
Translation of DADS Rule! : Swati Sircar & Sneha Titus From_Azim Premji University At Right Angles_March, 2017

DADS नियम!

स्वाती सरकार और स्नेहा टायटस

हम एक 10 × 10 के ग्रिड में क्रमानुसार लिखी गिनती से शुरुआत करते हैं और 11 के गुणज को रंग करते हैं। जैसा कि आप देख सकते हैं, वे एक विकर्ण (diagonally) में होते हैं और 100 तक की संख्या में अंक दोहराए जाते हैं।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चित्र - 1

जब हम 11 के उन गुणजों को देखते हैं, जो 100 से अधिक हैं, तो अंकों को दोहराए जाने वाला पैटर्न बदल जाता है। कोई और सामान्य पैटर्न खोजने के लिए, इसी 10 × 10 ग्रिड में रंगीन विकर्ण के समानान्तर किसी भी अन्य विकर्ण को देखें। उदाहरण के लिए, यदि हम 3 से शुरू होने वाले विकर्ण को लें, तो हमें 3, 14, 25, 36, 47, 58, 69, 80 संख्याएँ मिलेंगी। थोड़ा ध्यान से देखने पर हम पल भर में ही यह जान जाते हैं कि हर संख्या में इकाई के अंक और दहाई के अंक के अन्तर में एक पैटर्न है, सिर्फ़ इस विकर्ण की अन्तिम संख्या के अन्तर (जो कि −8 है) को छोड़कर, अन्य सभी संख्याओं के इकाई और दहाई में 3 का एक नियत अन्तर है। इसी तरह यदि हम 2 से शुरू होने वाले विकर्ण को देखते हैं, तो हमें अन्तर क्रमशः 2 और −9 मिलता है।

की-वर्ड : *गुणनखण्ड , गुणज , पहाड़े, पैटर्न , विभेदित शिक्षण, अन्वेषण*

11	22	33	44	55	66	77	88	99	110
121	132	143	154	165	176	187	198	209	220
231	242	253	264	275	286	297	308	319	330
341	352	363	374	385	396	407	418	429	440
451	462	473	484	495	506	517	528	539	550
561	572	583	594	605	616	627	638	649	660
671	682	693	704	715	726	737	748	759	770
781	792	803	814	825	836	847	858	869	880
891	902	913	924	935	946	957	968	979	990

चित्र -2

हम यह देख सकते हैं कि किसी भी विकर्ण के लिए अंकों के अन्तर के रूप में हमें जो पूर्णांक प्राप्त होते हैं वे एक-दूसरे से 11 के अन्तर पर होते हैं। अब 11 के गुणजों वाले विकर्ण की हरेक संख्या में इकाई और दहाई के अंकों के अन्तर पर ध्यान दें; हम पाते हैं कि 100 से कम वाले 11 के सभी गुणजों के लिए यह अन्तर शून्य है।

अब हम 3-अंकीय संख्याओं पर एक नज़र डालते हैं। जिसमें हमें 11 के गुणज 110, 121, 132, 143 . . . . मिलते हैं। दिलचस्प बात यह है कि 209 तक पहुँचने तक, इकाई के अंक और सैकड़े के अंक के योग में से दहाई के अंक को घटाने पर परिणाम 0 आता है। 209 पर यह अन्तर 11 हो जाता है। ऐसा लगता है कि अब केवल 11 के गुणजों पर ध्यान केन्द्रित करने का समय है। ऐसा करने के लिए, हम 11 के गुणजों की इन पंक्तियों को बनाने के लिए किसी भी स्प्रेडशीट (हमने एक्सेल का उपयोग किया है) के उपयोग की सलाह देते हैं। यदि आवश्यक हो, तो शिक्षक कक्षा में इनका प्रिंटआउट ला सकते हैं। जिसमें विद्यार्थी पैटर्न को देख सकते हैं और उन संख्याओं में रंग भर सकते हैं जिनमें (U + H) - T = 11 है।

चित्र-2 को देखें। यहाँ हमें 209, 308, 407 . . . 902 का एक दिलचस्प त्रिभुज मिलता है जो एकान्तर (alternate) अंकों के योग का अन्तर 11 देता है, जबकि 11 का हर दूसरा गुणज एकान्तर अंकों के योग के अन्तर के रूप में शून्य देता है।

11 के 4-अंकीय गुणजों के बारे में आप क्या सोचते हैं? **चित्र-3** देखें। हम देखते हैं कि (U + H) - (T + Th) = 0 या 11 या -11 है। इस बिन्दु पर, हमने इस अन्तर को DADS (Difference of Alternate

Digit Sums यानी एकान्तर अंकों के योग का अन्तर) नाम देने का निर्णय लिया। यह देखना दिलचस्प है कि कैसे DADS 11 वाले त्रिभुज बड़े त्रिभुजों के रूप में शुरू होते हैं लेकिन फिर सिमटकर केवल एक संख्या 7909 तक रह जाते हैं। इसी तरह, DADS -11 वाली संख्याएँ शुरू में समान विन्यास के त्रिभुज के रूप में दिखाई देती हैं, लेकिन फिर उनका विन्यास बदलता है और लगता है कि वे ग्रिड के अन्तिम छोर तक फैलती हैं।

क्या होगा यदि हम किसी बेहतर पैटर्न की खोज में कॉलम की संख्या बदल दें? हमने 9 कॉलम का उपयोग करने की कोशिश की, यानी पहली पंक्ति 11 . . . 99, दूसरी पंक्ति 110 . . . 198 आदि। तुरन्त ही, हमें त्रिभुज का एक स्पष्ट पैटर्न दिखने लगा। **चित्र-4 देखें**। DADS 11 वाले त्रिभुज सिकुड़ते हैं और DADS -11 वालों के लिए जगह बनाते हैं, जो तब तक बढ़ते हैं जब तक कि वे लगभग पूरी पंक्तियों को कवर न कर लें।

इस बिन्दु पर, हम वर्णनात्मक तरीक़े से हटकर 'लो फ्लोर हाई सीलिंग' (Low Floor High Ceiling) पैटर्न पर आधारित कुछ प्रश्न पूछना चाहेंगे।

3971	3982	3993	4004	4015	4026	4037	4048	4059	4070
4081	4092	4103	4114	4125	4136	4147	4158	4169	4180
4191	4202	4213	4224	4235	4246	4257	4268	4279	4290
4301	4312	4323	4334	4345	4356	4367	4378	4389	4400
4411	4422	4433	4444	4455	4466	4477	4488	4499	4510
4521	4532	4543	4554	4565	4576	4587	4598	4609	4620
4631	4642	4653	4664	4675	4686	4697	4708	4719	4730
4741	4752	4763	4774	4785	4796	4807	4818	4829	4840
4851	4862	4873	4884	4895	4906	4917	4928	4939	4950
4961	4972	4983	4994	5005	5016	5027	5038	5049	5060
5071	5082	5093	5104	5115	5126	5137	5148	5159	5170
5181	5192	5203	5214	5225	5236	5247	5258	5269	5280
5291	5302	5313	5324	5335	5346	5357	5368	5379	5390
5401	5412	5423	5434	5445	5456	5467	5478	5489	5500
5511	5522	5533	5544	5555	5566	5577	5588	5599	5610
5621	5632	5643	5654	5665	5676	5687	5698	5709	5720
5731	5742	5753	5764	5775	5786	5797	5808	5819	5830
5841	5852	5863	5874	5885	5896	5907	5918	5929	5940

चित्र -3

लो फ्लोर हाई सीलिंग का एक संक्षिप्त परिचय : *एक गतिविधि को चुना जाता है जो सरल व उम्र के हिसाब से टास्क देने से शुरू होती है। ऐसा टास्क जिसे करने का प्रयास, कक्षा के सभी विद्यार्थियों द्वारा किया जा सकता हो। इन टास्कों की जटिलता बढ़ती जाती है ताकि प्रत्येक विद्यार्थी को अपनी अधिकतम क्षमता पर काम करने का प्रयास करने के लिए प्रेरित किया जा सके। इसमें सभी के लिए पर्याप्त काम होता है; लेकिन जैसे-जैसे गतिविधियों का स्तर जटिल होता जाता है, कम विद्यार्थी ही इन टास्कों को पूरा करने में सक्षम हो पाते हैं। हालाँकि, यहाँ महत्त्वपूर्ण यह है कि सभी विद्यार्थी व्यस्त रहते हैं और वे सभी पूरे टास्क के कम-से-कम एक हिस्से को पूरा करने में सक्षम होते हैं।*

3080	3091	3102	3113	3124	3135	3146	3157	3168
3179	3190	3201	3212	3223	3234	3245	3256	3267
3278	3289	3300	3311	3322	3333	3344	3355	3366
3377	3388	3399	3410	3421	3432	3443	3454	3465
3476	3487	3498	3509	3520	3531	3542	3553	3564
3575	3586	3597	3608	3619	3630	3641	3652	3663
3674	3685	3696	3707	3718	3729	3740	3751	3762
3773	3784	3795	3806	3817	3828	3839	3850	3861
3872	3883	3894	3905	3916	3927	3938	3949	3960
3971	3982	3993	4004	4015	4026	4037	4048	4059
4070	4081	4092	4103	4114	4125	4136	4147	4158
4169	4180	4191	4202	4213	4224	4235	4246	4257
4268	4279	4290	4301	4312	4323	4334	4345	4356
4367	4378	4389	4400	4411	4422	4433	4444	4455
4466	4477	4488	4499	4510	4521	4532	4543	4554
4565	4576	4587	4598	4609	4620	4631	4642	4653
4664	4675	4686	4697	4708	4719	4730	4741	4752
4763	4774	4785	4796	4807	4818	4829	4840	4851
4862	4873	4884	4895	4906	4917	4928	4939	4950

चित्र-4

अब तक के हमारे निष्कर्षों का सार इस प्रकार है :

1. 11 के सभी 2-अंकीय गुणजों में दहाई और इकाई के स्थान पर अंक दोहराए जाते हैं।
2. 11 के 3-अंकीय गुणजों के लिए, इकाई के अंक और सैकड़े के अंक के योग में से दहाई के अंक को घटाने पर परिणाम या तो 0 आता है या +11 प्राप्त होता है।
3. DADS (Difference of Alternate Digit Sums - एकान्तर अंकों के योग का अन्तर) को एकान्तर स्थानों पर स्थित अंकों के योग के अन्तर के रूप में परिभाषित किया गया है।
4. 11 के 4-अंकीय गुणजों के लिए, DADS 0, +11 या −11 था।
5. वे संख्याएँ जिन्होंने एक विशिष्ट DADS मान दिया, वे एक त्रिभुज के रूप में दिखाई दीं, जो 9 कॉलम वाले ग्रिड में स्पष्ट रूप से दिखाई दे रही थीं।

खोज-बीन के लिए प्रश्न :

1. क्या ऐसी संख्याएँ हैं जिनका DADS 22 के बराबर है?
2. वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी है जिसका DADS 22 के बराबर है?
3. क्या ऐसी संख्याएँ हैं जिनका DADS −22 के बराबर है? वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी है जिसका DADS −22 के बराबर है?
4. वह सबसे छोटी संख्या कौन-सी होगी जिसका DADS 11*n* के बराबर हो? इस संख्या में कितने अंक होंगे?
5. *n* के किसी दिए गए मान के लिए, 11*n* के बराबर DADS वाली सबसे छोटी संख्या के अंकों की संख्या के लिए एक सामान्य सूत्र खोजें।
6. क्या 11 के सभी गुणजों के लिए, DADS हमेशा 11 का एक गुणज होगा?

शिक्षकों के लिए नोट्स :

1. विद्यार्थी DADS 22 वाली संख्या प्राप्त करने के लिए 1010101010101010101010101010101010101010101 के रूप में संख्याएँ बना सकते हैं। यहाँ से, वे जल्द ही संख्या को छोटा करके 20202020202020202020 करना शुरू कर देंगे और यह देखेंगे कि क्या वे इससे भी छोटी संख्याएँ प्राप्त कर सकते हैं।

2. यह विद्यार्थियों के लिए इस खोज-बीन में व्यवस्थित रूप से आगे बढ़ने का एक अच्छा अवसर है। चरण-1 के तर्क का पालन करते हुए, वे बहुत छोटी संख्या 909 प्राप्त करते हैं जिसका DADS 18 है (यह 11 का गुणज नहीं है)। 22 का DADS प्राप्त करने के लिए, संख्या 40909 होनी चाहिए।

3. यह एक बहुत ही दिलचस्प बदलाव है – ऊपर दिए गए चरणों के तर्क का पालन करते हुए, हम देखते हैं कि 409090 एक ऐसी संख्या है जिसका DADS -22 है। क्या यह सबसे छोटी संख्या है? स्पष्ट रूप से, यदि इकाई के स्थान के साथ एकान्तर स्थानों पर ग़ैर-शून्य (non-zero) अंक हैं, तो अन्य स्थानों के अंकों को बड़ा होना होगा ताकि अंतर -22 बना रहे। विद्यार्थी यह देख सकते हैं कि ऋणात्मक DADS वाली सबसे छोटी संख्या में अंकों की संख्या सम (even) होगी और धनात्मक DADS वाली सबसे छोटी संख्या में अंकों की संख्या विषम (odd) होगी। किसी विशेष DADS मान वाली सबसे छोटी संख्या को दर्ज करने वाली तालिका उन्हें यह अवलोकन करने में मदद करेगी।

4. आगे बढ़ते हुए, हम पूछ सकते हैं कि किसी भी प्राकृत संख्या के लिए 11*n* DADS वाली सबसे छोटी संख्या के अंकों की संख्या क्या होगी। तर्क बिल्कुल पहले जैसा ही है। उदाहरण के लिए, DADS 55 वाली सबसे छोटी संख्या में इकाई अंक से शुरू होने वाले प्रत्येक एकान्तर स्थान पर छह 9 होने चाहिए और फिर सबसे आगे वाले अंक में 1 होना चाहिए (55 ÷9 = 6, शेषफल 1)। इसलिए, यह 13 अंकों की संख्या 1090909090909 होगी। अतः 11*n* के DADS वाली सबसे छोटी संख्या का सामान्य सूत्र इस प्रकार होगा : यदि *q*

और r ऐसी प्राकृत संख्याएँ हैं कि $11n \div 9 = q$ और शेषफल r है (यानी $r < 9$), तो वह संख्या होगी :

$$r \times 10^{2q} + 9 \times (10^{2(q-1)} + 10^{2(q-2)} + \ldots + 1).$$

यह $2q + 1$ अंकों वाली एक संख्या होगी। हम इसे DADS नियम (DADS Rule) कहते हैं!

5. **सिद्ध करें कि यदि N, 11 का गुणज है, तो DADS भी 11 का गुणज होगा, और इसके विपरीत भी सही होगा** :

मान लें $(2n + 1)$ अंकों वाली कोई संख्या N है : $a_0 + 10a_1 + 100a_2 + \ldots + 10^{2n} \times a_{2n}$

इसके एकान्तर अंकों का योग $a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}$ और $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}$ है।

इसलिए N के लिए DADS है : $(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2-1})$

आइए N - DADS पर विचार करें जो कि है :

$a_0 + 10_{a1} + 100_{a2} + \ldots + 10^{2n} \times a_{2n} - [(a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) - (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})]$

$= a_0 + 10_{a1} + 100_{a2} + \ldots + 10^{2n} \times a_{2n} - (a_0 + a_2 + \ldots + a_{2n}) + (a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1})$

$= 11a_1 + 99a_2 + 1001a_3 + 9999a_4 + \ldots + (10^{2n-1} + 1)a_{2n}-1 + (10^{2n} - 1)a_{2n}$

$= \sum_{k=1}^{n} [(10^{2k-1} + 1)a_{2k-1} + (10^{2k} - 1)a_{2k}]$

अब $10^{2k-1} + 1 = (10 + 1)(10^{2k-2} - 10^{2k-3} + \ldots + 1) = 11b$ जहाँ b कोई प्राकृत संख्या है, यानी $10^{2k}-1 + 1$ विभाज्य है 11 से। क्रमिक अपघटन (decomposition) के इस चरण को विद्यार्थियों के लिए समझना आसान हो सकता है यदि हम एक उदाहरण का उपयोग करें, जैसे कि...

$10^5 + 1 = 10 \cdot 10^4 + 1 = 11 \cdot 10^4 - 1 \cdot 10^4 + 1$

$= 11 \cdot 10^4 - 10 \cdot 10^3 + 1 = 11 \cdot 10^4 - 11 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^3 + 1$

$= 11 \cdot 10^4 - 11 \cdot 10^3 + 10 \cdot 10^2 + 1 = 11 \cdot 10^4 - 11 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10^2 - 10^2 + 1$

$= 11 \cdot 10^4 - 11 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10^2 - 10 \cdot 10 + 1$

$= 11 \cdot 10^4 - 11 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10^2 - 11 \cdot 10 + 1 \cdot 10 + 1$

$= 11 \cdot 10^4 - 11 \cdot 10^3 + 11 \cdot 10^2 - 11 \cdot 10 + 11 - 1 + 1 = 11(10^4 - 10^3 + 10^2 - 10 + 1)$

जो 11 का गुणज है।

इस चरण से, विद्यार्थियों को सामान्यीकरण (generalise) करना आसान लग सकता है। वे यह भी जाँच कर सकते हैं कि क्या $10^n + 1$ सभी n के लिए 11 का गुणज है या केवल विषम n के लिए।

इसी तरह $10^{2k} - 1 = (10^2)^k - 1 = 100^k - 1 = (100 - 1)(100^{k-1}\} + \ldots + 1) = 99c$ किसी प्राकृत संख्या c के लिए, $10^{2k} - 1$ संख्या 99 से विभाज्य है और इसलिए 11 से भी विभाज्य है।

चूँकि N - DADS संख्या 11 से विभाज्य है, इसलिए या तो N और DADS दोनों 11 से विभाज्य होंगे या दोनों में से कोई भी नहीं होगा; अतः यदि DADS संख्या 11 का गुणज है, तो मूल संख्या N भी होगी, और यदि DADS नहीं है, तो N भी नहीं होगी।

निष्कर्ष : 'लो फ्लोर हाई सीलिंग' गतिविधियों के लिए गणितीय जाँच-पड़ताल एकदम सटीक होती हैं। यहाँ हमने बताया है कि कैसे एक साधारण पैटर्न को पहचाना जा सकता है, उसकी जाँच-पड़ताल की जा सकती है, उसके साथ खेला जा सकता है और उसका सामान्यीकरण किया जा सकता है। यदि आपके विद्यार्थियों ने 'DADS नियम' (DADS Rule) का आनन्द लिया है, तो उन्हें अन्य संख्या पैटर्न के साथ भी इसी तरह की विधियों से प्रयास करने दें; हमें उम्मीद है कि वे इसमें माहिर हो जाएँगे!

अपने विद्यार्थियों के निष्कर्षों को 'एट राइट एंगल्स' (At Right Angles) के साथ साझा करना न भूलें।

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में वरिष्ठ प्राध्यापक के पद पर कार्यरत हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (उनका पहला प्यार चित्रकला है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से सांख्यिकी में स्नातक और स्नातकोत्तर उपाधि तथा वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सीएटल से गणित में एमएस की उपाधि हासिल की हैं। वे 15 से अधिक सालों से विद्यार्थियों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं, और उनकी हर प्रकार की व्यावहारिक गतिविधियों में गहरी रुचि है – ख़ासकर ओरिगामी में। उन्होंने अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के बेंगलूरु परिसर में गणित की प्रयोगशाला 'मैथ स्पेस' की शुरुआत की है। यह प्रयोगशाला विद्यालयों, शिक्षकों, अभिभावकों, विद्यार्थियों, विद्यालयी शिक्षा में कार्यरत ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवाएँ प्रदान करती है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

स्नेहा टाइटस अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटीन्यूइंग एजूकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में सहायक प्राध्यापक के पद पर कार्यरत हैं। गणित की सुन्दरता, तर्क और प्रासंगिकता को साझा करना उनका जुनून है। स्नेहा ग्रामीण और शहरी विद्यालयों में गणित के शिक्षकों की मेन्टर हैं और उनके साथ कार्यशालाएँ आयोजित करती हैं जिसमें वे गणित के शिक्षण में समस्या-समाधान के साथ-साथ पठन-पाठन की रणनीतियों के माध्यम से कौशल विकास पर ध्यान केन्द्रित करती हैं। उनसे sneha.titus@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **सम्पादन :** राजेश उत्साही