समकोण त्रिभुजों से ही सम्भव हैं। यह टास्क ठोस सामग्री के साथ काम करते हुए अधिक अमूर्त शैली की ओर बढ़ता जाता है। यदि विद्यार्थियों को यह मुश्किल लगता है, तो उनको सुगमकर्ता पेंसिल और काग़ज़ या और अधिक विकसित ज्यामिति सॉफ्टवेयर जैसे जियोजेब्रा के उपयोग का सुझाव दे सकते हैं।

टास्क-4 : समद्विबाहु समकोण त्रिभुज से वर्ग (और त्रिभुज) बनाना – उपयोग किए गए त्रिभुजों की संख्या का सामान्यीकरण करना

4.1 त्रिभुजों से वर्ग बनाना और निम्न तालिका को भरना :

उपयोग किए गए समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों की संख्या	वर्ग का चित्र (यदि इसे बनाना सम्भव हो)	वर्ग की भुजा
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		

13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		

यह कार्य जारी रखें जब तक कोई पैटर्न उभरता न दिखे। (आप 100 त्रिभुज तक जा सकते हैं।)

4.2 यदि हम *m* त्रिभुजों से एक वर्ग बना सकते हैं, तो क्या हम *2m* त्रिभुजों से भी वर्ग बना सकते हैं?

4.3 समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों की संख्या का एक सामान्य निरूपण दें जिससे आप कोई वर्ग बना सकते हैं?

4.4 समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों की संख्या का एक सामान्य निरूपण दें जिससे आप एक समद्विबाहु समकोण त्रिभुज बना सकते हैं?

शिक्षकों के लिए नोट :

इस टास्क में कल्पनाशीलता और क्रियात्मकता दोनों कौशल का उपयोग होता है। लेकिन वे विद्यार्थी जो इनमें निपुण नहीं हैं, उन्हें हतोत्साहित होने की ज़रूरत नहीं है क्योंकि इनमें पैटर्न जल्द ही उभरेंगे; एक बार जब वे समझ जाएँगे कि सम्भव वर्गों की भुजाएँ केवल 1 या $\sqrt{2}$ के गुणजों से बन सकती हैं, तो वे इन भुजाओं के सम्भव विन्यास वाले, इस तरह के और वर्ग तेज़ी से बनाने में सक्षम होंगे। कुशल मार्गदर्शन से वर्ग के बढ़ते आकार में निहित अंकगणितीय श्रेणी को सामने लाया जा सकता है। ताकि विद्यार्थी इस निष्कर्ष का सामान्यीकरण कर सकें कि वर्ग केवल $(2n)^2$और $2n^2$ त्रिभुजों से बनाया जा सकता है।

आख़िरी सवाल एक दिलचस्प स्थिति पैदा करता है। इसमें विद्यार्थियों को यह पहचानने में मदद करनी चाहिए कि ये त्रिभुज n^2 और $2n^2$ समद्विबाहू समकोण त्रिभुजों से बनाए जा सकते हैं – उन्हें यह सिद्ध करने की चुनौती दें कि इसे n^2 त्रिभुज और $2n^2$ त्रिभुजों के रूप में सामान्यीकृत किया जा सकता।

टास्क-5 : समद्विबाहु समकोण त्रिभुजों से सामान्यीकरण – वर्गों और त्रिभुजों के संयोजनों से क्या पता चलता है

5.1 यदि हम *m* त्रिभुजों से एक वर्ग बना सकते हैं, तो क्या हम *m* त्रिभुजों से एक त्रिभुज भी बना सकते हैं?

5.2 यदि हम *m* त्रिभुजों से एक त्रिभुज बना सकते हैं, तो क्या हम *m* त्रिभुजों से एक वर्ग भी बना सकते हैं?

शिक्षकों के लिए नोट :

एक वर्ग को उसके विकर्ण पर काटने और त्रिभुजों को घुमाने से हमेशा एक त्रिभुज ही मिलेगा, और यह विद्यार्थियों में कल्पनाशीलता विकसित करने के लिए एक अच्छी गतिविधि है। इसलिए **5.1** का जवाब हमेशा 'हाँ' होगा, लेकिन **5.2** केवल तभी सही होगा जब इस्तेमाल किए गए त्रिभुजों की संख्या सम संख्या हो।

निष्कर्ष

खाली हाथ भी गणित सीखने की एक गतिविधि का जरिया बन जाते हैं! रद्दी काग़ज़ या कतरनों से काम करने की ताकत तब समाने आई जब हम इन त्रिभुजों के साथ खिलवाड़ कर रहे थे। हमें यकीन है कि अभी हमने इसकी उन गहराईयों को नहीं मापा है और न ही इसकी उन ऊँचाइयों को छुआ है, जो और अधिक खेल-खेल में सीखने से सामने आ सकती हैं। इसमें और अधिक सम्भावनाएँ हैं। ये टास्क विद्यार्थियों के लिए अनुभवजन्य सीखना सुनिश्चित करेंगी और हमें आशा है कि शिक्षक अपने अनुभव लिखेंगे और अपनी कक्षा के अनुभवों से सीखी बातों को AtRiUM (हमारे फेसबुक पेज) पर साझा करेंगे!

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में वरिष्ठ प्राध्यापक के पद पर कार्यरत हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (उनका पहला प्यार चित्रकला है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से सांख्यिकी में स्नातक और स्नातकोत्तर उपाधि तथा वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सीएटल से गणित में एमएस की उपाधि हासिल की हैं। वे 15 से अधिक सालों से विद्यार्थियों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं, और उनकी हर प्रकार की व्यावहारिक गतिविधियों में गहरी रुचि है – ख़ासकर ओरिगामी में। उन्होंने अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के बेंगलूरु परिसर में गणित की प्रयोगशाला 'मैथ स्पेस' की शुरुआत की है। यह प्रयोगशाला विद्यालयों, शिक्षकों, अभिभावकों, विद्यार्थियों, विद्यालयी शिक्षा में कार्यरत ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवाएँ प्रदान करती है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

स्नेहा टाइटस अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्राध्यापक के पद पर कार्यरत हैं। गणित की सुन्दरता, तर्क और प्रासंगिकता को साझा करना उनका जुनून है। स्नेहा ग्रामीण और शहरी विद्यालयों में गणित के शिक्षकों की मेन्टर हैं और उनके साथ कार्यशालाएँ आयोजित करती हैं जिसमें वे गणित के शिक्षण में समस्या-समाधान के साथ-साथ पठन-पाठन की रणनीतियों के माध्यम से कौशल विकास पर ध्यान केन्द्रित करती हैं। उनसे sneha.titus@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण** : हृदय कान्त दीवान **सम्पादन** : राजेश उत्साही