अंक 24 | मार्च 2026
चौ-मासिक | बेंगलूरु
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

Azim Premji University

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

क्या आपने कभी महसूस किया है कि अपनी परीक्षाओं को पूरा करना दहकते अंगारों पर सफलतापूर्वक चलने या आग की भट्टी से बच निकलने जैसा अनुभव है? क्या आपने अपने विद्यार्थियों को भी इसी तरह की अग्निपरीक्षा से गुज़ारा है? क्या आपने चाहा है कि चीज़ें बदल सकें? क्या वर्ष के अन्त में होने वाले योगात्मक आकलन को इस तरह तैयार किया जा सकता है कि वह निर्धारित दक्षताओं को प्राप्त करने में बच्चे की उपलब्धि का एक प्रामाणिक आकलन बन सके? क्यों नहीं? हमें बच्चे की सहनशक्ति का या तनाव में उसके प्रदर्शन का आकलन करने की आवश्यकता नहीं है, और प्राथमिक स्तर पर तो बिल्कुल भी नहीं। आकलन आवश्यक है लेकिन यह कोई अनिवार्य बुराई नहीं है – हम इसे एक ऐसी स्वाभाविक प्रक्रिया कैसे बना सकते हैं जो एक बच्चे की सर्वोत्तम क्षमताओं को निखारकर सामने लाए? विद्यार्थी अपनी चुनौतियों का सामना करते हुए जिन पहाड़ों पर चढ़ने की कोशिश कर रहे हैं, हम उसे उनके लिए कैसे सुगम बना सकते हैं, उसमें कैसे मदद कर सकते हैं?

सम्पादक की ओर से...

प्रिय पाठको,

बसन्त की आहट मिल रही है! मार्च का महीना है और सर्दियों की ठण्ड अब ताज़ा हवाओं, खिलती कलियों और शैक्षणिक वर्ष की समाप्ति के साथ गर्मियों की छुट्टियों की सम्भावना को रास्ता दे रही है। लेकिन रुकिए – फ़ुर्सत के उन अन्तहीन दिनों से पहले, एक आख़िरी बाधा है, वह डरावनी वार्षिक परीक्षा, वह योगात्मक आकलन जो साल भर के सीखने का अन्तिम निष्कर्ष है। शिक्षकों द्वारा रचनात्मक आकलन की नई तकनीकों के उपयोग और उनकी आवश्यकता को तेज़ी से अपनाए जाने के साथ, गणित की सामान्य पेंसिल और काग़ज़ वाली परीक्षाएँ अब अधिक मनोरंजक लेकिन उतनी ही सटीक गतिविधियों में बदल गई हैं। ये शिक्षक, विद्यार्थी और अभिभावकों को यह बताने का काम करती हैं कि बच्चे ने क्या सीखा है, और वे कौन-से क्षेत्र हैं जिनमें उन सभी की ओर से अधिक चिन्तन और प्रयास की आवश्यकता है। हालाँकि, वह अन्तिम परीक्षा कुछ अलग ही बात लगती है। क्या ऐसा होना ज़रूरी है? इस अंक में आँचल चोमल, शिल्पी बनर्जी, अनुषा टी. और रेशमा कृष्णन *प्रिपरेटरी स्टेज पर योगात्मक आकलन* की आवश्यकता और इसे प्रामाणिक एवं आयु-अनुरूप तरीके से संचालित करने के तरीक़ों का परीक्षण कर रही हैं। सम्भव है कि अगले शैक्षणिक वर्ष की योजना में इन लेखों के विचारों को शामिल किया जा सके।

कंचना सूर्यकुमार *'भिन्नों को चित्रों से समझने की पेचीदा सच्चाई'* पर अपना अनुभव साझा कर रही हैं। इस लेख के साथ क्षमा चक्रवर्ती द्वारा तैयार की गई एक वर्कशीट भी है। यह आपको ऐसे और प्रश्न तैयार करने में मदद करेगी जो भिन्न पढ़ाते समय 'पूर्ण' को परिभाषित करने के महत्त्व को मज़बूत करते हैं। आगे क्या है? हमारी पूर्व छात्रा गरिमा भट्ट *(कक्षा में : समय)* और अस्मा मेमन *(गणित का मज़ा : घन का जाल)* ने अपने लेखों से हमें अभिभूत किया है। हमारे पास घनाभ और उनके नेट्स पर स्वाती सरकार की एक वर्कशीट भी है, जो एक विद्यार्थी-शिक्षक द्वारा अपने शिक्षण अभ्यास के दौरान अनुभव की गई कठिनाई के जवाब में तैयार की गई है। 'गणित का मज़ा' खण्ड में एक प्यारा-सा पोस्टर है जो निश्चित रूप से विचारों को उत्तेजित करेगा – इसे बुलेटिन बोर्ड पर लगाएँ और विद्यार्थियों द्वारा अपने अवलोकन कौशल का उपयोग करने, अनुमान लगाने, अपने विचारों को साझा करने और अपने तर्कों को रखने की प्रतीक्षा करें – संक्षेप में, उन्हें नन्हें गणितज्ञों की तरह व्यवहार करने दें। इसके साथ वाले पृष्ठ पर शिक्षकों के लिए नोट्स दिए गए हैं।

'nRich' वेबसाइट की समीक्षा आपको समृद्ध संसाधनों की दिशा में संकेत करेगी। पद्मप्रिया शिराली 'फ़ाउण्डेशनल और प्रिपरेटरी' स्टेज पर *गिनती से परिचय* कराने के सुझावों के साथ 'पुलआउट' प्रस्तुत कर रही हैं।

मार्च, 2026 का अंक हमारे लिए विशेष है – पहली बार, लेख सर्वप्रथम डिजिटल संस्करण पर आए, उसके बाद प्रिंट अंक में। समय के साथ चलते हुए, लेकिन प्राथमिक स्तर से ही गणित के अच्छे शिक्षाशास्त्र पर अपनी नज़र मज़बूती से टिकाए हुए। हमें बताएँ कि आप क्या सोचते हैं।

स्नेहा टाइटस
मुख्य सम्पादक
AtRightAngles.editor@apu.edu.in

सम्पादकीय टीम

स्नेहा टाइटस
मुख्य सम्पादक
sneha.titus@apu.edu.in

सुधीश वेंकटेश
प्रबन्ध सम्पादक
sudheesh.venkatesh@azimpremjifoundation.org

मोहन आर.
सह-सम्पादक
mohan.r@apu.edu.in

अजय कुमार के.
ajaykumar.k@apu.edu.in

अर्धेन्दु शेखर दाश
arddhendu@azimpremjifoundation.org

अशोक प्रसाद
ashok.prasad@azimpremjifoundation.org

देबब्रत साहा
debabrata.saha@azimpremjifoundation.org

क्षमा चक्रवर्ती
kshama.chakravarthy@azimpremjifoundation.org

पद्मप्रिया शिराली
padmapriya.shirali@gmail.com

पुनीत एस.
puneeth.s@azimpremjifoundation.org

रुद्रेश एस.
rudresh@azimpremjifoundation.org

सन्दीप दिवाकर
sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org

शान्ता भूषण
shantha.bhushan@apu.edu.in

स्वाती सरकार
swati.sircar@apu.edu.in

अनुवाद अंक सम्पादक
मधुकर एस.पुट्टी (कन्नड़)
राजेश उत्साही (हिन्दी)

हिन्दी अनुवाद
एकलव्य फ़ाउण्डेशन
समन्वय : प्रतिका गुप्ता

प्रकाशन टीम
मीरा प्रभु, शाहनाज़ बेगम,
लोकराम वी.जी., सम्बित महापात्र

सम्पादकीय कार्यालय
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
ई-मेल : publications@apu.edu.in
वेबसाइट : www.azimpremjiuniversity.edu.in

डिज़ाइन
जिंक एंड ब्रोकोली
बेंगलूरु, कर्नाटक

हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक
आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन है, जो स्कूली शिक्षकों के लिए गुणवत्तापूर्ण गणित शिक्षण संसाधन प्रदान करता है। इसका उद्देश्य न केवल कक्षाओं के भीतर, बल्कि स्कूली प्रक्रियाओं के व्यापक सन्दर्भ में भी, अधिक अनुभवात्मक और सार्थक शिक्षण-अधिगम प्रक्रियाओं को सुगम बनाना है। उद्देश्यपूर्ण और उत्साहपूर्ण शिक्षण के लिए, एट राइट एंगल्स भारत और उसके विविध समुदायों की वास्तविकताओं पर आधारित व्यावहारिक अन्तर्दृष्टि प्रस्तुत करता है।

एट राइट एंगल्स *अंक 24, मार्च 2026 का यह* ***हिन्दी अनुवाद*** *मई, 2026 में प्रकाशित हुआ है।*

नोट : इस अंक में व्यक्त किए गए सभी विचार और राय लेखकों के निजी हैं और अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन या अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी किसी भी रूप में इसके लिए उत्तरदायी नहीं है।

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University
A publication of Azim Premji University

विशेष

2 **प्रिपरेटरी स्टेज में योगात्मक आकलन को अर्थपूर्ण बनाना**
आँचल चोमल और शिल्पी बैनर्जी

कक्षा में

8 **प्रिपरेटरी स्टेज गणित में योगात्मक आकलन को देखने का एक नज़रिया**
अनुषा टी. और रेशमा कृष्णन

18 **भिन्नों को चित्रों से समझने की पेचीदा सच्चाई**
कंचना सूर्यकुमार

21 **वर्कशीट ('भिन्नों को चित्रों से समझने की पेचीदा सच्चाई' लेख पर आधारित)**
क्षमा चक्रवर्ती

26 **समय की सुई को घुमाना : आधे-चौथाई घण्टे के साथ कक्षा की यात्रा**
गरिमा भट्ट

29 **वर्कशीट : कुछ हटकर सोचना**
स्वाती सरकार

गणित का मज़ा

35 **पोस्टर : सम और विषम संख्याओं का योग**
स्वाती सरकार

37 **शिक्षकों के लिए नोट्स : सम और विषम संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए 10-फ्रेम का उपयोग**
मैथ स्पेस

39 **पॉलीओमिनोज़ और घन के आकृति-जाल की पड़ताल : कक्षा-4 के विद्यार्थियों के साथ एक अनुभव**
अस्मा मेमन

समीक्षा

46 **nRich वैबसाइट की समीक्षा**
समीक्षक : स्नेहा टाइटस

पुलआउट

गिनती से परिचय
पद्मप्रिया शिराली

चाक पर कुम्हार – हैंडस-ऑन मार्गदर्शन का एक दृश्य,
जो कच्ची जिज्ञासा को स्थायी समझ में बदल देता है।

प्रिपरेटरी स्टेज में योगात्मक आकलन को अर्थपूर्ण बनाना

आँचल चोमल और शिल्पी बैनर्जी

रचनात्मक आकलन ***(formative assessments)*** निरन्तर चलने वाली एक प्रक्रिया है, जो रोज़मर्रा की पढ़ाई-लिखाई और कक्षा में होने वाली चर्चाओं में शामिल रहती है, वहीं ***योगात्मक आकलन*** (***summative assessments***) किसी पाठ या छमाही अथवा वार्षिक अवधि के अन्त में किया जाता है। योगात्मक आकलन ऐसे होने चाहिए कि वे स्पष्ट तौर पर बता सकें कि बच्चा अगली कक्षा में जाने या पाठ्यक्रम के अगले पड़ाव को समझने के लिए कितना तैयार है। साथ ही, ये आकलन पूरी तरह से निष्पक्ष और कौशल के निर्धारित मानदण्डों पर आधारित होने चाहिए (यानी बच्चे ने चरण विशेष में जो सीखा, उसका अवलोकन और उसकी व्यवस्थित तरीक़े से परख की जा सके [2])। इस दौरान सीखने में अगर कोई कमी नज़र आए तो स्कूल उस बच्चे को विशेष सहयोग व सहारा दे और उस खाई को पाटने के लिए उचित अवसर उपलब्ध कराए। लेकिन अकसर होता यह है कि योगात्मक आकलन ही अन्तिम पैमाना बनकर रह जाते हैं और इनके आधार पर ही बच्चे को अगली कक्षा में भेज दिया जाता है। चूँकि इसी पर उसके भविष्य का पूरा दारोमदार टिका होता है, लिहाज़ा यह वार्षिक परीक्षा बच्चों और उनके माता-पिता, दोनों के लिए एक सालाना प्रताड़ना सरीखी बन जाती है। सवाल यह है कि क्या कुछ इससे अलग किया जा सकता है? इसी सवाल के साथ हम इस लेख की शुरुआत एक कक्षा के दृश्य से कर रहे हैं।

नीचे दिया गया छोटा-सा प्रसंग एक शिक्षिका के उन अनुभवों को दर्शाता है, जो उन्होंने अपनी कक्षा में रचनात्मक आकलन के दौरान महसूस किए और साथ ही उस बड़े अन्तर को भी रेखांकित करता है, जो योगात्मक आकलन के दौरान सामने आया।

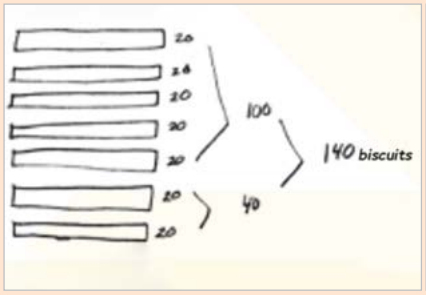
सीखने और आकलन पर एक शिक्षिका के विचार

श्रीमती टी तीसरी कक्षा के बच्चों को गणित पढ़ाती हैं। वे चाहती हैं कि उनके विद्यार्थी न केवल गणितीय संक्रियाओं को हल करें, बल्कि गणितीय शब्दावली का इस्तेमाल करते हुए यह भी जानें कि आख़िर ये संक्रियाएँ आपस में किस तरह से जुड़ी हुई हैं। उन्होंने आने वाली एक पिकनिक के लिए 20-20 बिस्कुट के 7 पैकेट तैयार किए। उन्होंने इन पैकेटों को बच्चों के सामने रखकर पूछा कि वे अलग-अलग तरीक़ों से यह कैसे मालूम करेंगे कि इनमें कुल कितने बिस्कुट हैं?

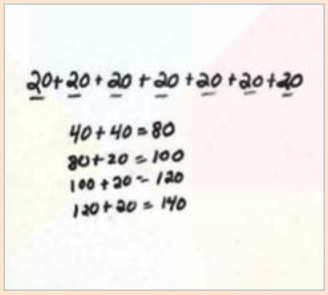
अभिराज ने सबसे पहले बिस्कुट के 7 पैकेटों का एक रेखाचित्र बनाया, जिनमें से प्रत्येक में 20 बिस्कुट थे। फिर उसने इन पैकेटों के समूह बनाए और तीन चरणों में कुल संख्या ज्ञात की। पार्थ ने अंकों का सहारा लिया और उन्हें एक के बाद एक जोड़ता चला गया। माला ने प्रत्येक पैकेट को दो हिस्सों में बाँट दिया और फिर उन्हें जोड़कर उनका योग निकाला। इस दौरान श्रीमती टी कक्षा में घूम रही थीं। उन्होंने बच्चों से पूछा, "यहाँ पर 20 कुल कितनी बार आया है?", "प्रत्येक पैकेट में कितने बिस्कुट हैं?", "तुम्हारे इस तरीक़े ने तुम्हें उत्तर तक पहुँचने में कैसे मदद की?" उन्होंने विद्यार्थियों को उनके निर्धारित सहपाठियों के साथ चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित

की-वर्ड : *योगात्मक आकलन, रचनात्मक आकलन, दक्षताएँ, प्रिपरेटरी स्टेज, फीडबैक, बाल-केन्द्रित, कम प्रभाव, एन.सी.एफ़-एस.ई. 2023, मानदण्ड-आधारित।*

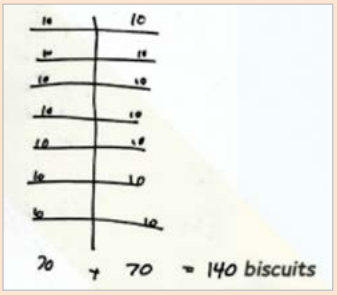
किया और इस दौरान गणितीय शब्दावली के सही उपयोग पर भी कान लगाए रखे। उन्होंने तुरन्त फ़ीडबैक दिए। जहाँ प्रस्तुति सही थी, वहाँ उसकी सराहना की। जहाँ कोई बात स्पष्ट नहीं हुई तो वहाँ उन्होंने सम्बन्धित सवाल पूछे और जब कोई उत्तर ग़लत हुआ तो ग़लत जवाब देने वाले बच्चे को किसी सहपाठी की सही प्रस्तुति देखने का सुझाव दिया। बच्चों ने अपने विचार साझा किए, अलग-अलग तरीक़ों की तुलना की और ज़रूरत पड़ने पर अपने तरीक़ों में सुधार या बदलाव भी किए [1]। गतिविधि की समाप्ति तक शिक्षिका को यह स्पष्ट हो गया कि उनके अधिकांश विद्यार्थी संख्यात्मक तथ्यों और उनके पारस्परिक सम्बन्धों को चित्रों के माध्यम से दर्शा सकते हैं, संख्याओं को बारम्बार जोड़ सकते हैं और उचित गणितीय शब्दावली का इस्तेमाल करते हुए आत्मविश्वास के साथ अपनी बात समझा सकते हैं। इसके ज़रिए उन्हें यह भी समझ में आया कि कौन-से विद्यार्थी इससे भी बेहतर कर सकते हैं और किन्हें कुछ विशेष क्षेत्रों में अभी और मदद की दरकार है।



अभिराज का प्रदर्शन



पार्थ का प्रदर्शन



माला का प्रदर्शन

चित्र-1

महीने के आख़िर में श्रीमती टी ने उसी कक्षा में एक वर्कशीट के ज़रिए अंकगणितीय संक्रियाओं पर आधारित योगात्मक आकलन किया, यानी एक परीक्षा ली। विद्यार्थियों के हाथों में जैसे ही प्रश्नपत्र आए, उनमें से कुछ के चेहरों पर घबराहट दिखाई देने लगी। पहले के उस खेल-खेल में सीखने और गतिविधियों वाले अनुभव के उलट 'परीक्षा' के एहसास ने उन्हें बेचैन कर दिया। बच्चों के इस तनाव को भाँपते हुए श्रीमती टी ने बड़े स्नेह से उनसे कहा कि वे जल्दबाज़ी न करें और हर सवाल को बड़े आराम से सोच-समझकर हल करें।

आमतौर पर आत्मविश्वास से भरे रहने वाले अपने विद्यार्थियों की इस घबराहट को देखकर श्रीमती टी यह सोचने को विवश हो गईं कि प्रिपेरेटरी स्टेज (कक्षाओं) में योगात्मक आकलन होना भी चाहिए या नहीं। बेशक, औपचारिक योगात्मक आकलन का अपना महत्त्व है, लेकिन उच्च प्रभाव वाला आकलन बच्चों में तनाव पैदा कर देता है और उनका ध्यान सीखने की ख़ुशी से हटकर केवल अच्छे अंक प्राप्त करने के लिए प्रदर्शन करने पर केन्द्रित हो जाता है। इस उम्र में बच्चे अभी भी अपनी संज्ञानात्मक क्षमताओं (जैसे समझ-बूझ, समस्या समाधान, तर्क आदि) और भावनात्मक कौशल (जैसे सहयोग, टीम वर्क, आत्म-जागरूकता आदि) को विकसित कर रहे होते हैं। श्रीमती टी ने अब तक योगात्मक आकलन मुख्य रूप से पारम्परिक लिखित परीक्षाओं के माध्यम से ही किए हैं। इसके विपरीत, कक्षा में अनौपचारिक और रचनात्मक आकलनों के साथ उनके अनुभव बेहद सकारात्मक रहे हैं। इससे वे बच्चों की ग़लतफ़हमियों को पहचान पाती हैं, उन्हें समय पर फ़ीडबैक दे पाती हैं और अपनी शिक्षण पद्धति में आवश्यकतानुसार बदलाव भी कर पाती हैं। तो सवाल यह है कि क्या ऐसा कोई बीच का रास्ता निकल सकता है, जहाँ योगात्मक आकलन का दबाव कम हो और उसे बड़ी सहजता से नियमित रचनात्मक आकलनों के साथ जोड़ा जा सके?

किसी बच्चे की सीखने की यात्रा में ***प्रिपरेटरी स्टेज*** (कक्षा-3 से 5 तक यानी 8 से 11 वर्ष की उम्र) एक बेहद अहम पड़ाव होता है। यह फ़ाउण्डेशनल स्टेज के खेल-आधारित अनुभवों और माध्यमिक स्तर की औपचारिक शिक्षा के बीच एक सेतु का कार्य करता है। इस चरण में बच्चे भाषा, गणित, कला, शारीरिक शिक्षा और अपने आस-पास की दुनिया जैसे विषयों के साथ गहराई से जुड़ना प्रारम्भ करते हैं। इस तरह 'खेल-खेल में सीखने' से आगे बढ़कर अब वे एक व्यवस्थित और औपचारिक पढ़ाई की तरफ़ क़दम बढ़ाते हैं। इस उम्र के बच्चे स्वभाव से जिज्ञासु होते हैं, धीरे-धीरे आत्मनिर्भर होने लगते हैं और हर बात को तर्क की कसौटी पर परखने के लिए तत्पर होते हैं। स्वयं प्रयोग करने, मिल-जुलकर काम करने और शिक्षकों के मार्गदर्शन में अपनी बातों पर विचार करने से अमूर्त सोच और जटिल अवधारणाओं की समझ के विकास में मदद मिलती है।

इसी दौरान आकलन के स्वरूप में भी बदलाव आता है। अब आकलन कम प्रभाव वाले आकलन (low-stakes assessment) से उच्च प्रभाव वाले आकलन (High-stakes assessment) में बदल जाता है। कम प्रभाव वाले आकलन में जहाँ नतीजों से डराया नहीं जाता और मक़सद सिर्फ़ सीखने में मदद करना, फ़ीडबैक देना, कमियाँ पहचानना तथा मार्गदर्शन देना होता है, वहीं उच्च प्रभाव वाले आकलन के परिणाम विद्यार्थियों, शिक्षकों और स्कूल के लिए महत्त्वपूर्ण होते हैं। इसके नतीजे विद्यार्थी के अगली कक्षा में प्रमोशन, प्रमाण-पत्र, दाख़िले या जवाबदेही से सम्बन्धित निर्णयों से जुड़ जाते हैं।

इस आलेख में हम प्रिपरेटरी स्टेज के योगात्मक आकलनों से सम्बन्धित सवालों की पड़ताल करेंगे और इन्हें अधिक प्रभावी तथा अर्थपूर्ण बनाने के ज़रूरी उपाय सुझाएँगे। कुछ उदाहरणों के ज़रिए हम संज्ञानात्मक (cognitive) और भावनात्मक (affective) जैसे जटिल शब्दों की गुत्थियों को सुलझाने का प्रयास भी करेंगे। साथ ही, योगात्मक आकलन के अलग-अलग तरीक़ों पर भी विचार करेंगे।

योगात्मक आकलन की प्रकृति

विभिन्न शोध और नीतिगत साक्ष्य [3] स्पष्ट करते हैं कि यदि शुरुआती चरण में योगात्मक आकलन को समझ-बूझ के साथ डिज़ाइन किया जाए और इसे नियमित रचनात्मक अभ्यासों के साथ जोड़ दिया जाए तो यह बच्चों के विकास में काफ़ी अहम भूमिका निभा सकता है। जहाँ रचनात्मक आकलन बच्चे को निरन्तर फ़ीडबैक देने, उसे प्रेरित करने और स्व-नियंत्रण में मदद करता है, वहीं योगात्मक आकलन हर विषय में सीखने का एक भरोसेमन्द प्रमाण होता है। यह स्कूलों को जवाबदेह बनाने के अलावा भविष्य के पाठ्यक्रमों की योजना तैयार करने में भी मदद करता है। इसके अलावा, यदि योगात्मक आकलन केवल रटे-रटाए जवाबों तक सीमित न हो, बल्कि उसमें प्रयोग, विश्लेषण और उच्च स्तरीय सोच की परख करने वाले कार्य/ अभ्यास जोड़े जा सकें तो इससे बच्चों में विषय की गहरी समझ विकसित होती है। ऐसी सीखी हुई बातें उनके ज़ेहन में लम्बे समय के लिए दर्ज हो जाती हैं।

शालेय शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा 2023 [2] के अनुसार, इस चरण में लिखित परीक्षाएँ शुरू की जा सकती हैं, लेकिन बच्चे की योग्यता का आकलन केवल इन्हीं के आधार पर नहीं किया जाना चाहिए। बच्चे ने वास्तव में क्या और कितना सीखा है, इसकी एक समग्र तस्वीर हासिल करने के लिए पोर्टफ़ोलियो, उसके सहपाठियों का आकलन, आत्म-आकलन और शिक्षकों के अवलोकन जैसे अन्य तरीक़ों का भी उपयोग किया जाना चाहिए। अगर योगात्मक आकलन को एक व्यापक प्रक्रिया के रूप में देखा जाए तो इससे अनेक महत्त्वपूर्ण उद्देश्य पूरे हो सकते हैं।

योगात्मक आकलन से निम्नलिखित उद्देश्य पूरे किए जा सकते हैं :

- निर्धारित क्षमताओं के आधार पर विद्यार्थियों की प्रगति पर नज़र रखना।
- विद्यार्थियों को यह अवसर देना कि वे सीखी गईं बातों को एक-दूसरे से सम्बद्ध कर सकें। यानी किसी पाठ या विषय को पढ़ने के दौरान सीखी गईं अलग-अलग बातों को जोड़ना, समझना और एक साथ समाहित करना, न कि उन्हें अलग-थलग तथ्यों के रूप में महज़ रटना। यह सोचने-समझने का एक उच्च स्तर है।
- यह तय करना कि विद्यार्थी अगले पड़ाव पर जाने के लिए तैयार है या नहीं।
- विद्यार्थियों की प्रगति की रिपोर्ट अभिभावकों, स्कूल के प्रबन्धकों और अन्य सम्बन्धित हितधारकों तक पहुँचाना।

कुल मिलाकर, शोध और नीतिगत तरीक़ा दोनों ही एक सन्तुलित पद्धति का समर्थन करते हैं। प्रिपरेटरी स्टेज में योगात्मक आकलन तब अधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं, जब वे विविधतापूर्ण हों और साथ ही बच्चों के विकास

पर केन्द्रित आकलन प्रणाली का हिस्सा हों। यह प्रणाली ऐसी होनी चाहिए जो निरन्तर, दबाव से मुक्त, सृजनात्मक और बाल-केन्द्रित दृष्टिकोण को प्राथमिकता दे, जिससे न केवल सीखने की गुणवत्ता निखरे, बल्कि शिक्षण को भी एक सार्थक दिशा मिल सके।

योगात्मक आकलन के मुख्य सिद्धान्त

1. उद्देश्य चाहे रचनात्मक आकलन के ज़रिए शिक्षण को दिशा देना हो या योगात्मक आकलन के माध्यम से बच्चों की प्रगति को परखना, दोनों ही स्थितियों में शिक्षक के पास किसी भी विषय (जैसे गणित) की गहन समझ होनी ज़रूरी है। उसे यह भी पता होना चाहिए कि विद्यार्थी किस तरह से सोचते हैं। साथ ही आकलन के विभिन्न तरीक़ों का ज्ञान होने के अलावा उसमें अलग-अलग स्रोतों से प्राप्त जानकारी की व्याख्या करने की क्षमता भी होनी चाहिए। इसे पैडागॉजिकल कॉन्टेंट नॉलेज (PCK) कहा जाता है। यह विद्यार्थियों की सीखने की प्रक्रिया के बारे में उपयोगी जानकारी जुटाने और सटीक निष्कर्षों पर पहुँचने के लिए अनिवार्य है।

   उदाहरण के लिए, कक्षा में भिन्न के बारे में पढ़ते समय कोई-कोई विद्यार्थी '8 को 4 से बड़ा' होने की वजह से यह मान लेते हैं कि 1/8 भी 1/4 से बड़ा होता है। एक समझदार शिक्षक तुरन्त जान जाता है कि यह गणित को लेकर एक सामान्य ग़लतफ़हमी है और वह उसी समय कक्षा में ही उसका समाधान कर देता है (रचनात्मक आकलन)। पाठ के अन्त में जब वह छोटा-सा टेस्ट लेता है (योगात्मक आकलन) तो आकलन के तरीक़ों की अपनी जानकारी के आधार पर ऐसे सवाल तैयार करता है कि उससे बच्चे की अवधारणात्मक समझ की परख हो सके, न कि सवाल को हल करने के प्रक्रियात्मक चरणों की। जैसे, वह केवल 73 और 52 जोड़ने की बजाय बच्चों को ऐसे किन्हीं भी दो अंकों की दो संख्याओं को जोड़ने के लिए कह सकता है, जिसका योग तीन अंकों की कोई संख्या हो।

2. योगात्मक आकलन को व्यापक और बहुआयामी होना चाहिए। विद्यार्थी कितना सीख रहा है, इसे समझने के लिए अलग-अलग तरीक़ों का इस्तेमाल किया जा सकता है, जैसे कि शिक्षक का अवलोकन, लिखित कार्य, मौखिक उत्तर और गतिविधि आधारित कार्य। इसके अलावा, इसे निरन्तर और संचयी (यानी नए पाठ के साथ पिछले पाठ की भी समझ) भी होना चाहिए। इसका मतलब है कि मौखिक और गतिविधि आधारित मूल्यांकनों के साथ-साथ इसमें समय-समय पर उम्र के अनुकूल छोटी लिखित परीक्षाओं को भी शामिल किया जाना चाहिए।

   उदाहरण के लिए, बुनियादी ज्यामिति के एक पाठ की समाप्ति के बाद शिक्षक इस बात की जाँच-परख के लिए अनेक तरीक़ों का इस्तेमाल कर सकता है कि विद्यार्थियों ने क्या सीखा। वह कक्षा की गतिविधियों के दौरान विद्यार्थियों को आकृतियों को पहचानते तथा वर्गीकृत करते हुए देख सकता है, उनके उस लिखित कार्य का आकलन कर सकता है जहाँ बच्चों ने आकृतियाँ बनाकर उनके नाम लिखे हों, उनसे आकृतियों की विशेषताओं को मौखिक रूप से बताने के लिए कह सकता है या उन्हें काग़ज़ अथवा मिट्टी के उपयोग से कोई भी साधारण-सी 2D आकृति बनाने का एक छोटा प्रोजेक्ट भी दे सकता है। पूरे पाठ के दौरान विद्यार्थियों की प्रगति को ट्रैक करने के लिए इसमें छोटे-छोटे क्विज़ भी शामिल किए जा सकते हैं। इस तरह, अवलोकन, लिखित कार्य, मौखिक जवाब और गतिविधि आधारित तरीक़ों की मदद से शिक्षक हर बच्चे की ज्यामितीय समझ की समग्र तस्वीर हासिल कर सकता है।

3. योगात्मक आकलन का उपयोग केवल यह जाँचने के लिए होना चाहिए कि विद्यार्थियों ने अपने स्तर के अनुरूप दक्षताओं को कितनी ख़ूबी से हासिल किया है। इसका इस्तेमाल किसी बच्चे पर कोई ठप्पा लगाने या दूसरे बच्चों के साथ उसकी तुलना करने में नहीं किया जाना चाहिए। [ऐसे आकलनों को मानदण्ड-आधारित (criterion referenced)] कहा जाता है, जिसका उद्देश्य केवल यह बताना होता है कि किसी विद्यार्थी ने अपनी निर्धारित दक्षताओं के मुक़ाबले कितना कुछ सीखा है [2])।

   उदाहरण के लिए, प्रिपरेटरी स्टेज में जोड़-घटा का पाठ पूरा होने के बाद शिक्षक अपने विद्यार्थियों को ऐसी वर्कशीट देता है, जिसमें सवाल अपेक्षित दक्षताओं के अनुरूप होते हैं। हर विद्यार्थी के उत्तरों को इन्हीं निर्धारित दक्षताओं के आधार पर परखा जाता है, जैसे दो अंकों का घटाना कर लेना या इबारती सवालों को हल कर लेना। इससे बच्चों की आपस में तुलना किए बग़ैर ही यह स्पष्ट हो जाता है कि प्रत्येक विद्यार्थी ने किस चीज़ में महारत हासिल कर ली है और किन क्षेत्रों में उसे और अभ्यास की ज़रूरत है।

4. योगात्मक आकलन विद्यार्थियों को रोज़ पढ़ाने वाले शिक्षकों द्वारा ही किया जाना चाहिए, ताकि बच्चों की पृष्ठभूमि और पहले से मौजूद जानकारियों के अनुरूप उसे सही ढंग से डिज़ाइन किया जा सके। इस स्तर पर आकलन किसी बाहरी संस्था, जैसे शिक्षा बोर्ड या स्कूल सिस्टम द्वारा थोपा हुआ नहीं होना चाहिए, बल्कि यह सीखने की प्रक्रिया का ही एक अभिन्न अंग होना चाहिए।

वे कारक जो योगात्मक आकलन को गुणवत्तापूर्ण बना सकते हैं

इस तरह के रचनात्मक योगात्मक आकलन की तरफ़ बढ़ना आसान नहीं है, लेकिन इसकी आवश्यकता तो है। इसके लिए एक स्पष्ट योजना और तरीक़े की ज़रूरत होगी, ताकि योगात्मक आकलन बच्चों की सीखने की यात्रा का वास्तव में एक सार्थक हिस्सा बन सके। इस वास्ते हमें पारम्परिक तरीक़े से हटकर कुछ अलग क़दम उठाने होंगे।

1. शिक्षकों को उन तमाम साधनों और पद्धतियों में छिपी सम्भावनाओं से परिचित कराने की ज़रूरत है, जिनका इस्तेमाल योगात्मक आकलन के लिए किया जा सकता है। दुर्भाग्य से, अब तक योगात्मक आकलन का मतलब केवल काग़ज़-पेंसिल वाली परीक्षा ही माना जाता रहा है। इस सोच को बदलना होगा। आकलन के अलग-अलग तरीक़ों का इस्तेमाल करते समय शिक्षकों को रूब्रिक्स या एक विस्तृत स्कोरिंग गाइड/मार्किंग स्कीम्स भी तैयार करनी चाहिए। इससे आकलन में निष्पक्षता बनी रहती है और शिक्षक को यह समझने में भी आसानी होती है कि उसके विद्यार्थियों ने कितना सीखा है।

2. इस प्रकार की लर्निंग से जो निष्कर्ष निकलते हैं, उनका इस्तेमाल पाठ की योजना तैयार करने और उन बच्चों की मदद करने में किया जा सकता है, जो अभी तक किसी क्षेत्र विशेष में दक्षता हासिल नहीं कर पाए हैं। हम इसे योगात्मक आकलन का रचनात्मक उपयोग के नाम से जानते हैं। इस सिद्धान्त का सुझाव शालेय शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (NCFSE) में भी दिया गया है। यह प्रक्रिया योगात्मक आकलन को सीखने-सिखाने की मुख्यधारा से जोड़ देती है। साथ ही इससे शिक्षकों को रचनात्मक आकलनों के लिए भी दिशा मिलती है, जिन्हें वे भविष्य में अपनी कक्षाओं में अपना सकते हैं।

   (सम्पादकीय टिप्पणी : हालाँकि ऐसी पाठ-योजनाएँ इस लेख के दायरे से बाहर हैं, लेकिन हम आगामी अंकों में इन्हें शामिल करने की योजना बना रहे हैं।)

3. योगात्मक आकलन का रिपोर्ट कार्ड केवल अंकों और ग्रेड तक सीमित नहीं रहना चाहिए, बल्कि इसमें बच्चे की क्षमताओं का ऐसा गुणात्मक विवरण होना चाहिए जो आसानी से समझ में आ सके। उदाहरण के तौर पर अगर हम **चित्र-1** को देखें, जिसमें तीसरी कक्षा की शुरुआती तीन महीनों की पढ़ाई के बाद *अभिराज, पार्थ और माला ने 20×7 की गणना को चित्रों के ज़रिए प्रस्तुत किया है। अभिराज ने 20-20 की पाँच इकाइयों को जोड़कर एक बड़ी इकाई (100) और दो अन्य इकाइयों को जोड़कर 40 में बदल दिया। इससे इन दो बड़ी इकाइयों का योग करना आसान हो गया। पार्थ ने बार-बार जोड़कर अपना उत्तर हासिल किया। जबकि माला ने हल करने के लिए 20 को 10+10 में तोड़ दिया। इन तीनों के तरीक़ों से यह तो साफ़ है कि उन्हें अवधारणा की अच्छी समझ है। हालाँकि, अभी भी वे उस गणितीय शब्दावली को विकसित कर रहे हैं, जिसके ज़रिए उन्हें अपने विचारों को और स्पष्ट रूप से व्यक्त करने में आसानी हो सके।*

   ऐसे विवरण न केवल यह बताते हैं कि बच्चा क्या कर सकता है, बल्कि ये भविष्य की कार्ययोजना के लिए भी स्पष्ट दिशा प्रदान करते हैं।

4. गणित के शिक्षकों के लिए विद्यालय या क्षेत्रीय स्तर पर पेशवर अधिगम समुदाय बनाए जा सकते हैं, जहाँ वे साथ बैठकर नई-नई युक्तियों पर विचार-विमर्श कर सकते हैं और गतिविधियाँ तथा प्रश्न-बैंक जैसे साझा संसाधन विकसित कर सकते हैं। इसके अलावा, समय-समय पर श्रेष्ठ शिक्षण पद्धतियों का दस्तावेज़ीकरण व प्रकाशन करके उन्हें व्यापक शिक्षक समुदायों के साथ साझा भी किया जा सकता है।

5. अभिभावकों को संवेदनशील बनाने की ज़िम्मेदारी स्कूलों की है, ताकि वे अपने बच्चों की क़ाबिलियत को समझकर जान सकें कि इसे केवल अंकों, नम्बरों या ग्रेड के आधार पर परिभाषित नहीं किया जा सकता। अभिभावक अकसर यह जानना चाहते हैं कि उनका बच्चा दूसरों के मुक़ाबले कहाँ खड़ा है। इस तरह की मानसिकता और अपेक्षाएँ योगात्मक आकलन के उद्देश्य को केवल अंकों तक समेट देती हैं। इसलिए यह बेहद ज़रूरी है कि स्कूल अभिभावकों के लिए ऐसे विशेष

शिविरों और ओरिएंटेशन कार्यक्रमों का आयोजन करें, जहाँ वे विद्यार्थियों की सीखने की क्षमताओं में विकास के लिए आकलन प्रक्रियाओं में बदलाव की आवश्यकता को समझ सकें।

अन्त में, यह कहा जा सकता है कि प्रिपरेटरी स्टेज पर योगात्मक आकलनों को पूरी तरह से छोड़ने की कोई ज़रूरत नहीं है। इसकी बजाय बच्चों की विकासात्मक आवश्यकताओं और अर्थपूर्ण सीखने के लक्ष्यों के अनुरूप उन्हें नए सिरे से गढ़े जाने की दरकार है। अगर इन्हें दबाव-मुक्त, मानदण्ड-आधारित और शिक्षक-नेतृत्व वाली प्रक्रिया के रूप में तैयार किया जाए तो ये केवल रटने की क्षमताओं को परखने की बजाय रचनात्मक आकलन के पूरक बनकर विषय की गहरी समझ विकसित करने में मददगार हो सकते हैं। आकलन के अलग-अलग तरीक़ों को एकीकृत करने से शिक्षक अपने विद्यार्थियों की क्षमताओं की समग्र स्थिति को समझ पाते हैं और साथ ही सीखने की ख़ुशी भी बरकरार रहती है। ऐसा तरीक़ा न केवल शिक्षण प्रक्रिया को दिशा देता है, बल्कि बच्चों को लक्षित सहयोग प्रदान करने और सीखने की भावी राह तय करने में भी मार्गदर्शक की भूमिका निभाता है। सन्तुलित और बाल-केन्द्रित योगात्मक आकलन सीखने एवं सिखाने की प्रक्रिया को सशक्त बना सकते हैं, साथ ही यह भी सुनिश्चित कर सकते हैं कि ये केवल बच्चों को निर्णय सुनाने का ज़रिया न बनकर उनके विकास के साधन बन सकें। योगात्मक आकलन की रणनीतियों और तरीक़ों के बारे में विस्तार से जानने के लिए 'प्रिपरेटरी स्टेज गणित में योगात्मक आकलन को देखने का एक नज़रिया' शीर्षक से लिखे लेख को इसी अंक में पढ़ा जा सकता है, जिसमें विकास में मददगार इन तमाम पहलुओं को बारीक़ी से समझाया गया है।

References

1. Adapted from Formative assessment Vignettes. Retrieved from: https://bit.ly/4ctdzUr
2. NCERT. (2022). National Curriculum Framework. New Delhi: NCERT. Retrieved from: https://bit.ly/4b80Zrk
3. Taras, M. (2005). Assessment–summative and formative–some theoretical reflections. *British journal of educational studies*, *53*(4), 466-478.

आँचल चोमल अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटिन्यूइंग एजुकेशन में एसोसिएट डायरेक्टर और एसोसिएट प्रोफ़ेसर के रूप में कार्यरत हैं। शिक्षा के क्षेत्र में उनका मुख्य सरोकार शैक्षणिक आकलन, परीक्षा सुधार और वृहद स्तरीय सीखने-सिखाने के अध्ययन से रहा है। उन्होंने सीबीएसई, सीआईएससीई और अनेक राज्य शिक्षा बोर्डों के साथ मिलकर व्यापक स्तर पर काम किया है। उनके अनुभवों का कैनवस आकलन डिज़ाइन, पाठ्यक्रम एवं पाठ्यपुस्तकों के विकास, शिक्षकों के व्यावसायिक प्रशिक्षण और राज्य सरकारों तथा राष्ट्रीय स्तर के शिक्षा संस्थाओं के साथ नीतिगत परामर्श तक फैला हुआ है। वे शैक्षणिक आकलन के स्नातकोत्तर एवं सर्टिफिकेट स्तर के प्रोग्राम डिज़ाइन करने के साथ-साथ इनमें अध्यापन भी करती हैं। इसके अलावा, उन्होंने यूनेस्को और ब्रुकिंग्स इंस्टीट्यूशन जैसी अन्तरराष्ट्रीय संस्थाओं के साथ मिलकर सीखने के पैमानों को बेहतर बनाने में महत्त्वपूर्ण योगदान दिया है। उनसे aanchal@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

शिल्पी बनर्जी अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ कंटिन्यूइंग एजुकेशन में फ़ैकल्टी मेम्बर हैं। उन्होंने इंटरनेशनल इंस्टीट्यूट ऑफ़ इंफॉर्मेशन टेक्नोलॉजी, बेंगलूरु से शैक्षणिक आकलन में पीएचडी की है। उनका शोध कक्षा में व्यावहारिक एवं गुणवत्तापूर्ण आकलन मॉडल विकसित करने, आकलन की रूपरेखा तैयार करने और वृहद स्तर के आकलन डेटा के सांख्यिकीय विश्लेषण पर केन्द्रित है। वे शिक्षकों, शिक्षा अधिकारियों, प्रशिक्षकों और एमए एजुकेशन स्टडीज़ के विद्यार्थियों के लिए आकलन के विभिन्न पहलुओं पर पाठ्यक्रम तैयार करने में सक्रिय भूमिका निभाती हैं। वे बोर्ड परीक्षाओं और कक्षा-स्तरीय आकलन को अधिक सशक्त बनाने के उद्देश्य से गठित राज्य एवं राष्ट्रीय स्तर की विभिन्न तकनीकी समितियों के साथ भी काम करती हैं। उनसे shilpi.banerjee@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर** : अनुज उपाध्याय

प्रिपरेटरी स्टेज गणित में योगात्मक आकलन को देखने का एक नज़रिया

अनुषा टी. और रेशमा कृष्णन

यह लेख 'प्रिपरेटरी स्टेज में योगात्मक आकलन को अर्थपूर्ण बनाना' शीर्षक से लिखे गए आलेख का ही अगला हिस्सा है। लेख इस बात पर प्रकाश डालता है कि प्रिपरेटरी स्टेज के शिक्षक किस तरह से ऐसे योगात्मक आकलन तैयार कर सकते हैं जो विद्यार्थियों की उम्र के अनुकूल, कम दबाव वाले, और उनकी विकासात्मक आवश्यकताओं से मेल खाते हों। इसमें तीन सैम्पल रणनीतियाँ और आकलन के लिए कुछ तरीक़े सुझाए गए हैं। पहली रणनीति मापन पर आधारित एक खोजपरक गतिविधि है जिसे रेटिंग स्केल के माध्यम से आँका जा सकता है। दूसरी रणनीति एक प्रोजेक्ट है जो स्थानिक तर्कशक्ति (spatial reasoning–यानी आकृतियों को जोड़ने व पहचानने की समझ) को कला के साथ जोड़ता है, और जिसका आकलन रूब्रिक्स के माध्यम से किया जाता है। तीसरी रणनीति एक प्रदर्शन-आधारित टास्क (demonstration task) है जिसके ज़रिए ज्यामितीय तर्क का आकलन किया जाता है, और जिसे विद्यार्थी एक स्व-आकलन चेकलिस्ट के माध्यम से भी पूरा कर सकते हैं। ये सभी रणनीतियाँ लिखित परीक्षाओं के साथ मिलकर योगात्मक आकलन को अधिक सार्थक और व्यापक बना सकती हैं। यह तरीक़ा विद्यार्थियों को न केवल आनन्ददायक अनुभव देता है, बल्कि उन्हें तनाव मुक्त सीखने का माहौल भी प्रदान करता है।

ऊपर उल्लेख किए गए लेख में कहा गया है कि रचनात्मक और योगात्मक आकलन (formative and summative assessments) का उपयोग इस तरह से किया जाना चाहिए ताकि विद्यार्थियों को कक्षा-विशेष में सीखी गई बातों का कोई नतीजा हासिल करने और उनकी उम्र/कक्षा के अनुरूप ज़रूरी कौशल विकसित करने में मदद मिल सके। आकलन में ऐसे टास्क न हों जो विद्यार्थियों में बेवजह का तनाव या घबराहट पैदा करें, बल्कि वे कक्षा के सामान्य माहौल में आसानी से किए जा सकें। साथ ही, ये टास्क विद्यार्थियों और शिक्षक, दोनों को उनकी सीखी हुई बातों को एक-दूसरे के साथ एकीकृत करने का अवसर भी दें। इसके अलावा, इनमें इतने स्पष्ट संकेत भी होने चाहिए जो बता सकें कि निर्धारित दक्षताओं के आधार पर विद्यार्थी सीखने के अगले चरण में जाने के लिए तैयार हैं या नहीं।

योगात्मक आकलन के लिए ऐसी रणनीतियाँ अपनाई जानी चाहिए जो विद्यार्थियों की उम्र के अनुरूप हों, और शोध व नीतिगत प्रमाणों से मेल खाती हों। प्रिपरेटरी स्टेज में केवल लिखित परीक्षाएँ ही पर्याप्त नहीं हैं, क्योंकि उनसे सभी दक्षताओं की परख नहीं हो पाती है। इसके अलावा, योगात्मक आकलन का रिपोर्ट कार्ड भी केवल अंकों और ग्रेड तक सीमित नहीं होना चाहिए। इसमें विद्यार्थी की दक्षताओं का ऐसा गुणात्मक विवरण होना चाहिए जिसे समझना और समझाना आसान हो।

यह लेख उन कुछ चुनिन्दा रणनीतियों के बारे में बताता है जिनका इस्तेमाल लिखित परीक्षाओं के साथ इस तरह से किया जा सकता है कि विद्यार्थियों द्वारा हासिल की गई दक्षताओं का योगात्मक आकलन किया जा सके। आकलन के लिए यहाँ कुछ स्कोरिंग टूल्स भी दिए गए हैं। हालाँकि ये टूल्स ही एकमात्र या अन्तिम सत्य नहीं हैं। शिक्षक उसी टास्क के लिए अलग-अलग टूल्स के संयोजन का प्रयोग भी कर सकते हैं [1]।

की-वर्ड : *योगात्मक आकलन, क्षमताएँ, खोज, स्व-आकलन, प्रोजेक्ट, रेटिंग स्केल, रूब्रिक्स, चेकलिस्ट*

प्रिपरेटरी स्टेज में गतिविधियों से भरी-पूरी गणित की पाठ्यपुस्तकों को लेकर एक शिक्षक की आम चिन्ता यही होती है कि इन गतिविधियों को किस तरह ऐसे योगात्मक आकलन में बदला जाए जो अर्थपूर्ण भी हो और व्यावहारिक भी। आगे दी गई रणनीतियाँ दर्शाती हैं कि कैसे ***योगात्मक आकलन के रचनात्मक उपयोग*** पर ज़ोर देते हुए विद्यार्थियों द्वारा अर्जित की गई दक्षताओं को न केवल मापा जा सकता है, बल्कि उनकी रिपोर्टिंग भी की जा सकती है। प्रत्येक रणनीति को कुछ उदाहरणों से समझाया गया है, इस उम्मीद के साथ कि शिक्षक इसी तर्ज़ पर प्रिपरेटरी स्टेज की दूसरी निर्धारित दक्षताओं को जाँचने के लिए अपनी तरफ़ से भी नए तरीक़े तैयार कर सकेंगे।

रणनीति 1 : खोज

यहाँ वर्णित टास्क शालेय शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 [4, पृ. 274] में दी गई उस दक्षता को परखने में मदद करता है जिसके अनुसार विद्यार्थी यह समझ सकें कि *"समान क्षेत्रफल वाली आकृतियों का परिमाप अलग-अलग हो सकता है, और इसी तरह समान परिमाप वाली आकृतियों का क्षेत्रफल भी भिन्न हो सकता है।"*

नीचे दी गई खोज-आधारित गतिविधि पाँचवीं कक्षा में मापन (वर्गों और आयतों का क्षेत्रफल एवं परिमाप) के यूनिट के अन्त में जोड़ी में टास्क करवाने के लिए तैयार की गई है। इस टास्क को करने में लगभग 60 से 80 मिनट लग सकते हैं।

पारम्परिक तौर पर, योगात्मक आकलन व्यक्तिगत क्षमताओं का किया जाता है, लेकिन इस तरह के खोजी टास्क छोटे समूहों में अधिक कारगर होते हैं। बेशक, अगर कोई विद्यार्थी अकेले काम करना चाहता है तो शिक्षक उसे यह अवसर दे सकते हैं। इस रणनीति के अन्त में दी गई ऑब्जर्वेशन रेटिंग स्केल (**तालिका-2**) शिक्षक को प्रत्येक विद्यार्थी का अलग-अलग आकलन करने में मदद करती है।

चित्र-1 : यह चित्र एआई टूल से बनाया गया है।

विद्यार्थियों के लिए निर्देश

आपके पास 24 वर्ग हैं। वर्ग की प्रत्येक भुजा को एक इकाई माना गया है। आपका टास्क इन सभी 24 वर्गों का उपयोग करके अधिक-से-अधिक और अलग-अलग तरह के आयत बनाना है।

अकेले या जोड़ी में, जैसे भी करना चाहें, दी गई ग्रिड शीट पर इन 24 वर्गों से बने आयत खींचें और प्रत्येक आयत की लम्बाई एवं चौड़ाई लिखें।

अब आपको नीचे दी गई तालिका-1 तैयार करनी है। उसमें आपस में चर्चा किए बग़ैर बनाए गए सभी आयतों की लम्बाई और चौड़ाई लिखनी है।

तालिका-1

आयत क्रमांक	लम्बाई	चौड़ाई	क्षेत्रफल	परिमाप
1				
2				
3				

(आवश्यकतानुसार और पंक्तियाँ भी जोड़ी जा सकती हैं।)

किसी से चर्चा किए बग़ैर तालिका और बनाए गए चित्रों की मदद से निम्नलिखित सवालों के जवाब दें :

1. किस आयत का परिमाप सबसे कम है?
2. किस आयत का परिमाप सबसे अधिक है?
3. बनाए गए प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल कितना है?
4. जब आकृति लम्बी और पतली होती जाती है तो उसके परिमाप में क्या बदलाव नज़र आते हैं?

शिक्षकों के लिए नोट

- हालाँकि गतिविधि जोड़ियों में की जाएगी, लेकिन प्रत्येक विद्यार्थी का आकलन अलग-अलग किया जाना चाहिए।
- यह ज़रूरी नहीं है कि विद्यार्थी दिए गए वर्गों का उपयोग करें ही। जो विद्यार्थी बिना किसी ठोस सामग्री के काम करना चाहते हैं, उन्हें इसकी अनुमति दी जा सकती है।
- किसी भी तरह की मदद करने से पहले विद्यार्थी को सवाल के बारे में सोचने के लिए पर्याप्त समय दें, क्योंकि इस अभ्यास का मुख्य उद्देश्य योगात्मक आकलन करना है।
- इस गतिविधि के दौरान विद्यार्थियों को किसी भी प्रकार का फ़ीडबैक न दें। टास्क पूरा हो जाने के बाद शिक्षक चाहें तो पूरी कक्षा के साथ इस पर चर्चा कर सकते हैं।

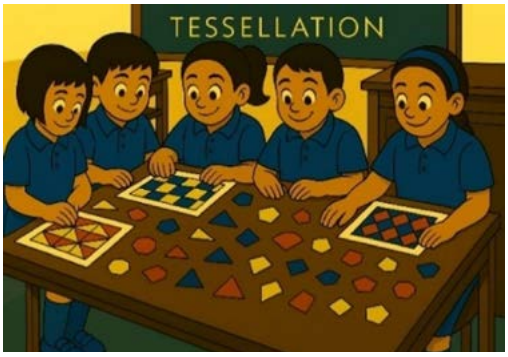
तालिका-2 : शिक्षक के अवलोकन के लिए रेटिंग स्केल

अवलोकन	हमेशा	कभी-कभार	कभी नहीं
विद्यार्थी आयत की लम्बाई और चौड़ाई को सही ढंग से दर्ज करता है।			
विद्यार्थी प्रत्येक आयत के क्षेत्रफल और परिमाप की गणना करता है।			
विद्यार्थी अवलोकन करता है कि लम्बाई और चौड़ाई बदलने पर भी आयत का क्षेत्रफल समान रहता है।			
विद्यार्थी इस निष्कर्ष पर पहुँचता है कि आयत के लम्बा और पतला होने पर उसके परिमाप में बदलाव आता है।			
विद्यार्थी दिए गए सन्दर्भ की व्याख्या करने के लिए क्षेत्रफल और परिमाप से सम्बन्धित गणितीय शब्दावली का उपयोग करता है।			

यह रणनीति योगात्मक आकलन के रचनात्मक उपयोग को सम्भव बनाती है। इसमें शिक्षक, विद्यार्थियों के जवाबों के आधार पर उनकी ग़लतफ़हमियों की पहचान करते हैं और उन्हें उचित फ़ीडबैक देते हैं। वहीं, विद्यार्थी क्षेत्रफल और परिमाप के बीच के सम्बन्ध को गहराई से समझते हैं जिससे यूनिट के अन्त में होने वाला यह टास्क सीखने के एक नए अवसर में बदल जाता है। इसी तरह का एक प्रयोग समान लम्बाई की तीलियों से भी किया जा सकता है जिसमें परिमाप को स्थिर रखकर अलग-अलग क्षेत्रफल वाले आयत बनाए जाते हैं।

यहाँ योगात्मक आकलन की समग्र और बहुआयामी प्रकृति भी महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है जिसमें शिक्षक अवलोकन, लिखित टास्क, मौखिक उत्तर और प्रदर्शन-आधारित गतिविधियों जैसे विभिन्न तरीक़ों का उपयोग करते हैं, ताकि विद्यार्थियों के सीखने के पूरे दायरे को समझा जा सके।

रणनीति 2 : प्रोजेक्ट

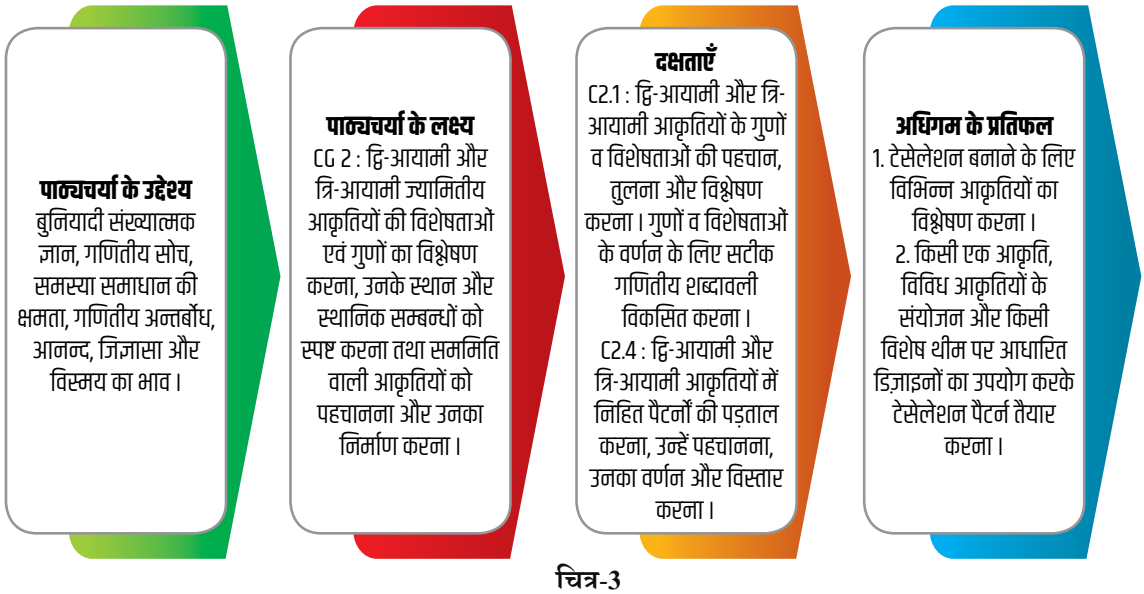


चित्र-2 : यह चित्र एआई टूल से बनाया गया है।

प्रोजेक्ट, आकलन का एक ऐसा रूप है जो गणित को वास्तविक जीवन के अनुप्रयोगों से जोड़ सकता है। यह एक ओर जहाँ रचनात्मक आकलन का अवसर देता है, वहीं अपनी प्रकृति में योगात्मक भी होता है [1]।

प्रोजेक्ट के दौरान विद्यार्थी समूहों में मिलकर काम करते हैं, जहाँ शिक्षक एक मार्गदर्शक और सहायक की भूमिका निभाते हैं। प्रोजेक्ट की योजना बनाने, उस पर चर्चा करने, और उसे पूरा करने के लिए विद्यालय के समय में से ही उनके लिए अलग से कुछ समय निर्धारित किया जाता है। इस दौरान शिक्षक आवश्यकतानुसार उनका मार्गदर्शन करते हैं। विद्यार्थियों को कम लागत या बिना लागत वाली ऐसी सामग्री का उपयोग करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है जो आसानी से उपलब्ध हों। प्रोजेक्ट व्यावहारिक होने चाहिए जिन्हें स्वयं विद्यार्थी अपने हाथों से पूरा कर सकें, साथ ही इन्हें करना प्रत्येक विद्यार्थी के लिए सम्भव होना चाहिए। इन गतिविधियों से विद्यार्थी टीम वर्क और मिलकर समस्याओं का समाधान करना भी सीखते हैं।

प्रोजेक्ट का संक्षिप्त विवरण : यह प्रोजेक्ट पाँचवीं कक्षा के विद्यार्थियों के लिए तैयार किया गया है। इसमें विद्यार्थी पैटर्न डिज़ाइनर की भूमिका निभाते हुए टेसेलेशन (tessellations–पच्चीकारी) की रोचक दुनिया में प्रवेश करते हैं ('टेसेलेशन' में आकृतियों को एक साथ इस तरह बिछाया जाता है कि वे कोई पैटर्न बनाएँ, लेकिन उनके बीच न तो कोई ख़ाली जगह छूटे और न ही वे ओवरलैप करें)। विद्यार्थी इस पड़ताल से शुरुआत करते हैं कि कौन-कौन-से बहुभुज टेसेलेशन बना सकते हैं और फिर स्वयं ही सहज रूप से इसकी वजह भी तलाश लेते हैं। यह प्रोजेक्ट पैटर्न निर्माण के माध्यम से विद्यार्थियों की स्थानिक तर्कशक्ति को विकसित करता है। इस प्रक्रिया में वे अलग-अलग आकृतियों को मिलाकर इस्तेमाल करते हैं और थीम-आधारित टेसेलेशन आर्ट बनाकर अपनी रचनात्मकता को जीवन्त करते हैं। इस प्रोजेक्ट के लिए शालेय शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 [4] के सन्दर्भ में सीखने के मानकों का एक फ़्लो चार्ट नीचे दिया गया है :



चित्र-3

समूह टास्क

शिक्षक तीन या चार विद्यार्थियों के प्रत्येक समूह को आकृतियों से युक्त एक किट प्रदान करेंगे। इस किट में त्रिभुज, वर्ग, पंचभुज, षट्भुज और अष्टभुज के एक-एक कटआउट हैं जिनकी भुजाओं की लम्बाई समान है। किट में एक

आयत भी है जिसकी चौड़ाई वर्ग की भुजा के बराबर है, जबकि लम्बाई उससे दोगुनी है। यह प्रोजेक्ट तीन चरणों में पूरा किया जाएगा। प्रत्येक चरण में विद्यार्थी डॉट शीट, चार्ट पेपर या किसी अन्य रचनात्मक माध्यम का उपयोग करके टेसेलेशन बनाएँगे। यहाँ यह मानकर चला गया है कि विद्यार्थी इन आकृतियों से भली-भाँति परिचित हैं और पहले भी टेसेलेशन से जुड़ी गतिविधियाँ कर चुके हैं। विद्यार्थी अपनी आवश्यकतानुसार किट में दी गई आकृतियों की कई और प्रतिकृतियाँ बना सकते हैं, और रंगों या पैटर्न के उपयोग से अपनी रचनात्मकता दिखा सकते हैं। शिक्षक एक सप्ताह के तय कालखण्डों के दौरान यह आकलन टास्क पूरा कर सकते हैं।

चरण-1 : एकल आकृति टेसेलेशन (50-60 मिनट)

- किट में दी गई आकृतियों को इस आधार पर वर्गीकृत करें कि वे टेसेलेशन बनाती हैं या नहीं।
- ऐसी किन्हीं दो आकृतियों को चुनें जो ख़ुद ही टेसेलेशन बना सकती हैं। प्रत्येक आकृति का इस्तेमाल करके अलग-अलग एकल आकृति टेसेलेशन तैयार करें।

चरण-2 : मिश्रित आकृति टेसेलेशन (40-30 मिनट)

- उन सभी आकृतियों के जोड़ों की पहचान करें जो एक-दूसरे के साथ टेसेलेशन बना सकते हैं।
- पहचाने गए किसी एक जोड़े का उपयोग करके मिश्रित आकृति टेसेलेशन बनाएँ।
- बने हुए पैटर्न को अपने शब्दों में समझाएँ।

चरण-3 : रचनात्मक थीम-आधारित टेसेलेशन (90-80 मिनट)

- अपने आस-पास से कोई एक थीम चुनें (उदाहरण के लिए, प्रकृति, शहर का दृश्य या बुनाई/कढ़ाई)।
- अपनी थीम के आधार पर कम-से-कम दो आकृतियों का उपयोग करते हुए वॉलपेपर, कालीन, कपड़ों या किसी अन्य कला रूप के लिए डिज़ाइन बनाते हुए टेसेलेशन तैयार करें।

तीनों चरण पूरे होने के बाद प्रत्येक समूह अपने द्वारा बनाए गए टेसेलेशन का पूरी कक्षा के सामने प्रदर्शन करेगा। इस दौरान उसके क्या अनुभव रहे, यह भी बताएगा। प्रत्येक समूह को प्रस्तुति की तैयारी के लिए लगभग 20 मिनट और प्रस्तुति देने के लिए 8 से 10 मिनट दिए जा सकते हैं।

प्रस्तुति में चिन्तन-मन्थन का एक महत्त्वपूर्ण पहलू शामिल है। इसके लिए शिक्षक कक्षा में कुछ ऐसे मार्गदर्शक सवाल साझा कर सकते हैं जिनसे विद्यार्थियों को मदद मिल सके। कुछ सवाल इस तरह के हो सकते हैं :

1. आपने यह कैसे तय किया कि डिज़ाइन बनाने के लिए किन आकृतियों का उपयोग करना है?
2. इस गतिविधि के दौरान आपको कुछ चुनौतियों का सामना करना पड़ा होगा। ऐसी किसी एक चुनौती के बारे में बताएँ और यह भी कि आपने उसका समाधान कैसे किया।
3. टीम के साथ काम करते हुए आपने क्या सीखा?

प्रोजेक्ट के आकलन के लिए शिक्षक रूब्रिक्स का उपयोग कर सकते हैं। रूब्रिक्स का मुख्य उद्देश्य प्रदर्शन का आकलन करना होता है [2]। कुछ प्रदर्शन ऐसे होते हैं जिनमें शिक्षक, विद्यार्थियों को किसी प्रक्रिया के दौरान टास्क करते हुए देखते हैं, जबकि अन्य में वे उनके टास्क के परिणामस्वरूप बने उत्पाद का अवलोकन करते हैं। *पैटर्न की सटीकता, कलात्मक प्रस्तुति, गणितीय तर्क, प्रस्तुतीकरण और आपसी सहयोग* जैसे मानदण्डों के आधार पर थ्री-पॉइंट स्केल का उपयोग करके रूब्रिक्स विकसित किए जा सकते हैं। **तालिका-3** में दिया गया सैम्पल शिक्षक को तीन चरणों के दौरान विद्यार्थियों का (छोटे-छोटे समूहों में) आकलन करने में मदद करेगा। यहाँ कुल अंक 10 रखे गए हैं। इस रूब्रिक के संकेतक प्रोजेक्ट से हासिल उन्हीं अधिगम के प्रतिफलों से लिए गए हैं जिनका विवरण ऊपर दिए गए फ़्लो चार्ट (**चित्र-3**) में है।

तालिका-3

प्रोजेक्ट का चरण	स्कोर	संकेतक*
चरण-1	3	→ समूह टेसेलेशन बनाने वाली ऐसी तीन या अधिक आकृतियों की पहचान करता है जो ख़ुद ही टेसेलेशन बना सकती हैं। → ऐसी दो आकृतियों की पहचान करता है जो स्वयं टेसेलेशन नहीं बनातीं। → दो एकल-आकृति टेसेलेशन बनाता है। → प्रक्रिया के दौरान अच्छा समन्वयन दर्शाता है।
	2	→ समूह टेसेलेशन बनाने वाली ऐसी दो आकृतियों की पहचान करता है जो ख़ुद ही टेसेलेशन बना सकती हैं। → एक ऐसी आकृति की पहचान करता है जो ख़ुद टेसेलेशन नहीं बनाती। → दो एकल-आकृति टेसेलेशन बनाता है। → प्रक्रिया के दौरान अच्छा समन्वयन दर्शाता है।
	1	→ समूह टेसेलेशन बनाने वाली ऐसी एक आकृति की पहचान करता है जो ख़ुद ही टेसेलेशन बना सकती है। → ऐसी किसी आकृति की पहचान नहीं करता जो स्वयं से टेसेलेशन नहीं बनाती। → एकल आकृति का उपयोग करके टेसेलेशन बनाता है। → दूसरों के साथ समन्वय बनाने में कठिनाई का अनुभव करता है।
	0	→ समूह टेसेलेशन बनाने वाली ऐसी किसी भी आकृति की पहचान नहीं करता है जो ख़ुद ही टेसेलेशन बना सकती है। → टेसेलेशन नहीं बनाता है। → दूसरों के साथ समन्वय बनाने में कठिनाई का अनुभव करता है।
चरण-2	3	→ समूह दो से अधिक आकृति-युग्मों की पहचान करता है जो एक-दूसरे के साथ टेसेलेशन बनाते हैं। → किसी एक आकृति-युग्म का उपयोग करके एक मिश्रित टेसेलेशन बनाता है। → प्रस्तुति के दौरान पैटर्न को अपने शब्दों में समझाता है। → प्रक्रिया के दौरान अच्छा समन्वयन दर्शाता है।
	2	→ समूह ऐसे दो आकृति-युग्मों की पहचान करता है जो एक-दूसरे के साथ टेसेलेशन बनाते हैं। → किसी एक आकृति-युग्म का उपयोग करके एक मिश्रित टेसेलेशन बनाता है। → प्रस्तुति के दौरान पैटर्न को समझाने में कठिनाई का अनुभव करता है। → प्रक्रिया के दौरान अच्छा समन्वयन दर्शाता है।
	1	→ समूह ऐसे एक आकृति-युग्म की पहचान करता है जो एक-दूसरे के साथ टेसेलेशन बनाते हैं। → पहचाने गए आकृति-युग्म का उपयोग करके टेसेलेशन बनाने में कठिनाई का अनुभव करता है। → प्रस्तुति के दौरान पैटर्न को समझाने में कठिनाई का अनुभव करता है। → एक-दूसरे के साथ समन्वय बनाने में कठिनाई का अनुभव करता है।
	0	→ समूह ऐसे किसी आकृति-युग्म की पहचान नहीं कर पाता है जो एक-दूसरे के साथ टेसेलेशन बनाते हैं। → कोई भी टेसेलेशन नहीं बनाता है। → एक-दूसरे के साथ समन्वय बनाने में कठिनाई का अनुभव करता है।

प्रोजेक्ट का चरण	स्कोर	संकेतक*
चरण-3	4	→ समूह चुनी गई थीम को दर्शाते हुए कम-से-कम दो आकृतियों का उपयोग करके टेसेलेशन बनाता है। → टेसेलेशन में उपयोग की गई आकृतियों के सन्दर्भ में डिज़ाइन का विस्तृत मौखिक विश्लेषण प्रस्तुत करता है। → डिज़ाइनिंग की प्रक्रिया और प्रस्तुति के दौरान समन्वयन का अच्छा प्रदर्शन करता है। → समूह के सभी सदस्य प्रक्रिया को लेकर चिन्तनशील होते हैं।
	3	→ समूह चुनी गई थीम को दर्शाते हुए कम-से-कम दो आकृतियों का उपयोग करके टेसेलेशन बनाता है। → मौखिक विश्लेषण विस्तृत नहीं होता है, लेकिन डिज़ाइन के कुछ पहलुओं को शामिल करता है। → डिज़ाइनिंग की प्रक्रिया और प्रस्तुति के दौरान समन्वयन का अच्छा प्रदर्शन करता है। → समूह के कुछ ही सदस्य प्रक्रिया को लेकर चिन्तनशील होते हैं।
	2	→ समूह कम-से-कम दो आकृतियों का उपयोग करके टेसेलेशन बनाता है, लेकिन यह चुनी गई थीम को प्रदर्शित नहीं करता है। → डिज़ाइन का कोई विश्लेषण प्रस्तुत नहीं करता है। → टास्क करते समय कुछ सदस्य सक्रिय रहते हैं, जबकि अन्य निष्क्रिय। → समूह के कुछ सदस्य ही प्रक्रिया को लेकर चिन्तनशील होते हैं।
	1	→ समूह कम-से-कम दो आकृतियों का उपयोग करके टेसेलेशन बनाता है, लेकिन यह चुनी गई थीम को प्रदर्शित नहीं करता है। → डिज़ाइन का कोई विश्लेषण प्रस्तुत नहीं करता है। → प्रक्रिया के दौरान हर टास्क में समन्वय की कमी दिखती है। → प्रस्तुति में चिन्तन शामिल नहीं होता।
	0	→ इस समूह के पास प्रदर्शित करने के लिए कोई डिज़ाइन नहीं होती है।

* ये कुछ प्रतिनिधि संकेतक हैं। शिक्षक विभिन्न स्तरों पर इसी प्रकार के संकेतकों के साथ रूब्रिक्स तैयार कर सकते हैं।

शिक्षकों के लिए नोट

- इस रूब्रिक का उपयोग शिक्षक द्वारा प्रोजेक्ट टास्क की प्रक्रिया के दौरान विद्यार्थियों के आकलन के लिए किया जाना चाहिए। इसमें दिए गए संकेतक शिक्षक को प्रत्येक समूह के बारे में अपने अवलोकन दर्ज करने में मार्गदर्शन देंगे।
- टेसेलेशन के बारे में और अधिक विस्तार से जानने के लिए एनसीईआरटी कक्षा-5 के अध्याय-7 (आकृतियाँ और पैटर्न) को सन्दर्भित किया जा सकता है।
- शिक्षक, विद्यार्थियों के व्यक्तिगत आकलन को शामिल करने के लिए चेकलिस्ट या रेटिंग स्केल जैसी अन्य पद्धतियों का भी इस्तेमाल कर सकते हैं।

योगात्मक आकलन के रूप में यह प्रोजेक्ट विद्यार्थियों को अपने सीखे हुए ज्ञान को समन्वित करने और सीखने के मानकों के आधार पर अपनी प्रगति को ट्रैक करने का अवसर प्रदान करता है। यह भी सुनिश्चित करने में मदद करता है कि विद्यार्थी अगले चरण में जाने के लिए तैयार हैं या नहीं।

रणनीति 3 : प्रदर्शन टास्क

कक्षा-4 की एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तक [5] के 'सममिति के साथ आनन्द', 'हमारे आस-पास की आकृतियाँ', 'हमारे चारों ओर पैटर्न' तथा 'लुका-छिपी' जैसे ज्यामितीय अध्यायों का आकलन प्रदर्शन गतिविधि के माध्यम से भी किया जा सकता है। इस प्रस्तावित आकलन में शिक्षक के लिए ज़रूरी है कि वह कक्षा, गणित की प्रयोगशाला या किसी भी उपलब्ध खुले स्थान पर विद्यार्थियों के साथ गुणवत्तापूर्ण समय बिताए, ताकि विद्यार्थियों को सामग्री फैलाकर उस पर काम करने के लिए पर्याप्त अवसर मिल सकें। प्रत्येक विद्यार्थी अपनी समझ का प्रदर्शन कर सके, इसके लिए कुछ सवाल दिए जाते हैं जिन पर उसे व्यक्तिगत तौर पर काम करना होता है। विद्यार्थियों की दक्षताओं जैसे *द्वि-आयामी एवं त्रि-आयामी आकृतियों के गुणों/ विशेषताओं की पहचान, तुलना और विश्लेषण; उनके वर्णन के लिए उपयुक्त शब्दावली का विकास तथा इन आकृतियों में पैटर्न की खोज, पहचान और विस्तार* के आकलन हेतु प्रदर्शन टास्क के कुछ उदाहरण [4, पृ. 274] नीचे दिए गए हैं।

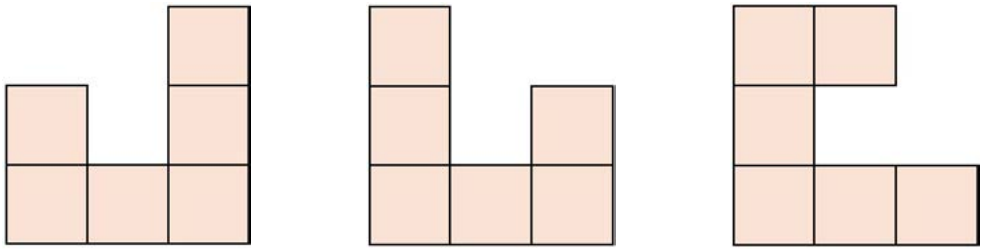
आवश्यक सामग्री (प्रति विद्यार्थी) :

टास्क-1 : घन या बिल्डिंग ब्लॉक्स या माचिस की डिब्बियाँ (सभी समान आकार की) - 10

टास्क-2 : समान लम्बाई की स्ट्रॉ/तीलियाँ - 9

टास्क-3 : दो अलग-अलग रंगों के काग़ज़ के कटआउट - 30 (प्रत्येक रंग के)

1. कल्पना करें कि आप किसी इमारत को अलग-अलग दिशाओं से देख रहे हैं। **चित्र-4** में दिखाया गया है कि वह इमारत सामने, ऊपर और दाईं ओर से कैसी दिखती है। गुलाबी रंग का प्रत्येक वर्ग एक घन का प्रतिनिधित्व करता है। ऐसे ही दस घनों का उपयोग करके इमारत का एक मॉडल बनाएँ।



सामने का दृश्य ऊपर का दृश्य दाईं ओर का दृश्य

चित्र-4

(क) इन दसों घनों का उपयोग करते हुए आप कितने तरीक़ों से इमारत बना सकते हैं? प्रदर्शित करें।

(ख) मान लें कि आपको केवल यह पता है कि इमारत सामने और ऊपर से कैसी दिखती है, जबकि बाजू से कैसी दिखती है यह नहीं दिया गया है। क्या इस स्थिति में भी आपकी इमारत, आपके द्वारा (क) में प्रदर्शित इमारत के समान ही रहेगी? यदि नहीं, तो ऐसी दो या तीन अलग-अलग इमारत बनाकर दिखाएँ।

2. आपको समान लम्बाई की स्ट्रॉ दी गई हैं। आपको तीन ऐसे त्रिभुज बनाने हैं जिनमें भुजाओं की लम्बाई समान हो। आपको (क) 7 स्ट्रॉ के उपयोग से तीन त्रिभुज बनाने हैं, (ख) 8 स्ट्रॉ के उपयोग से भी तीन त्रिभुज बनाने हैं, और (ग) 9 स्ट्रॉ का उपयोग करके भी तीन त्रिभुज बनाने हैं। (ध्यान रहे कि आप स्ट्रॉ को न तो मोड़ सकते हैं न ही काट सकते हैं। उन्हें एक-दूसरे के भीतर भी नहीं डाला जा सकता।)

3. आपको एक वर्गाकार ग्रिड शीट दी गई है। आप ग्रिड के प्रत्येक वर्ग में दी गई दो अलग-अलग रंगों की टाइल्स को फ़िट कर सकते हैं। टाइल्स को अलग-अलग स्थितियों (खड़ी, आड़ी) में रखकर दीवार या फ़र्श के लिए विभिन्न डिज़ाइन बनाएँ। प्रत्येक डिज़ाइन में एक रिपीटिंग यूनिट हो सकती है। इन यूनिटों की पहचान कर ऐसे कम-से-कम दो डिज़ाइन तैयार करें।

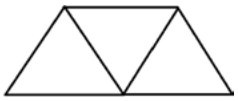
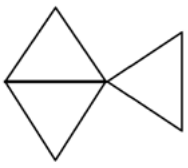
शिक्षकों के लिए नोट

- यह टास्क दृश्य-कल्पना की क्षमता पर ज़ोर देता है जिसका आकलन केवल पेपर-पेंसिल वाली परीक्षा से सम्भव नहीं है। शिक्षक इसी प्रकार के अन्य टास्कों की रूपरेखा भी तैयार कर सकते हैं।
- इस आकलन के लिए विद्यालय द्वारा निर्धारित समय और उपलब्ध सामग्री के अनुसार शिक्षक एक-या-एक से अधिक टास्क चुन सकते हैं।
- टास्क-1 के लिए 20 से 30 मिनट और टास्क-2 एवं टास्क-3 (प्रत्येक) के लिए 10 से 15 मिनट दिए जा सकते हैं। वैसे शिक्षक अपनी कक्षा की समझ और स्तर के आधार पर प्रत्येक टास्क के लिए समय का निर्धारण अपने हिसाब से भी कर सकते हैं।

विद्यार्थियों को अपने टास्क की पूर्णता का आकलन करने में मदद के लिए एक चेकलिस्ट दी जा सकती है। इससे उन्हें यह पता रहेगा कि क्या वे सभी ज़रूरी शर्तें पूरी कर रहे हैं और साथ ही इस प्रक्रिया से उनमें काम करने की अच्छी आदतें भी विकसित होंगी [2]। यहाँ स्व-आकलन चेकलिस्ट का एक नमूना दिया गया है। यह विद्यार्थियों को उनकी अपनी उपलब्धियों का आकलन करने में मदद करेगा।

किन बातों पर ध्यान देना है?	हाँ / नहीं
टास्क-1	
• मैं सामने, ऊपर और बाजू से दिखने के अनुसार ब्लॉकों को व्यवस्थित कर पाता हूँ।	
• मैं दिए गए दृश्य के आधार पर इमारत की कल्पना कर पाता हूँ।	
• मैं यह समझ पाता हूँ कि यदि बाजू का दृश्य नहीं दिया जाए तब भी कई सम्भावित इमारत बनाई जा सकती हैं।	
टास्क-2*	
• मैं 7 स्ट्रॉ का उपयोग करके तीन त्रिभुज बना सकता हूँ।	
• मैं 8 स्ट्रॉ का उपयोग करके तीन त्रिभुज बना सकता हूँ।	
• मैं 9 स्ट्रॉ का उपयोग करके तीन त्रिभुज बना सकता हूँ।	
टास्क-3	
• मैं दो अलग-अलग टाइलों का उपयोग करके दो भिन्न प्रकार की डिज़ाइन बना पाया।	
• मैं अपने द्वारा बनाई गई प्रत्येक डिज़ाइन में रिपीटिंग यूनिट की पहचान कर पाया।	

***टास्क-2 के कुछ सम्भावित परिणाम नीचे दिए गए हैं :**

स्ट्रॉ की संख्या	तीन त्रिभुजों के साथ कुछ सम्भावित परिणाम
7	
8	 नोट : इस स्थिति में और भी सम्भावित परिणाम हो सकते हैं।

स्ट्रॉ की संख्या	तीन त्रिभुजों के साथ कुछ सम्भावित परिणाम
9	नोट : इस स्थिति में और भी सम्भावित परिणाम हो सकते हैं।

शिक्षक प्रदर्शन के आकलन के लिए भी एक रूब्रिक तैयार कर सकते हैं।

ऐसी उम्मीद की जाती है कि ऊपर वर्णित तीनों रणनीतियाँ शिक्षकों को पेन और पेपर वाली परीक्षाओं से ऊपर उठकर आगे बढ़ने के लिए प्रेरित करेंगी, विशेष रूप से योगात्मक आकलन के मामले में। हालाँकि शुरू में ये टास्क कठिन लग सकते हैं, लेकिन हर प्रयास के साथ शिक्षक को अपने विद्यार्थियों की क्षमता अनुसार उनमें सुधार करने के आइडिया मिलते जाएँगे। यह अपेक्षित है कि योगात्मक आकलन के लिए ऐसे टास्क देने से पहले विद्यार्थियों को अवधारणाओं को समझने के दौरान सामग्री के साथ काम करने के पर्याप्त अवसर दिए जाएँ। रूब्रिक और चेकलिस्ट जैसे साधनों, जिनसे किसी विद्यार्थी के प्रदर्शन का आकलन निर्धारित दक्षताओं के आधार पर किया जाता है, की मदद से शिक्षक, विद्यार्थी के प्रदर्शन का गुणात्मक विवरण भी दे सकते हैं। योगात्मक आकलन के उपयोगों पर विचार करके और निर्धारित दक्षताओं को ध्यान में रखते हुए शिक्षक ऐसे आकलन टास्क डिज़ाइन कर सकते हैं जो विद्यार्थियों में डर एवं तनाव पैदा करने की बजाय उन्हें सहज महसूस कराएँ। विद्यार्थियों को अपनी प्रतिभा दिखाने का एक सकारात्मक अवसर दिया जाना चाहिए ताकि वे उच्च प्रभाव वाले आकलनों में बेहतर प्रदर्शन कर सकें, सिर्फ़ अंकों के लिए ही नहीं, बल्कि उन चुनौतियों का सामना करने के लिए भी जिनमें उनकी संज्ञानात्मक क्षमताओं और भावनात्मक कौशलों का विकास होता है।

References

1. Authentic assessments, Assessment resources, 2022, Azim Premji University https://bit.ly/4kO1vzl
2. Brookhart, Susan M. author. (2013). How to create and use rubrics for formative assessment and grading. Alexandria, Virginia USA:ASCD https://bit.ly/4kO1vzl
3. Ministry of Education, Government of India. (2020). *National Education Policy 2020.* https://bit.ly/4rL6liY
4. NCERT. (2023). National Curriculum Framework for School Education. New Delhi: NCERT. https://bit.ly/46cm9mN
5. NCERT. (2025). Maths Mela, Textbook of Mathematics for Grade 4 and 5. New Delhi: National Council of Educational Research and Training. https://bit.ly/4b80Zrk
6. NCTM (2000). Principles and standards for school mathematics. Reston, VA: NCTM. https://bit.ly/4aULDYF

रेशमा कृष्णन वर्तमान में बेंगलूरु स्थित अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटिन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में फ़ैकल्टी मेम्बर हैं। वे गणित के माध्यम से बच्चों को पढ़ाने को लेकर उत्साहित रहती हैं। वे यूनिवर्सिटी से जुड़ने से पहले राज्य, केन्द्रीय एवं अन्तरराष्ट्रीय बोर्डों के साथ काम कर चुकी हैं। उनकी रुचियों में स्कूली बच्चों के लिए सार्थक आकलनों का विकास करना शामिल है। उनसे reshma.krishnan@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुषा टी. बेंगलूरु स्थित अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के स्कूल ऑफ़ कंटिन्यूइंग एजुकेशन एंड यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर में फ़ैकल्टी मेम्बर हैं। उन्होंने मैसूर यूनिवर्सिटी से गणित में पीएचडी की है। उनके शोध का दायरा विशुद्ध गणित (प्योर मैथमेटिक्स) से लेकर गणित शिक्षा तक फैला हुआ है। विशुद्ध गणित में इन्होंने मॉड्यूलर इक्वेशन्स, थीटा फ़ंक्शन आइडेंटिटीज़ और $1/\pi$ के लिए रामानुजन-टाइप सीरीज़ पर काम किया है। गणित शिक्षा के क्षेत्र में उनकी रुचियों में शिक्षणशास्त्र (पैडागॉजी), आकलन और पाठ्यचर्या विकास शामिल हैं। उनसे anusha.t@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल

भिन्नों को चित्रों से समझने की पेचीदा सच्चाई

कंचना सूर्यकुमार

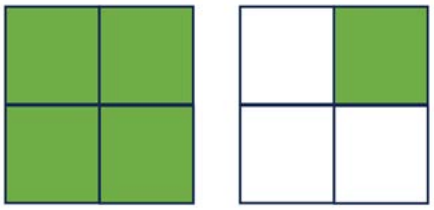
जैसा दिखता है, वैसा हमेशा होता नहीं!

मैंने कई बार देखा है कि विद्यार्थी, बड़ी कक्षाओं यहाँ तक कि हाई स्कूल में पढ़ने वाले विद्यार्थी भी, भिन्न जोड़ते समय एक सामान्य ग़लती करते हैं, जैसा कि **चित्र-1** में दिखाया गया है। मैं आमतौर पर इसकी वजह कलन विधि (Algorithm) को समझने में हुई ग़लती को मानती थी, जिसे मैं 'विधि सम्बन्धी त्रुटि' (Method error) कहती हूँ। एक दिन एक प्राथमिक कक्षा में अचानक जाने का अवसर मिलने से पहले तक मैं इसे अवधारणात्मक समझ से जुड़ी समस्या नहीं मानती थी।

$$\frac{4}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

चित्र-1 : भिन्नों के जोड़ में होने वाली सामान्य ग़लती

एक अस्थाई शिक्षिका ने मुझे अपनी कक्षा के पास से गुज़रते हुए देखा और मदद के लिए अन्दर बुला लिया। उन्होंने बोर्ड पर एक आकृति (**चित्र-2**) बनाई हुई थी। शिक्षिका ने मुझे अपनी कक्षा में क्यों बुलाया होगा, यह जानने से पहले आप **चित्र-2** में दिए गए सवाल के बारे में सोचिए। आपको क्या लगता है कि इस सवाल का जवाब क्या होना चाहिए? क्या आप अपने जवाब के पीछे का तर्क समझा सकते हैं?



चित्र-2 : आकृति का कितना हिस्सा छायांकित है?

कक्षा के विद्यार्थियों ने इस सवाल के दो अलग-अलग जवाब दिए थे। शिक्षिका ने मुझसे कहा कि, "क्या आप विद्यार्थियों को समझा सकती हैं कि क्यों छायांकित हिस्सा $\frac{5}{4}$ को दर्शाता है, न कि $\frac{5}{8}$ को?"

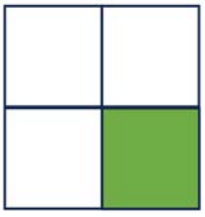
आप इस सवाल का जवाब कैसे देंगे?

असन्तोषजनक समाधान का बोझ

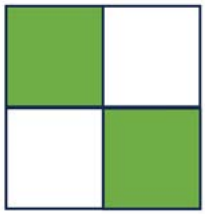
मैं यह मानती हूँ कि मैं इस बात से चौंक गई थी। मुझे यह तो समझ में आता था कि विद्यार्थी विधियों में ग़लती कर सकते हैं, लेकिन यह समझना मुश्किल था कि साधारण चित्रांकन भी ग़लतफ़हमी पैदा कर सकते हैं। मुझे लगता है कि मैंने जल्द ही स्थिति को सम्हाल लिया और कम-से-कम कुछ विद्यार्थियों को यह समझाने में सफल रही कि छायांकित हिस्सा $\frac{5}{4}$ को ही क्यों दर्शाता है। सम्भवतः आप उस तर्क से परिचित होंगे, जो मैंने उनके सामने पेश किया। **चित्र-3** में दर्शाए अनुसार,

की-वर्ड : *भिन्न, पूर्ण, भिन्नों की दृश्यांकन कल्पना करना, ग़लत धारणाएँ*

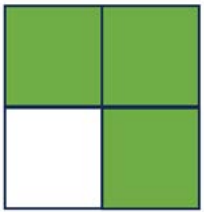
मैंने उन्हें समझाने के लिए केक का उदाहरण दिया। केक को 4 बराबर हिस्सों में बाँटा और ग़ैर-इकाई भिन्न (Non-unit fractions) की अवधारणा को समझाने की कोशिश की; मैंने उन्हें समझाया कि ये भिन्न असल में किसी 'इकाई भिन्न' (इस मामले में, एक-चौथाई) के ही कई टुकड़े या हिस्से होती हैं। एक-चौथाई के दो टुकड़ों को गणितीय रूप से $\frac{2}{4}$ के तौर पर दर्शाया जाएगा और उन्हें दो-चौथाई पढ़ा जाएगा। इसी तरह आगे बढ़ते हुए जब हम पाँच-चौथाई तक पहुँचेंगे, तो इसका मतलब होगा एक पूरा केक और साथ में एक-चौथाई हिस्सा।



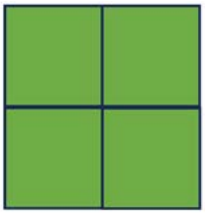
एक-चौथाई का एक टुकड़ा = $\frac{1}{4}$



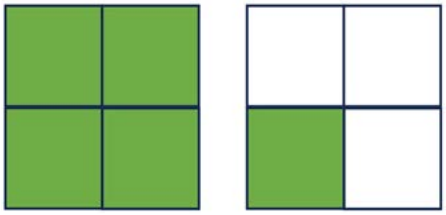
एक-चौथाई के दो टुकड़े = $\frac{2}{4}$



एक चौथाई के तीन टुकड़े = $\frac{3}{4}$



एक-चौथाई के चार टुकड़े = $\frac{4}{4}$ = 1 पूरा केक



एक-चौथाई के पाँच टुकड़े = $\frac{5}{4}$ = 1 पूरा केक और एक-चौथाई हिस्सा

चित्र-3 : ग़ैर-इकाई भिन्नों का अर्थ समझाना

चित्र-2 से जो भ्रम हुआ, वह आम बात है ऐसा ज़्यादातर तब होता है जब भिन्नों को 'छायांकित भागों की संख्या ÷ कुल भागों की संख्या' के रूप में सिखाया जाता है। इसलिए, मैंने विद्यार्थियों का ध्यान इस बात पर खींचने की कोशिश की कि हर टुकड़े का आकार क्या है और 'चौथाई' या 'एक-चौथाई' का क्या मतलब होता है।

हालाँकि मुझे थोड़ा शक़ था कि मैंने बच्चों को उनके स्तर की तुलना में सही तरीक़े से समझाया या नहीं। तब मुझे ऐसा लगा कि विद्यार्थियों का भ्रम बिल्कुल जायज़ था। वास्तव में, भिन्नों को चित्रों के माध्यम से समझना उतना आसान नहीं है, जितना मैंने सोचा था।

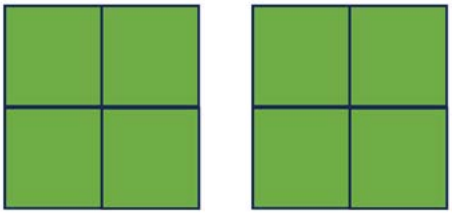
आशा की एक किरण

एक या दो साल बाद ही समझाने का एक ऐसा तरीक़ा मिला जो मुझे सबसे सही लगा। व्यावसायिक विकास पाठ्यक्रम के एक व्याख्यान (जिसकी मैं सहभागी थी) में एक शिक्षक ने **चित्र-2** वाला प्रश्न सामने रखा और पूछा कि छायांकित भाग इनमें से कितना है $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$ या $\frac{5}{2}$। एक विकल्प के रूप में $\frac{5}{2}$ को देखकर मेरे भ्रम की कल्पना कीजिए!

मैं आपको ज़्यादा उलझन में नहीं डालूँगी और सीधे मुख्य बात बताती हूँ।

इस सवाल को सही तरह से समझने का सबसे ज़रूरी तरीक़ा है यह पूछना : **'एक पूर्ण (Whole) क्या है?'**

यदि यह एक पूर्ण है,



तो, वह भिन्न जो **चित्र-2** में छायांकित भाग को दर्शाती है वह $\frac{5}{8}$ है।

अब क्या आप देख सकते हैं कि $\frac{5}{8}$ भी कैसे एक सम्भावित उत्तर हो सकता है?

यदि यह एक पूर्ण है,

तो, वह भिन्न जो **चित्र-2** में छायांकित भाग को दर्शाती है, वह $2\frac{1}{2}$ या $\frac{5}{2}$ भी हो सकता है।

जब मैंने प्राथमिक कक्षा में विद्यार्थियों को समझाना शुरू किया था, तो मैंने अपने मन में एक पूर्ण तय कर लिया था। मेरे मन में यह बात बिल्कुल स्पष्ट थी कि इसके अलावा कोई और तार्किक तरीक़ा हो ही नहीं सकता। यह ज़रूरी है कि मैं साफ़तौर पर यह बताऊँ कि "पूर्ण क्या है?" यह पूछने और इस देखने में आसान लगने वाली समस्या के कई हल समझने का क्या महत्त्व है। इस तरह की समझ और तर्क-शक्ति एक शिक्षक को ग़लती और ग़लतफ़हमी के बीच अन्तर करने में मदद कर सकती है। साथ ही, वह विद्यार्थियों को सही तरीक़े से समझाकर उनकी मदद कर सकते हैं। मेरा मतलब यह नहीं है कि हर बार इतना विस्तार से समझाना ज़रूरी है। अधिकतर समय केवल विद्यार्थियों का ध्यान इस सवाल पर लाना कि "पूर्ण क्या है?" ही काफ़ी होता है।

आगे की राह

चित्र-1 में दिए गए संख्यात्मक उदाहरण और **चित्र-2** में उसके दृश्य रूप के ज़रिए, मैंने भिन्नों को जोड़ने में होने वाली एक आम ग़लती की ओर ध्यान दिलाने की कोशिश की है। अपने एक निजी अनुभव के आधार पर मैं यह बताना चाहती हूँ कि इस ग़लतफ़हमी की एक वजह हमारी यह समझ हो सकती है कि 'पूर्ण' क्या है। मेरा कहना है कि अगर हम साफ़-साफ़ यह बताएँ या विद्यार्थियों से पूछें कि इस समस्या में 'पूर्ण कैसा' दिखता है, तो इससे उनकी समझ बेहतर हो सकती है और उनकी मान्यताएँ या धारणाएँ (Assumptions) भी बदल सकती हैं।

इसके साथ दी गई वर्कशीट इसी विचार को दर्शाती है तथा आपको अभ्यास करने और सोचने-विचारने के लिए कई उदाहरण देती है।

कंचना सूर्यकुमार एक स्वतंत्र गणित शिक्षिका हैं, उनके पास हाई स्कूल गणित पढ़ाने का 10 वर्षों से अधिक का अनुभव है। वर्तमान में उनकी रुचि शिक्षकों के प्रशिक्षण में है। वे गणित के शिक्षकों के साथ मिलकर काम करती हैं ताकि कक्षा में शिक्षण को अधिक अर्थपूर्ण और उपयोगी बनाया जा सके। शिक्षण कार्य से पहले, कंचना ने सॉफ्टवेयर उद्योग में 10 वर्षों से अधिक प्रोग्रामर और प्रोडक्ट मैनेजर के पद पर भी काम किया है। उन्होंने बिट्स पिलानी से इंजीनियरिंग और विज्ञान की डिग्री तथा TISS मुम्बई से शिक्षा की डिग्री प्राप्त की है।

अनुवाद : रोशन ख़ान **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

'भिन्नों को चित्रों से समझने की पेचीदा सच्चाई' लेख पर आधारित वर्कशीट

क्षमा चक्रवर्ती

भिन्न पर दिए गए लेख से जुड़ी एक वर्कशीट यहाँ दी जा रही है। इस वर्कशीट का उपयोग शिक्षक अपने विद्यार्थियों की भिन्न की समझ को जाँचने के लिए कर सकते हैं। इसका इस्तेमाल कक्षा-4 से 7 तक के विद्यार्थियों की समझ का आकलन करने के लिए आवश्यकतानुसार किया जा सकता है। इस वर्कशीट को हल करने से पहले विद्यार्थियों को पूर्ण (Whole) की अवधारणा स्पष्ट रूप से समझाना आवश्यक है, साथ ही यह भी कि चुने गए पूर्ण के आधार पर भिन्न का मान कैसे बदलता है। यदि यह बात पहले समझा दी जाए, तो विद्यार्थी प्रश्नों को देखकर घबराएँगे नहीं और उन्हें आत्मविश्वास के साथ हल कर पाएँगे।

1. अपने हिसाब से 'पूर्ण' आकृति बनाएँ और उसका $\frac{1}{4}$ हिस्सा छायांकित करें।

2. इस तरह 'पूर्ण' बनाएँ कि -

(क) पूर्ण का $\frac{1}{3}$ भाग हो

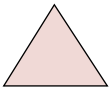
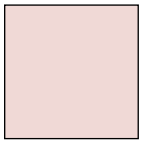
(ख) पूर्ण का $\frac{1}{8}$ भाग हो

(ग) पूर्ण का $\frac{1}{4}$ भाग हो

(घ) पूर्ण का $\frac{1}{10}$ भाग हो

चित्र-1

3. निम्नलिखित कथनों को ध्यान से पढ़ें -

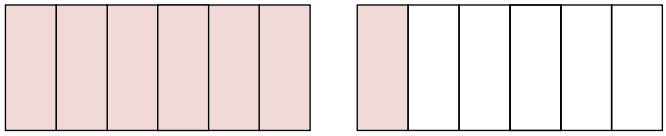
(क) यह  इस  का $\frac{1}{4}$ है।

(ख) यह इस का $\frac{1}{2}$ है।

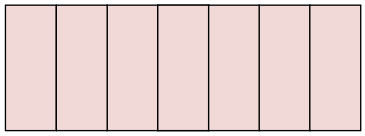
चित्र-2

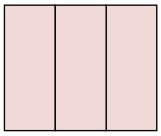
क्या इससे यह पता चलता है कि $\frac{1}{2}$ से $\frac{1}{4}$ बड़ा है? अपने उत्तर को समझाएँ/ कारण बताएँ।

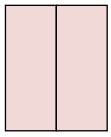
4. चित्र-3 में दिखाया गया छायांकित भाग एक पूर्ण का $\frac{7}{6}$ भाग दर्शाता है; चित्र-4 में दिए गए विकल्पों में से उस पूर्ण को चुनें -

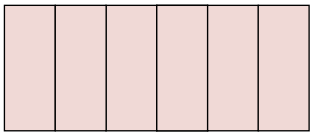


चित्र-3

(क) 

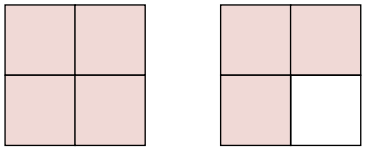
(ख) 

(ग) 

(घ) 

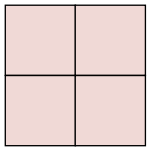
चित्र-4

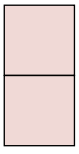
5. चित्र-5 को देखें और इस चित्र के आधार पर नीचे दिए गए प्रश्नों के उत्तर दें -

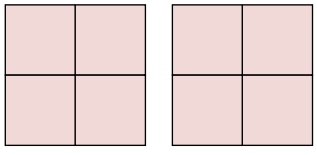


चित्र-5

(क) यदि **चित्र-5** में दिखाया गया छायांकित भाग एक पूर्ण का $\frac{7}{2}$ भाग दर्शाता है, तो **चित्र-6** में दिए गए विकल्पों में से सही पूर्ण चुनें -

(i) 

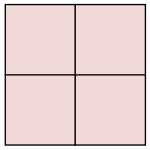
(ii) 

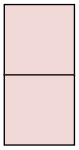
(iii) 

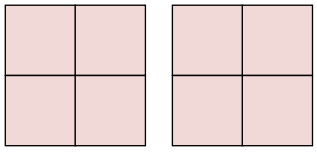
(iv)

चित्र-6

(ख) यदि **चित्र-5** में छायांकित भाग एक पूर्ण का $\frac{7}{8}$ भाग दर्शाता है, तो **चित्र-7** में दिए गए विकल्पों में से सही पूर्ण चुनें -

(i) 

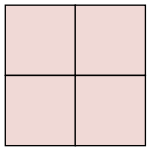
(ii) 

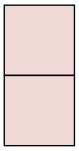
(iii) 

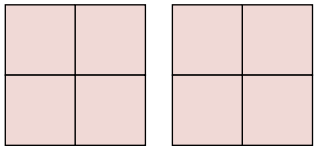
(iv)

चित्र-7

(ग) यदि **चित्र-5** में छायांकित भाग पूर्ण का $\frac{7}{4}$ भाग दर्शाता है, तो **चित्र-8** में दिए गए विकल्पों में से सही पूर्ण चुनें -

(i) 

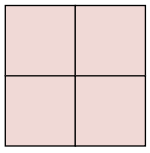
(ii) 

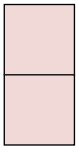
(iii) 

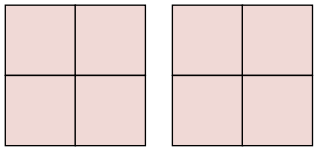
(iv)

चित्र-8

(घ) यदि **चित्र-5** में छायांकित भाग पूर्ण का 7 भाग दर्शाता है, तो **चित्र-9** में दिए गए विकल्पों में से सही पूर्ण चुनें -

(i) 

(ii) 

(iii) 

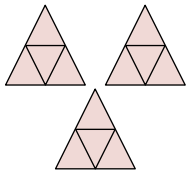
(iv)

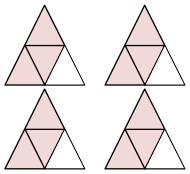
चित्र-9

6. यदि **एक पूर्ण है, तो दिए गए विकल्पों में से कौन-सा विकल्प $\frac{3}{4}$ को दर्शाता है?**

(क)

(ख)

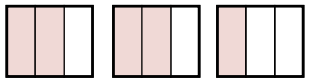
(ग) 

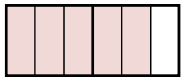
(घ) 

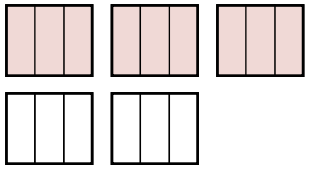
चित्र-10

7. यदि **एक पूर्ण है, तो दिए गए विकल्पों में से कौन-सा विकल्प $\frac{5}{3}$ को दर्शाता है? नोट : सभी सही विकल्पों पर टिक (✓) लगाएँ।**

(क)

(ख) 

(ग) 

(घ) 

चित्र-11

वर्कशीट में दिए गए प्रश्नों का क्या उद्देश्य है, यह यहाँ बताया गया है-

प्रश्न-1 : यह गतिविधि विद्यार्थियों को रचनात्मक बनने और अपनी पसन्द के पूर्ण बनाने का अवसर देती है। साथ ही वे यह समझ पाते हैं कि नियमित आकृतियों को बराबर हिस्सों में बाँटना आसान होता है, जबकि अनियमित आकृतियों में यह कठिन होता है।

प्रश्न-2 : यह प्रश्न विद्यार्थियों की भिन्नों की समझ को जाँचता है और साथ ही यह भी समझने में मदद करता है कि पूर्ण का आकार अलग-अलग हो सकता है, भले ही उन्हें दर्शाने वाली भिन्न एक समान हों। उदाहरण के तौर पर, (क) में पूर्ण 3 वर्गों की ऊर्ध्वाधर कतार या क्षैतिज कतार या L-आकार का भी हो सकता है।

प्रश्न-3 : इस प्रश्न के ज़रिए पूर्ण का महत्त्व बहुत अच्छे से उभरकर सामने आता है। आमतौर पर जब हम दो भिन्नों की तुलना करते हैं, तो मान लेते हैं कि वे एक ही पूर्ण से सम्बन्धित हैं। लेकिन जब कोई अलग या विपरीत स्थिति सामने रखी जाती है, तो वह सोचने पर मजबूर करती है कि ऐसा कब सम्भव है। यहाँ चित्र विद्यार्थियों को सही उत्तर तक पहुँचने में मदद करता है। यदि तुलना किए जा रहे पूर्ण अलग-अलग हों, तो भिन्न का मान भी बदल जाता है।

प्रश्न-4 : सामान्यतः प्रश्नों में पूर्ण दिया होता है और छायांकित भाग को भिन्न में दर्शाने के लिए कहा जाता है। यहाँ थोड़ा बदलाव है, भिन्न दी गई है और विद्यार्थी को पूर्ण पहचानना है। भिन्नों की अच्छी समझ होने पर विद्यार्थी उल्टी प्रक्रिया करके सही उत्तर तक पहुँच सकते हैं।

प्रश्न-5 : जब हर बार पूर्ण अलग-अलग होता है तब यह प्रश्न भिन्नों की समझ को अच्छी तरह परखता है। आकृति वही है, छायांकित भाग भी वही, लेकिन हर बार पूर्ण बदलने पर छायांकित भाग को दर्शाने वाली भिन्न भी बदल जाती है।

प्रश्न-6 : यह एक मानक/नियमित प्रश्न है, जिसमें पूर्ण को स्पष्ट रूप से दिया गया है, ताकि किसी तरह की ग़लतफ़हमी न रहे।

प्रश्न-7 : यह प्रश्न थोड़ा अधिक चुनौतीपूर्ण है, क्योंकि इसमें विषम भिन्न (Improper fraction) की पहचान करनी है। यदि विद्यार्थी को उत्तर के बारे में पक्का पता न हो, तो दिए गए विकल्प उसे भ्रमित कर सकते हैं। इसमें विद्यार्थी को पहले पूर्ण का एक-तिहाई समझना होता है और फिर उसके आधार पर पाँच-तिहाई को पहचानना होता है।

क्षमा चक्रवर्ती एजुकेटर हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में स्नातकोत्तर की उपाधि और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर की उपाधि हासिल की है। गणित शिक्षा के क्षेत्र में उन्हें 15 से अधिक वर्षों का अनुभव है। साथ ही, उन्होंने विषय-वस्तु निर्माण, शिक्षण, शिक्षक-प्रशिक्षण, विद्यार्थियों के साक्षात्कार लेने और आकलन करने जैसे क्षेत्रों में काम किया है। नन्हें बच्चों के साथ समय बिताना और क़ुदरत का आनन्द लेना उन्हें बेहद पसन्द है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रोशन ख़ान **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

समय की सुई को घुमाना : आधे-चौथाई घण्टे के साथ कक्षा की यात्रा

गरिमा भट्ट

यह लेख गरिमा भट्ट द्वारा लिखा गया है। उन्होंने एट राइट एंगल्स के मार्च, 2017 के अंक के 'समय का शिक्षण' पुलआउट में घड़ियों के कुछ मॉडल देखे थे।

बेंगलूरु में एक कार्यशाला के दौरान मुझे एक सरल, लेकिन बेहद सूझबूझ भरी शिक्षण अधिगम सामग्री (TLM) देखने को मिली – एक *घड़ी* । मैं एकदम उस पर मोहित हो गई। यह विचार इतना बुद्धिमत्तापूर्ण और सीधा-सरल था कि मेरे मन में आया, "हमें यह क्यों नहीं सूझा?" मैंने तभी तय कर लिया कि मुझे यह विचार अपनी कक्षा में भी लेकर जाना है ताकि तीसरी से पाँचवीं कक्षा के मेरे विद्यार्थी समय को केवल *पढ़ना* नहीं, बल्कि वास्तव में *देखना* भी सीखें।

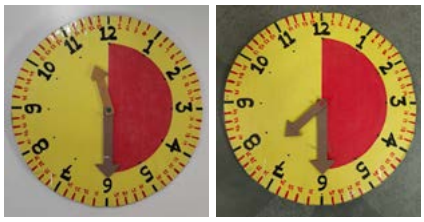
भले ही डिजिटल डिस्प्ले से विद्यार्थी समय पढ़ लेते हों, लेकिन फिर भी एनालॉग घड़ी को पढ़ना (देखना) आना बेहद महत्त्वपूर्ण है। मैंने ऐसे कई उदाहरण देखे हैं जहाँ विद्यार्थी डिजिटल डिस्प्ले वाले फ़ोन पर समय पढ़ लेते हैं, लेकिन विद्यालय की एनालॉग घड़ी देखकर पूरी तरह चकरा जाते हैं। मुझे एहसास हुआ कि इससे उनकी समय की समझ, योजना बनाने की क्षमता और दिनचर्या पर असर पड़ा है। एनालॉग घड़ियाँ बहुत महत्त्वपूर्ण होती हैं क्योंकि वे विद्यार्थियों को **भिन्न, बीता हुआ समय, कोण और संख्या पैटर्न** को व्यावहारिक और दृश्यात्मक रूप से समझने में मदद करती हैं। चूँकि विद्यालय, परीक्षा कक्ष और सार्वजनिक स्थानों पर अभी भी एनालॉग घड़ियों का उपयोग किया जाता है, अत: उन्हें पढ़ने में दक्ष होना रोज़मर्रा के जीवन के लिए ज़रूरी कौशल है। इसीलिए मेरा ज़ोर एनालॉग घड़ी पढ़ने के कौशल को पुख़्ता करने पर था।

मूल टीएलएम घड़ियों (**चित्र-1** में दर्शाई गई) से प्रेरित होकर, मैंने कुछ बदलाव के साथ अपना ख़ुद का एक संस्करण तैयार किया।

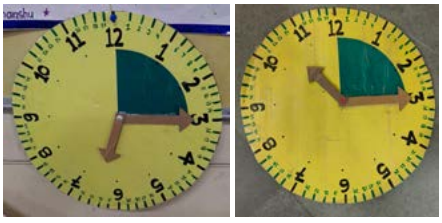
चित्र-1

- मैंने इन्हें चमकीले रंगों से रंगा ताकि ये दिखने में आकर्षक लगें। मैंने चौथाई (पौने व सवा) घण्टे की घड़ियों के लिए हरा रंग और आधे (साढ़े) घण्टे की घड़ियों के लिए लाल रंग चुना। साथ ही मैंने घड़ी में हरेक मिनट को साफ़-साफ़ चिह्नित किया ताकि उन विद्यार्थियों को मदद मिल सके जिन्हें यह याद रखने में कठिनाई होती है कि प्रत्येक संख्या कितने मिनटों को दर्शाती है।
- मैंने तीन अलग-अलग घड़ियाँ बनाईं : एक घड़ी आधा घण्टा बीत जाने (जैसे साढ़े ग्यारह) को दिखाने वाली (**चित्र-2**), एक चौथाई घण्टा बीत जाने (जैसे सवा छह) को दिखाने वाली (**चित्र-3**) और एक पौना घण्टा बीत जाने (जैसे पौने चार) को दिखाने वाली (**चित्र-4**)। इन घड़ियों में मिनट की सुई स्थिर थी, लेकिन घण्टे की सुई पूरी तरह घूम सकती थी। 'साढ़े', 'सवा' और 'पौने' की अवधारणाएँ काग़ज़ पर अमूर्त लगती हैं, लेकिन इस साधन ने उन्हें मूर्त रूप दे दिया।

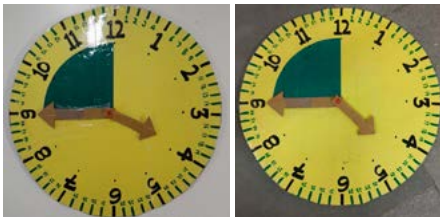
की-वर्ड : *समय, अन्तराल, घड़ियाँ, एनालॉग, भिन्न, कोण, संख्या पैटर्न, शिक्षण अधिगम सामग्री*



चित्र-2



चित्र-3



चित्र-4

- लम्बे समय तक बार-बार उपयोग किए जा सकने के उद्देश्य से मैंने इन घड़ियों को लेमिनेट कर दिया।

कक्षा की शुरुआत यह जानने से हुई कि विद्यार्थी पहले से क्या जानते हैं। विद्यार्थी घड़ी में घण्टे और मिनट की सुई को पहचानते थे, और आसान समय, जैसे 5:20 और 5:30 को पढ़ भी सकते थे। उन्होंने इसे मौखिक और लिखित, दोनों तरह का अभ्यास करके सीखा था। ऐसे ही एक अभ्यास के दौरान एक विद्यार्थी ने हिन्दी में समय बताया : "1:30 को डेढ़ और 5:15 को सवा पाँच।'' और कहा,'' मेरी माँ घर में ऐसे ही समय बताती हैं।" मैंने विद्यार्थियों की पहले की जानकारी को नई सीख से जोड़ते हुए समझाया कि अँग्रेज़ी में इन्हें क्रमशः 'हॉफ़ पास्ट' और 'क्वार्टर पास्ट' कहते हैं। चूँकि विद्यार्थी भिन्नों से परिचित थे, इसलिए यह समझाना आसान था कि 15 मिनट एक घण्टे का एक-चौथाई होता है और 30 मिनट आधा घण्टा होता है।

जैसे ही मैंने घड़ियों को कक्षा में दिखाया, विद्यार्थियों में कौतूहल भर गया। उन्होंने सबसे पहले जिस बात पर ग़ौर किया, वह था कि इनकी बड़ी सुई अपनी जगह पर चिपकी हुई है। "मैम, यह मिनट की सुई स्थिर क्यों है?" मैं कोई जवाब देती, उससे पहले ही एक विद्यार्थी ने कहा, "ताकि हम घण्टे की सुई पर ध्यान केन्द्रित कर सकें।" एक अन्य विद्यार्थी ने ग़ौर किया, "वाह, यह तो कमाल है! अब हम सभी साढ़े वाले घण्टे (half pasts) को साफ़-साफ़ देख सकते हैं।" अनायास ही, उपयोग की जाने वाली भाषा सार्थक और विचारों से भरी-पूरी हो गई।

जब विद्यार्थी इसे और जानने-समझने लगे, एक जिज्ञासु विद्यार्थी ने पूछा, "मैम, क्या घण्टे वाली सुई संख्या से थोड़ा आगे जाती है, या उसे ठीक उस पर ही रुकना होता है?" मैंने समझाया कि घण्टे वाली सुई हमेशा ठीक किसी संख्या पर नहीं रहती – वह कहाँ होगी, यह इस बात पर निर्भर करता है कि हम कौन-सा समय दिखा रहे हैं। उदाहरण के लिए,

- डेढ़ बजे (1:30) घण्टे की सुई 1 और 2 के ठीक बीच में होती है।
- सवा दो बजे (2:15) घण्टे की सुई 2 से थोड़ा आगे होती है, यानी 2 के ज़्यादा पास और 3 से थोड़ी दूर होती है।
- पौने पाँच बजे (4:45) घण्टे की सुई 5 से थोड़ा पहले होती है, यानी 5 के ज़्यादा पास और 4 से थोड़ी दूर होती है।

फिर विद्यार्थियों ने घण्टे की सुई को ठीक उस जगह पर रखना शुरू किया जहाँ उसे होना चाहिए। सुई के संख्याओं से आगे-पीछे होने के इस अन्तर ने विद्यार्थियों को, समय धीरे-धीरे किस क्रम से बीतता है, इसकी कल्पना करने और हर बार घण्टे की सुई की स्थिति ठीक किस जगह होगी उसे समझने में भी सहायता की।

यह सभी गतिविधियाँ कक्षा-4 में हुईं। चूँकि कक्षा में 28 विद्यार्थी थे, इसलिए मैंने ऐसे समूह बनाए कि प्रत्येक समूह में चार विद्यार्थी हों। प्रत्येक समूह को तीन घड़ियों – साढ़े वाली, सवा वाली और पौने वाली – में से एक घड़ी दी गई। प्रत्येक समूह यह पता लगाने में जुट गया कि किसी भी घण्टे को दर्शाने के लिए घण्टे की सुई को ठीक कहाँ रखा जाए। मैंने सुनिश्चित किया कि प्रत्येक समूह को तीनों तरह की घड़ियों के साथ काम करने का अवसर मिले। उन्होंने साढ़े को दर्शाने के लिए ठीक दो संख्याओं के बीच में, सवा और पौने को दर्शाने के लिए सम्बन्धित संख्या के पास सुई को रखने के प्रयोग किए। विद्यार्थियों ने बार-बार घड़ी की सुई को घुमाया, अपने अवलोकनों की तुलना पहले से ज्ञात हिन्दी के शब्दों से की, और समय पढ़ने की अँग्रेज़ी शब्दावलियों के पीछे के तर्क को ख़ुद से तलाशा। विद्यार्थियों ने बड़ी उत्सुकता से समय का अनुमान लगाया, घण्टे की सुई को अलग-अलग स्थिति पर लेकर गए और अपने समूह में इस बारे में चर्चा की : "यदि घण्टे की सुई आगे बढ़ती है तो हम घण्टे से ठीक कितना आगे बढ़ चुके हैं, यह बताती है!" कुछ

ने पूछा कि क्या वे मिनट की सुई को 8, 2 और 12 पर स्थिर रखकर क्रमशः 2:40, 6:10 या 11 बजे जैसे समय दिखाने वाली घड़ियाँ बनाने की कोशिश करें। वे नियम याद नहीं कर रहे थे – वे तर्क कर रहे थे, प्रयोग कर रहे थे और खोजकर सीख रहे थे।

इस अनुभव पर विचार करते हुए मुझे एहसास हुआ कि इस शिक्षण अधिगम सामग्री ने न केवल समय से सम्बन्धित शब्दावलियों को पुख़्ता किया, बल्कि अवधारणाओं को जीवन्त भी बनाए रखा, क्योंकि इस विषय से आगे बढ़ जाने के बाद भी मैं इसे समय–समय पर करवाती रही। कभी कोई छोटा-सा सवाल या कभी कोई एक मिनट का खेल विद्यार्थियों को साढ़े, सवा या पौने की याद दिलाता रहा। यह विद्यार्थियों को इसलिए भी याद रहा क्योंकि उन्होंने इस साधन को बार-बार और मज़े से इस्तेमाल किया था। यहाँ तक कि शर्मीले विद्यार्थियों ने भी इस हैंडस-ऑन और क्रियाशील गतिविधि से प्रेरित होकर गर्मजोशी से इसमें भाग लिया।

इस सरल, रंगीन समय दर्शाने वाली पुलआउट घड़ी ने अमूर्त अवधारणाओं को देखने और छूने योग्य मूर्त अनुभवों में बदल दिया। इसने विद्यार्थियों को अपने सीखने की ज़िम्मेदारी लेने, बिना किसी की सहायता के समझने, और घण्टे की भिन्न के सम्बन्ध में घण्टे की सुई के मद्धिम चाल से चलने को समझने में सक्षम बनाया। मेरे लिए इसने एक महत्त्वपूर्ण सबक को पुख़्ता किया : सोच-समझकर तैयार की गई शिक्षण अधिगम सामग्री कठिन अवधारणाओं को आनन्दमय खोजों में बदल सकती है, और कक्षा को ऐसी जगह बना सकती है जहाँ विद्यार्थी वास्तव में सीखने का अनुभव करें।

सम्पादकीय टीप :

1. शिक्षक (i) 'साढ़े', (ii) 'सवा', (iii) 'पौने' से सम्बन्धित भिन्न बना सकते हैं। हिन्दी और कुछ अन्य भारतीय भाषाओं में यह 3 शब्द निम्न को दर्शाते हैं :
   - हाफ़ पास्ट या हाफ़ मोर देन – उदाहरण के लिए, साढ़े चार = 4½ या हाफ़ पास्ट 4 यानी 4:30।
   - क्वार्टर पास्ट या क्वार्टर मोर देन – उदाहरण के लिए, सवा सात = 7¼ या क्वार्टर पास्ट 7 यानी 7:15।
   - क्वार्टर टू या क्वार्टर लेस देन – उदाहरण के लिए, पौने आठ = 8 – ¼ = 7¾ या क्वार्टर टू 8 यानी 7:45।
2. हम 'हाफ़ पास्ट (साढ़े)' कहते हैं, 'क्वार्टर पास्ट (सवा)' कहते हैं, लेकिन 'क्वार्टर टू (पौने)' क्यों कहते हैं? यह सवाल बिहार के पोखरामा के प्राथमिक विद्यालय के कुछ विद्यार्थियों ने पूछा। हाफ़ पास्ट (साढ़े) या क्वार्टर पास्ट (सवा) यह दर्शाता है कि जो पहले से ही है उसमें हम और जोड़ रहे हैं। जबकि 'क्वार्टर टू (पौने)' यह दर्शाता है कि हम किसी संख्या तक पहुँचने से चौथाई इकाई दूर हैं। उदाहरण के लिए, 'क्वार्टर टू 8 (पौने आठ)' का मतलब है एक घण्टे से चौथाई दूर, यानी 8 बजने में 15 मिनट कम, यानी 7:45। वाक्यांश 'क्वार्टर टू 8' वाक्यांश 'थ्री क्वार्टर पास्ट 7' यानी 7:45 के बराबर है। लेकिन यह एक लम्बा वाक्यांश है। इसलिए हम पहले वाले वाक्य का इस्तेमाल करने लगे। इसी तरह, 'क्वार्टर पास्ट 6', 'थ्री क्वार्टर टू 7' या 6:15 के समान होता है।
3. पाठकों के लिए एक सवाल : क्या आपको 'समय का शिक्षण' पुलआउट (**चित्र-5**) में दिखाए गए 'क्वार्टर टू' वाली घड़ी और गरिमा के **चित्र-4** में दिए गए संस्करण के बीच अन्तर नज़र आया? आपको कौन-सी टीएलएम घड़ी बेहतर लगी और क्यों? कृपया हमें AtRightAngles.editors@apu.edu.in पर बताएँ।

चित्र-5

गरिमा भट्ट दिसम्बर, 2022 से अज़ीम प्रेमजी स्कूल, ऊधम सिंह नगर में बतौर शिक्षिका कार्यरत हैं। उन्होंने एसएसजे यूनिवर्सिटी, अल्मोड़ा से भौतिकी में एमएससी, बीएड किया है।

गरिमा वर्तमान में गणित को छोटे विद्यार्थियों के लिए मनोरंजक, आकर्षक और सार्थक बनाए जाने के दृढ़ विश्वास के साथ प्राथमिक कक्षाओं में गणित शिक्षा पर काम कर रही हैं। उन्हें किसी कक्षा का ऐसा वातावरण बनाने में आनन्द आता है जहाँ विद्यार्थी हैंडस-ऑन गतिविधियों, खेलों और वास्तविक जीवन से जुड़े उदाहरणों के माध्यम से गणितीय अवधारणाओं की पड़ताल कर सकें ताकि उनमें आत्मविश्वास और जिज्ञासा विकसित हो सके। गरिमा से garima.bhatt@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल

कुछ हटकर सोचना

स्वाती सरकार

मोनिका कक्षा-5 के विद्यार्थियों को 'घनाभ का नेट' पढ़ा रही थीं। पढ़ाने के बाद जब इन सत्रों के बारे में प्रतिक्रियाएँ ली गईं और इन पर चर्चा की गई तब गणित के एक शिक्षक ने इन सत्रों के दौरान उत्पन्न हुई दो ग़लत धारणाओं की ओर ध्यान दिलाया। पढ़ाने के लिए मोनिका ने जिस घनाभ का चयन किया था, उसमें दो वर्गाकार फलक थे। कुछ विद्यार्थियों में यह ग़लत धारणा बन गई थी कि घनाभ के नेट में वर्गाकार फलकों का कम-से-कम एक जोड़ा होना ज़रूरी है। नीचे दी गई वर्कशीट इसी ग़लत धारणा को दूर करने के लिए बनाई गई है।

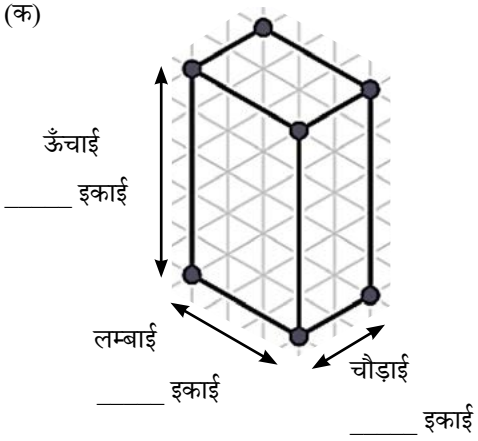
कक्षा-3 की एनसीईआरटी की नई पाठयपुस्तक में घन और घनाभ अध्याय-2 में पढ़ाए जाते हैं और विद्यार्थियों से अपेक्षा की जाती है कि वे अनेक एक जैसे घनों को मिलाकर अलग-अलग ठोस आकृतियाँ बनाएँ। इसके साथ ही, किनारे और कोने भी पढ़ाए जाते हैं। वर्ग और आयत का परिचय अध्याय-5 में कराया गया है। कक्षा-4 की पाठ्यपुस्तक के अध्याय-1 में घन और घनाभ सहित विभिन्न ठोस आकृतियों के नेट पर चर्चा की गई है, साथ ही विद्यार्थियों को यह भी जानने को मिलता है कि एक बहुफलक (polyhedron) का नेट उसके फलकों (faces) से बनता है। विद्यार्थी त्रिकोणीय डॉट पेपर का उपयोग करके घन और घनाभ के रेखाचित्र बनाते हैं। अध्याय-2 में, वे परिप्रेक्ष्य दृश्य (perspective view) को समझते हैं। इसलिए इस वर्कशीट का उपयोग कक्षा-4 या कक्षा-5 में किया जा सकता है।

की-वर्ड : *घनाभ, घन, फलक, किनारे, नेट, आयाम*

नाम _____

1. नीचे दिए गए घनाभों के आयाम ज्ञात करने के लिए ग्रिड का उपयोग करें।

(क)



क. यह घनाभ -

_____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई का है।

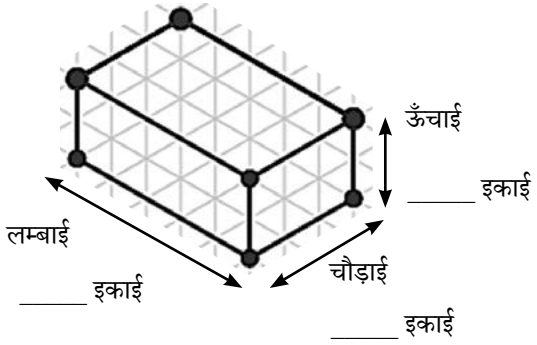
अतः इसके फलक हैं -

(i) _____ इकाई × _____ इकाई

(ii) _____ इकाई × _____ इकाई

(iii) _____ इकाई ×_____ इकाई

(ख)



ख. यह घनाभ -

_____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई का है।

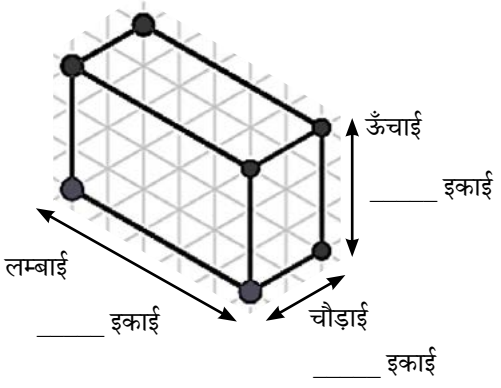
अतः इसके फलक हैं -

(i) _____ इकाई × _____ इकाई

(ii) _____ इकाई × _____ इकाई

(iii) _____ इकाई ×_____ इकाई

(ग)



ग. यह घनाभ -

_____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई का है।

अतः इसके फलक हैं -

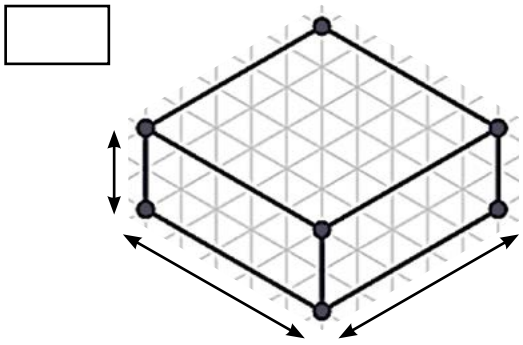
(i) _____ इकाई × _____ इकाई

(ii) _____ इकाई × _____ इकाई

(iii) _____ इकाई ×_____ इकाई

क्या यह सभी घनाभ एकसमान हैं या अलग-अलग? अपने उत्तर के कारण भी दें।

2. अब इन घनाभों के आयाम (लम्बाई, चौड़ाई, ऊँचाई) ज्ञात करें। यदि किसी घनाभ के फलक वर्गाकार हों तो ऊपर बाईं ओर दिए गए बॉक्स में ऐसे वर्गाकार फलकों की संख्या लिखें।

(क) 

क. यह घनाभ -

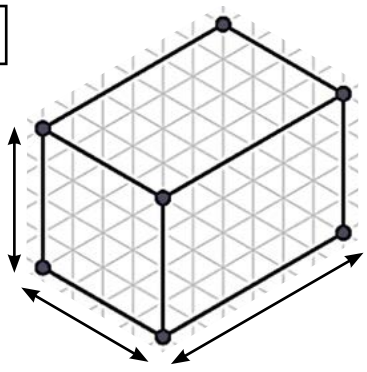
_____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई का है।

अतः इसके फलक हैं -

(i) _____ इकाई × _____ इकाई

(ii) _____ इकाई × _____ इकाई

(iii) _____ इकाई ×_____ इकाई

(ख) 

ख. यह घनाभ -

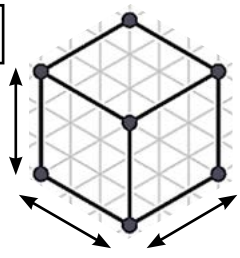
_____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई का है।

अतः इसके फलक हैं -

(i) _____ इकाई × _____ इकाई

(ii) _____ इकाई × _____ इकाई

(iii) _____ इकाई ×_____ इकाई

(ग) 

ग. यह घनाभ -

_____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई का है।

अतः इसके फलक हैं -

(i) _____ इकाई × _____ इकाई

(ii) _____ इकाई × _____ इकाई

(iii) _____ इकाई ×_____ इकाई

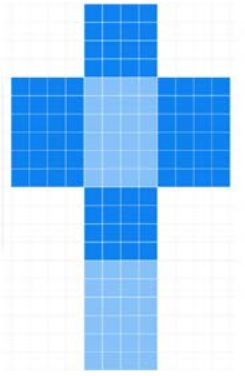
3. सही उत्तर चुनें : एक घनाभ में वर्गाकार फलकों की संख्या हो सकती है :

(क) 2, 4 या 6 (ख) 0, 3 या 6 (ग) 0, 2 या 6 (घ) 0, 2, 4 या 6

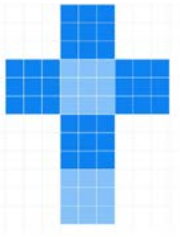
4. यदि किसी घनाभ में कम-से-कम एक जोड़ी फलक वर्गाकार हों तो बाक़ी फलकों में आपको क्या ख़ास या अलग नज़र आता है?

5. क्या आप नीचे दिए गए नेटों का मिलान प्रश्न-2 में दिए गए घनाभों से कर सकते हैं?

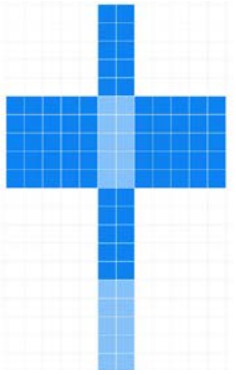
संकेत : प्रत्येक घनाभ की लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई ज्ञात करें।



_____



_____



_____

6. नीचे दिए गए ग्रिड में, प्रश्न-1 में दिए गए किसी भी घनाभ का नेट बनाएँ।

7. कोई भी तीन संख्याएँ चुनें (प्रत्येक 10 से छोटी हो)। _____, _____, _____,

क. अब इन आयामों वाला एक घनाभ लें, अर्थात _____ इकाई × _____ इकाई × _____ इकाई।

ख. घनाभ का एक मोटा-मोटा रेखाचित्र बनाएँ और उसके आयाम अंकित करें।

ग. इस घनाभ का नेट बनाएँ।

यह वर्कशीट उन ग़लत धारणाओं से प्रेरित होकर तैयार की गई है जो इंटर्नशिप के दौरान मोनिका महलदार द्वारा अज़ीम प्रेमजी स्कूल, धमतरी में पढ़ाते समय सामने आई थीं। मोनिका अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु में बीएससी-बीएड (गणित) के चौथे वर्ष की छात्रा हैं।

शिक्षक ऐसी ग़लत धारणाओं की पहचान करने के लिए प्रत्येक विद्यार्थियों से हर रोज़ कम-से-कम दो ऐसी चीज़ों की सूची बनाने के लिए कह सकते हैं जो घनाभ हों, लेकिन उनके कोई भी फलक वर्गाकार न हों (जैसे पेंसिल बॉक्स, फ़ोन, टीवी रिमोट, किताबें, आदि)।

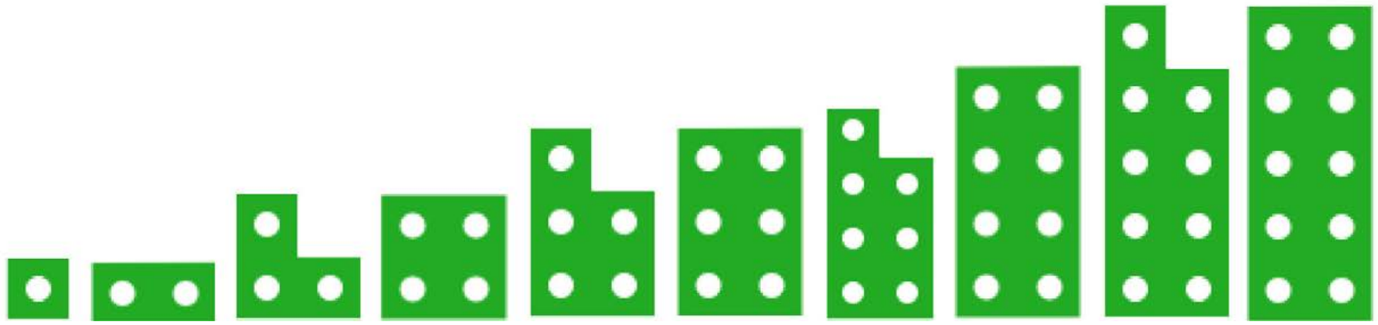
अलग-अलग घनाभों के आयामों का अध्ययन करने से और उन्हें अलग-अलग दृष्टिकोण से देखने से, विद्यार्थी यह समझ जाते हैं कि एक घनाभ में वर्गाकार फलक हो भी सकते हैं और नहीं भी। शिक्षक प्रश्न-2 की शुरुआत विद्यार्थियों से यह पूछकर कर सकते हैं कि क्या दी गई सभी ठोस आकृतियाँ घनाभ हैं। ये प्रश्न उन्हें इस बात पर विचार करने में मदद करते हैं कि घनाभ में वर्गाकार फलकों की सम्भावित संख्या कितनी हो सकती है। उन्हें यह भी जानकारी प्राप्त हो सकती है कि यदि फलकों की एक जोड़ी वर्गाकार है तो बाक़ी फलकों पर क्या प्रभाव पड़ेगा। वे घनाभ से उसके नेट की ओर तथा फिर नेट से घनाभ की ओर बढ़ते हैं। इस प्रकार के अध्ययन से, एक मूल ग़लत धारणा विचारशील शिक्षक और जिज्ञासु विद्यार्थी, दोनों के लिए गहराई से जानने-समझने का अवसर प्रदान करती है।

एक दूसरी ग़लत धारणा जो सामने आई, उसका ज़िक्र करना यहाँ ज़रूरी भी है, हालाँकि इस लेख में उस पर विमर्श नहीं किया गया है। कभी-कभी हम ऐसी सामग्री से बनी वर्गाकार आकृतियों का उपयोग करते हैं जो मोटी होती हैं, जैसे 4 मिमी मोटी एथिल विनाइल एसीटेट (ईवीए), या कभी हम लकड़ी से बनी ऐसी वर्गाकार आकृतियों का उपयोग करते हैं जिनकी मोटाई नापी जा सकती है। विद्यार्थियों के लिए, ये आकृतियाँ द्विआयामी नहीं, बल्कि त्रिआयामी होती हैं, और वे इन सामग्रियों के साथ किस प्रकार जुड़ते हैं या किस प्रकार उपयोग करते हैं, इसमें यह नज़र आता है। वे बड़ों द्वारा सोचे गए उपयोग से हटकर अलग तरह से इनका इस्तेमाल करने लगते हैं। इसलिए वर्गाकार, आयत और अन्य द्विआयामी आकृतियों के लिए कार्डबोर्ड जैसी पतली, बहुत कम मोटाई वाली सामग्री का उपयोग करना बेहतर है।

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में सलाहकार के रूप में सेवाएँ प्रदान करती हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (उनका पहला प्यार चित्रकला है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से सांख्यिकी में स्नातक और स्नातकोत्तर उपाधि तथा वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सीएटल से गणित में एमएस की उपाधि हासिल की हैं। वे 15 से अधिक सालों से विद्यार्थियों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं, और उनकी हर प्रकार की हैंडस-ऑन गतिविधियों में गहरी रुचि है – ख़ासकर ओरिगामी में। उन्होंने अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के बेंगलूरु परिसर में गणित की प्रयोगशाला 'मैथ स्पेस' की शुरुआत की है। यह प्रयोगशाला विद्यालयों, शिक्षकों, अभिभावकों, विद्यार्थियों, विद्यालयी शिक्षा में कार्यरत ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवाएँ प्रदान करती है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

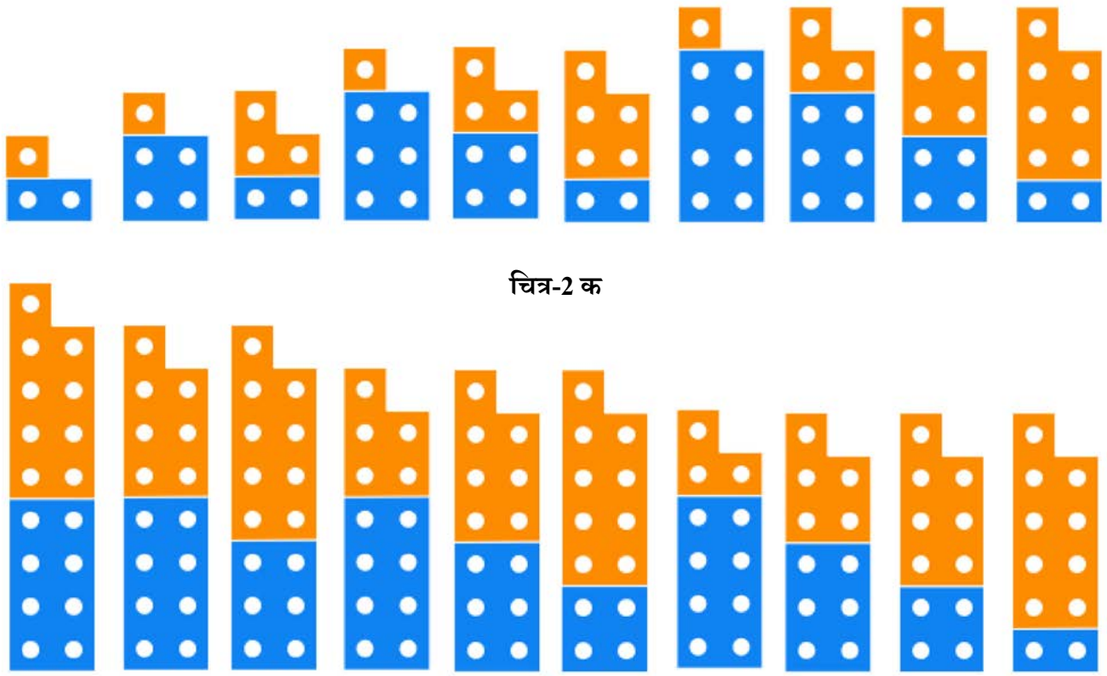
अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल

सम और विषम संख्याओं का योग

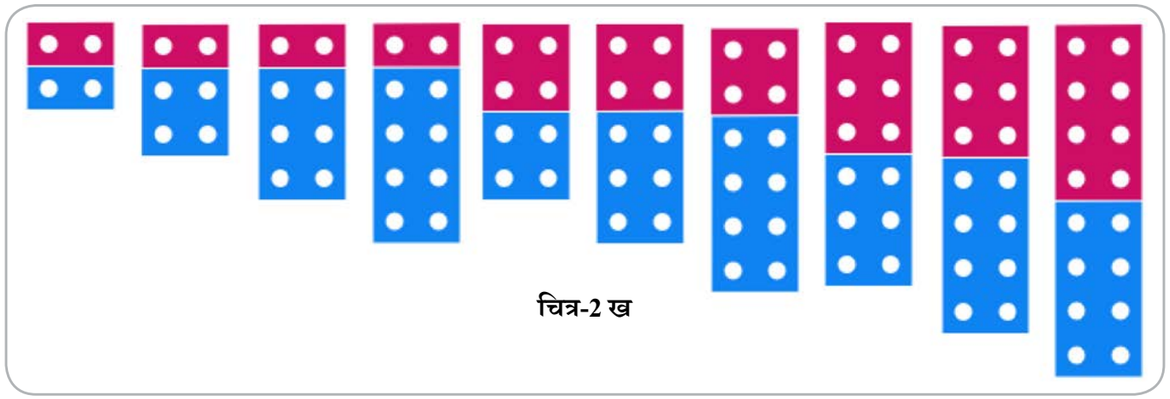


चित्र-1 : ये पहली 10 प्राकृत संख्याएँ हैं, 1, 2, ... 10, जिन्हें 10-फ्रेम कटआउट के रूप में दिखाया गया है। अन्तिम (10) को पूर्ण फ्रेम कहा जाता है। एकान्तर (हर दूसरी) संख्या के शीर्ष पर आपको क्या दिखाई देता है?

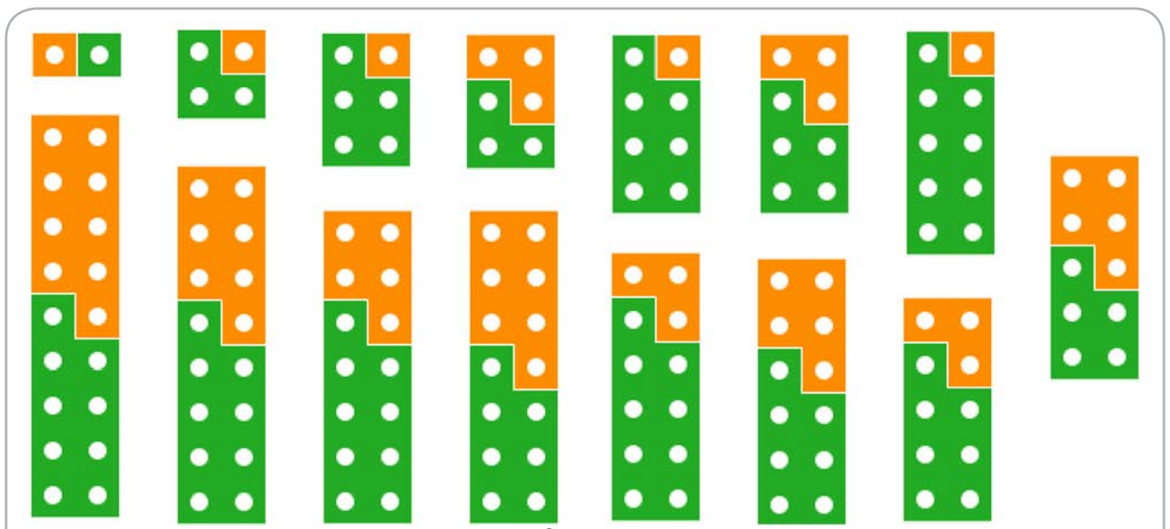
तीन समूहों क, ख और ग के चित्रों में दो अलग रंगों से दर्शाई गई दो संख्याएँ जोड़ी गई हैं।
इन संख्याओं और उनके योग के बारे में आप क्या पैटर्न देखते हैं?



चित्र-2 क



चित्र-2 ख



चित्र-2 ग

यदि आपके पास पर्याप्त 10-फ्रेम हों तो क्या आप 13, 18 या शून्य से बड़ी कोई भी पूर्ण संख्या बना सकते हैं? और कैसे?

क्या 125, 602 या 1234 भी बना सकते हैं?

किसी संख्या का इकाई अंक यह क्यों निर्धारित करता है कि वह विषम है या सम?

शिक्षक नोट्स और सुझाए गए प्रश्न अगले पन्नों पर दिए गए हैं।

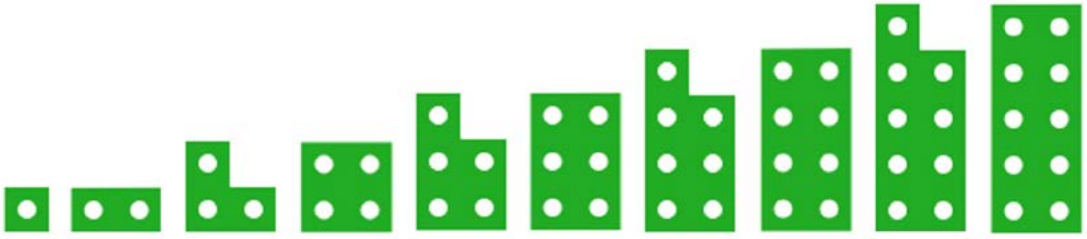
सम और विषम संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए 10-फ्रेम का उपयोग

मैथ स्पेस

10-फ्रेम 2 x 5 के फ्रेम होते हैं जिनका उपयोग पहली 10 प्राकृत संख्याओं 1, 2, 3, … 10 को दर्शाने के लिए किया जा सकता है। इन्हें बनाने के तरीक़े सहित, अन्य विस्तृत जानकारी आप इस लिंक https://bit.ly/4kmFdoh पर देख सकते हैं।

सम और विषम संख्याओं का योग वाला पोस्टर कक्षा में लगाने के लिए बनाया गया है, ताकि विद्यार्थी 10-फ्रेम के ठोस मॉडल से आगे बढ़कर, उसमें से चुनी गई संख्याओं के अलग-अलग संयोजनों (combinations) को समझना सीख सकें। विद्यार्थियों को पैटर्न देखने, पूछे गए सवालों पर सोचने और अपने सहपाठियों के साथ चर्चा करने के लिए पर्याप्त समय दिया जाना चाहिए। यहाँ दिखाए गए जोड़ के सवालों की एक साधारण सूची भी उन्हें यह समझने में मदद करती है कि ऐसे कितने संयोजन सम्भव हैं और क्या ऐसे सभी संयोजन दिखाए गए हैं।

साधारण अवलोकन से सामान्यीकरण की ओर बढ़ना गणित में एक बहुत बड़ा क़दम है और यह पोस्टर इस तरह की समझ बनाने में मदद करता है। आगे दिए गए शिक्षक नोट्स का उद्देश्य शिक्षक को इस सीखने के सफ़र में मदद करना है; और यह ध्यान रखना चाहिए कि केवल उत्तरों पर ध्यान केन्द्रित करने से विद्यार्थी की गणितीय सोच का विकास नहीं होगा। ये सवाल विद्यार्थियों को सोचने की शुरुआत करने में मदद करने के लिए बनाए गए हैं और सहपाठियों के साथ चर्चा विद्यार्थी-नेतृत्व वाली खोज को सम्भव बनाएगी।



चित्र-1

पोस्टर में दिए पहले सवाल, *एकान्तर संख्याओं के शीर्ष पर आपको क्या दिखाई देता है?* के आधार पर पोस्टर ध्यान से देखने पर पता चलता है कि पहली संख्या से शुरू करके प्रत्येक एकान्तर संख्या के शीर्ष पर एक 'विषम' (odd) बिन्दु होता है; जबकि दूसरी, चौथी आदि संख्याओं का शीर्ष सपाट या 'सम' (even) होता है। यह दृश्य-चित्रण (visualisation) विद्यार्थियों को 'संख्या की समता' (parity), यानी, कोई संख्या 'विषम' है या 'सम' और इन शब्दों से जुड़े गणितीय सिद्धान्तों के बीच सम्बन्ध समझने में मदद कर सकता है। ध्यान दें कि यह दृश्य-चित्रण आगे चलकर, किसी सम संख्या को $2n$ के रूप में और किसी विषम संख्या को $2m - 1$ या $2m + 1$ के रूप में दर्शाने के मानक बीजगणितीय तरीक़े को समझने में भी मदद करता है।

तीन समूहों ***क,ख*** *और* ***ग*** *के चित्रों में दो अलग रंगों से दर्शाई गई दो संख्याएँ जोड़ी गई हैं। इन संख्याओं और उनके योग के बारे में आप क्या पैटर्न देखते हैं?* इस दूसरे सवाल के हमारे उत्तर नीचे दिए गए हैं :

समूह **क** में, हमें एक-अंकीय विषम (नारंगी रंग) और एक-अंकीय सम (नीले रंग) संख्याओं के सभी सम्भावित संयोजनों का योग दिखता है।

समूह **ख** में, हमें एक-अंकीय दो सम संख्याओं के सभी सम्भावित संयोजनों का योग दिखता है।

इसी प्रकार समूह **ग** में, हमें एक-अंकीय दो विषम संख्याओं का योग दिखता है।

अंकों के सभी संयोजनों की सूची बनाना और उनके योगों का अवलोकन करना विद्यार्थियों को व्यवस्थित रूप से काम करने में मदद करेगा।

की-वर्ड : *10-फ्रेम, सम-विषम, समता (parity), अवलोकन, अनुमान*

शिक्षकों के लिए नोट्स

यह सवाल पूछे जा सकते हैं :

समूह क में	समूह ख में	समूह ग में
ऊपर वाली संख्या _____ है (क्योंकि _____) और नीचे वाली संख्या _____ है (क्योंकि _____) अतः योग _____ है (क्योंकि _____)	दोनों संख्याएँ _____ हैं (क्योंकि _____) अतः योग _____ है (क्योंकि _____)	दोनों संख्याएँ _____ हैं (क्योंकि _____) परन्तु योग _____ है (क्योंकि _____)

- हर समूह में सबसे छोटा योग क्या है? और सबसे बड़ा योग क्या है?
- प्रत्येक समूह की संख्याओं के योगों में क्या समानता है? क्या हम सामान्यीकरण कर सकते हैं?
  - (i) विषम संख्या + सम संख्या = _____ संख्या
  - (ii) सम संख्या + सम संख्या = _____ संख्या
  - (iii) विषम संख्या + विषम संख्या = _____ संख्या

ये दृश्य-चित्रण, यह समझने में मदद करते हैं कि सम संख्या जोड़ने से योग की समता नहीं बदलती, अर्थात विषम + सम = विषम (जैसा **क** में दिखाया गया है) और सम + सम = सम (जैसा **ख** में दिखाया गया है)।

लेकिन विषम संख्या जोड़ने से समता बदल जाती है। जब दो विषम संख्याएँ जोड़ी जाती हैं, तो वे अपनी विषमता की भरपाई कर लेती हैं और योग को सम बना देती हैं; दो विषम संख्याएँ मिलकर **ग** में दिखाए अनुसार एक सम संख्या बनाती हैं। दूसरे शब्दों में, विषम + विषम = सम, जबकि **ख** यह दर्शाता है कि विषम + सम = विषम।

विस्तार प्रश्न : क्या शून्य विषम है या सम?

शून्य के विषम न होने के कई कारण हैं। उदाहरण के लिए, यदि यह विषम होता, तो इसके शीर्ष पर एक 'विषम' बिन्दु होना चाहिए। लेकिन शून्य का कोई बिन्दु नहीं हो सकता। इसलिए यह विषम नहीं हो सकता। अतः यह सम होना चाहिए।

साथ ही, सम संख्या जोड़ने से समता नहीं बदलती। अतः विषम + सम = विषम और सम + सम = सम। शून्य इसे बनाए रखता है क्योंकि किसी संख्या में शून्य जोड़ने पर वह नहीं बदलती। इसलिए शून्य सम होना चाहिए।

अगले प्रश्नों का समूह :

- *यदि आपके पास पर्याप्त 10-फ्रेम हों तो क्या आप 13, 18, या शून्य से बड़ी कोई भी पूर्ण संख्या बना सकते हैं? और कैसे?*
- *तो क्या 125, 602 या 1234 भी बना सकते हैं?*
- *किसी संख्या का इकाई अंक यह क्यों निर्धारित करता है कि वह विषम है या सम?*

चित्र-2

ये प्रश्न भी सामान्यीकरण की दिशा में एक क़दम हैं।

10 या उससे बड़ी कोई भी पूर्ण संख्या 10-10 के समूह और एक एक-अंकीय संख्या (0, 1, 2, … 9) का संयोजन होती है। उदाहरण के लिए 43 = 4 x 10 + 3, 602 = 60 x 10 + 2, 1234 = 123 x 10 + 4। इसलिए इन संख्याओं में से प्रत्येक को उतने पूर्ण फ्रेमों और उसके बाद, एक-अंकीय संख्या के रूप में दर्शाया जा सकता है, जैसे 43 को **चित्र-2** में बताए अनुसार दर्शाया जा सकता है।

इस समझ से यह सामान्यीकरण निकलता है कि किसी संख्या का इकाई अंक उसकी समता निर्धारित करता है।

यदि आपको यह रोचक लगे, तो एट राइट एंगल्स के नवम्बर 2022 अंक में प्रकाशित 10-फ्रेम की समीक्षा इस लिंक https://anuvadasampada.azimpremjiuniversity.edu.in/5475/ पर देख सकते हैं। इसमें एक वर्कशीट भी दी गई है।

अनुवाद : प्रमोद मैथिल **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

पॉलीओमिनोज़ और घन के आकृति-जाल की पड़ताल : कक्षा-4 के विद्यार्थियों के साथ एक अनुभव

अस्मा मेमन

यह लेख मुम्बई की शिखा अकादमी के कक्षा-4 के विद्यार्थियों साथ आयोजित एक सत्र में प्राप्त उनकी प्रतिक्रियाओं और उनके तर्क को प्रस्तुत करता है। यह एक निम्न आय वर्ग का विद्यालय है जहाँ कैम्ब्रिज पाठ्यक्रम पढ़ाया जाता है। यह सत्र एक हैंडस-ऑन गणितीय गतिविधि पर आधारित था और इसमें 18 विद्यार्थियों ने भाग लिया। इसका शीर्षक था – 'पॉलीओमिनोज़ एंड नेट्स ऑफ़ अ क्यूब' (Polyominoes and nets of a cube)। यह गतिविधि अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी (2022) की पत्रिका एट राइट एंगल्स में प्रकाशित एक वर्कशीट से ली गई थी (https://bit.ly/4a5ztvB देखें)। पॉलीओमिनोज़ समतल ज्यामितीय आकृतियाँ होती हैं जो दो-या-दो से अधिक समान आकार के वर्गों को किनारों से जोड़कर बनाई जाती हैं। ये डोमिनोज़, ट्रोमिनोज़, टेट्रोमिनोज़ और पेंटोमिनोज़ जैसे विभिन्न रूपों में हो सकती हैं। यह इस बात पर निर्भर करता है कि कितने वर्ग हैं, और उन्हें किस प्रकार से जोड़ा गया है।

खोज का विवरण

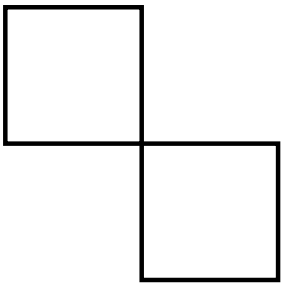
इस गतिविधि का लक्ष्य विद्यार्थियों को पॉलीओमिनोज़ से परिचित कराना, अलग-अलग पॉलीओमिनोज़ के बीच के सम्बन्धों की खोज करना, और उनकी सोचने की क्षमता को बढ़ाना था। इस प्रक्रिया में विद्यार्थियों ने आकृतियों को घन के चारों ओर लपेटकर अपनी स्थानिक समझ (spatial reasoning) को मज़बूत किया। साथ ही, यह पहचाना कि कौन-से हेक्सोमिनोज़ मिलकर एक घन का जाल तैयार कर सकते हैं। हालाँकि एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकों में कक्षा-7 में औपचारिक रूप से घन के जाल की अवधारणा से परिचय कराया जाता है, लेकिन इस गतिविधि ने कक्षा-4 के विद्यार्थियों को पहले ही इस अवधारणा से परिचित होने का अवसर दे दिया। यह एक खोज-आधारित सीखने का अनुभव था जिसमें पॉलीओमिनोज़ के माध्यम से हैंडस-ऑन जाँच-पड़ताल करते हुए विद्यार्थियों ने इस विषय को शुरुआती स्तर पर समझा।

यह गतिविधि एक-एक घण्टे के तीन सत्रों में आयोजित की गई थी। इससे विद्यार्थियों को खोज करने, चर्चा करने, और अपनी गणितीय सोच पर विचार करने के लिए पर्याप्त समय मिल सका।

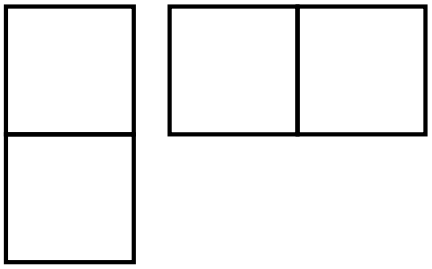
सत्र-1 : पॉलीओमिनोज़ के बीच 'पेरेंट-चाइल्ड' (Parent-Child) सम्बन्धों का परिचय

पहला सत्र एक आसान टास्क के साथ शुरू किया गया। विद्यार्थियों से कहा गया कि वे दो वर्गों को **एक-दूसरे के किनारों से जोड़ें**, और यह पता लगाएँ कि ऐसा कितने तरीक़ों से किया जा सकता है। शुरुआत में विद्यार्थियों ने वर्गों को कई अलग-अलग तरह से जोड़ा : जैसे कि ऊपर की ओर, बाजू की ओर, तिरछे में और कुछ विद्यार्थियों ने कोने से कोना भी जोड़ दिया। इससे यह निर्देश फिर से दोहराना पड़ा कि वर्गों को एक-दूसरे के सिर्फ़ **किनारों से ही जोड़ना** है, कोनों से नहीं।

की-वर्ड : *पॉलीओमिनोज़, आकृति-जाल, घन, टेट्रोमिनोज़, हेक्सोमिनोज़*



चित्र-1 : विद्यार्थियों ने वर्गों को इस चित्र की तरह कोने से कोना जोड़ा था।

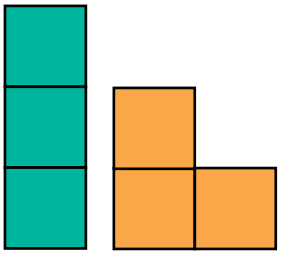


चित्र-2 : विद्यार्थियों ने इस तरह से वर्गों को अलग-अलग तरीक़ों से जोड़कर दिखाया।

इस गतिविधि को आगे बढ़ाते हुए एक सवाल पूछा गया, *"क्या ये आकृतियाँ अलग-अलग हैं, या एक को घुमाकर दूसरी बनाई जा सकती है?"* इस सवाल ने विद्यार्थियों को **घूर्णन और अनूठेपन (uniqueness)** पर सोचने के लिए प्रेरित किया। चर्चा के बाद विद्यार्थियों ने समझा कि भले ही आकृतियों की जमावट अलग-अलग दिख रही हो, लेकिन असल में वे **एक ही आकृति हैं** क्योंकि उन्हें घुमाकर एक जैसा बनाया जा सकता है। इसी तरह, जिन आकृतियों को प्रतिबिम्ब के माध्यम से एक-दूसरे में बदला जा सकता है, उन्हें एक ही माना जाता है। दूसरे शब्दों में, दर्पण प्रतिबिम्बों को अलग नहीं माना जाता है।

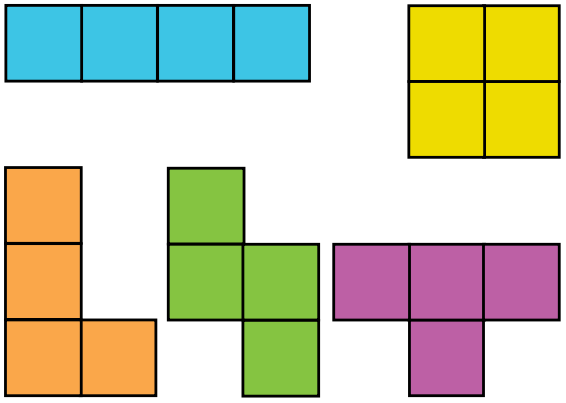
इस चरण में, **मोनोमिनो, डोमिनो, ट्रोमिनो, टेट्रोमिनो, पेंटोमिनो** आदि जैसी औपचारिक शब्दावली से परिचय कराया गया। यह भी बताया गया कि आकृति का नाम उसमें मौजूद इकाई वर्गों की संख्या पर निर्भर करता है। इसके बाद विद्यार्थियों से **ट्रोमिनो** बनाने के लिए कहा गया। हालाँकि, यह कार्य विद्यार्थियों को अकेले ही करना था, फिर भी विद्यार्थी स्वाभाविक रूप से आपसी चर्चाओं में शामिल हो गए। वे अपनी आकृतियों की तुलना कर रहे थे, घुमाव को पहचान रहे थे, और दोहराव को समझ रहे थे।

इन चर्चाओं के दौरान, विद्यार्थियों ने यह समझा कि केवल **दो अलग-अलग ट्रोमिनोज़** होते हैं।



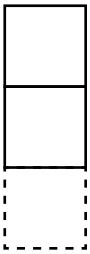
चित्र-3 : विद्यार्थियों ने ये दो ट्रोमिनो आकृतियाँ बनाईं।

इसके बाद, विद्यार्थियों से **टेट्रोमिनो** बनाने के लिए कहा गया। साथ मिलकर काम करते हुए उन्होंने घूमे हुए और दर्पण प्रतिबिम्ब भी बनाकर देखे। उन्होंने पाया कि कुल **पाँच ख़ास तरह के टेट्रोमिनो** होते हैं।



चित्र-4 : विद्यार्थियों ने दी गई टेट्रोमिनो आकृतियाँ बनाईं।

ट्रोमिनो बनाने की कोशिश में एक विद्यार्थी ने अलग तरीक़ा अपनाया। उसने डोमिनो में एक और वर्ग जोड़कर ट्रोमिनो बनाने का प्रयास किया।



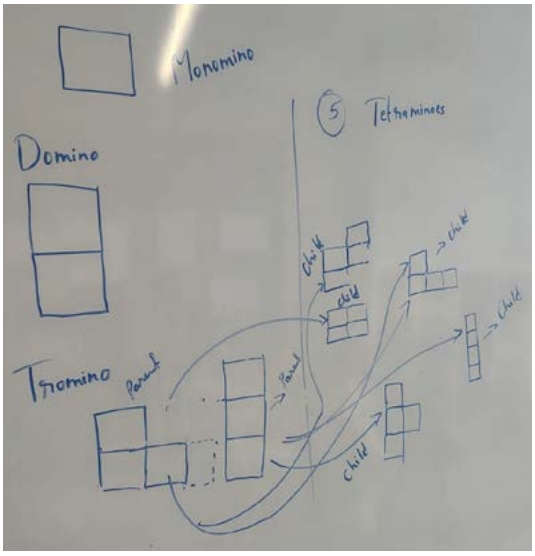
चित्र-5 : डोमिनो का उपयोग करके ट्रोमिनो बनाने के लिए एक विद्यार्थी द्वारा दी गई प्रतिक्रिया का उदाहरण।

जब विद्यार्थियों ने नई आकृति प्राप्त करने के लिए एक और वर्ग जोड़ने का सुझाव दिया तब उन्हें छोटी आकृतियों से बड़े पॉलीओमिनोज़ बनाने का विचार समझाया गया। इस प्रक्रिया में, किसी मौजूदा पॉलीओमिनो में एक-या-एक से ज़्यादा वर्ग जोड़ने पर एक नया पॉलीओमिनो बनता है। इस सन्दर्भ में, 'पेरेंट पॉलीओमिनो' (parent polyomino) का मतलब पहले से बनी उस आकृति से है जिसमें एक-या-एक से ज़्यादा वर्ग जोड़कर एक नया पॉलीओमिनो बनाया जाता है। इस तरह बनने वाले बड़े पॉलीओमिनो को 'चाइल्ड'

(child) कहा जाता है। इससे विद्यार्थियों को बहुत सारी अहम बातें समझ में आईं। ऐसी ही दो बातें ये थीं :

- एक ही पेरेंट पॉलीओमिनो के कई अलग-अलग चाइल्ड पॉलीओमिनोज़ बन सकते हैं।
- एक चाइल्ड पॉलीओमिनो के एक से अधिक पेरेंट हो सकते हैं।

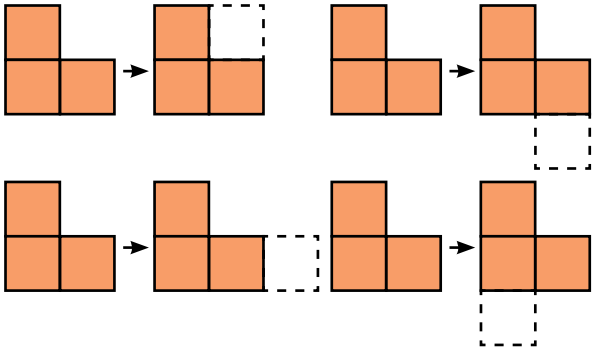
चित्र-6 में दिखाए अनुसार विद्यार्थियों ने इन सम्बन्धों को बोर्ड पर तीर बनाकर दिखाया।



चित्र-6 : बोर्ड पर शब्दों का परिचय और विद्यार्थियों द्वारा तीरों का इस्तेमाल करके पेरेंट-चाइल्ड सम्बन्ध को दिखाना।

अब आइए, उन सम्बन्धों पर ग़ौर करें जिन्हें विद्यार्थियों ने देखा :

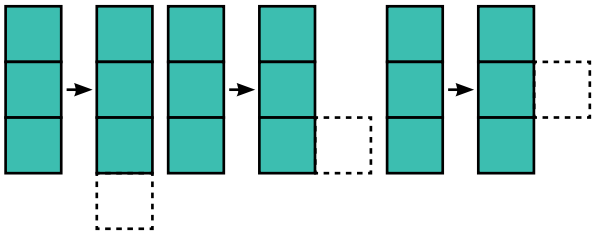
विद्यार्थियों ने देखा कि **L-आकार का ट्रोमिनो चार अलग-अलग टेट्रोमिनोज़** के लिए पेरेंट बन सकता है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि नया वर्ग किस जगह जोड़ा जाता है (**चित्र-7**)।



चित्र-7 : L-आकार के ट्रोमिनो का उपयोग करके चार अलग-अलग टेट्रोमिनोज़ बनाना।

इस गतिविधि से विद्यार्थियों को यह समझने में मदद मिली कि एक ही पॉलीओमिनो से कई अलग-अलग चाइल्ड पॉलीओमिनोज़ बन सकते हैं।

इसी प्रकार, जब **I-आकार** के ट्रोमिनो को पेरेंट के तौर पर माना, तो उन्होंने पाया कि **चित्र-8** में दिखाए गए जैसे यह **तीन अलग-अलग टेट्रोमिनोज़** बना सकता है।



चित्र-8 : I-आकार के ट्रोमिनो का उपयोग करके तीन अलग-अलग टेट्रोमिनोज़ बनाना।

चित्र-7 और 8 से विद्यार्थियों ने देखा कि दो टेट्रोमिनोज़ – **L-आकार** और **T-आकार** वाले – दोनों ही तरह के ट्रोमिनोज़ से बनाए जा सकते हैं। इससे उन्हें यह समझ आया कि एक ही चाइल्ड पॉलीओमिनो के एक से ज़्यादा पेरेंट पॉलीओमिनोज़ हो सकते हैं।

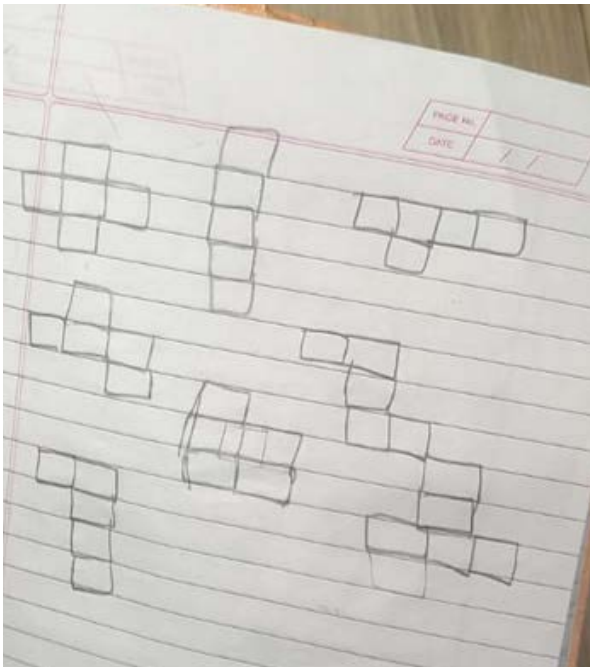
चर्चा का अन्त एक विद्यार्थी की इस समझदारी भरी टिप्पणी के साथ हुआ :

"मोनोमिनो ही सभी पॉलीमिनोज़ का पेरेंट है।"

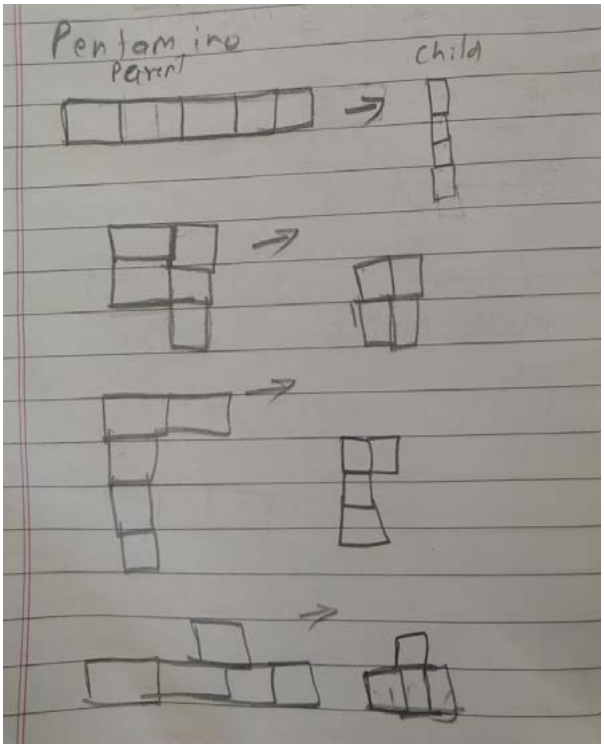
पेंटोमिनोज़ की खोज : अलग-अलग तरीक़े

जब विद्यार्थियों से पेंटोमिनोज़ बनाने के लिए कहा गया तो उन्होंने अलग-अलग तरीक़े अपनाए। कुछ विद्यार्थियों ने पाँच वर्गों को बार-बार इधर-उधर करके विभिन्न संयोजन खोजे, जबकि दूसरों ने टेट्रोमिनोज़ को पेरेंट मानकर उन्हें आगे बढ़ाया और चाइल्ड पेंटोमिनोज़ बनाए। कई विद्यार्थियों ने पेंटोमिनोज़ बनाने के बाद पेरेंट-चाइल्ड सम्बन्धों को भी दर्शाया। उन्होंने तीरों और रफ़ काम की मदद से इन सम्बन्धों को स्पष्ट किया (**चित्र-9 से 11**)।

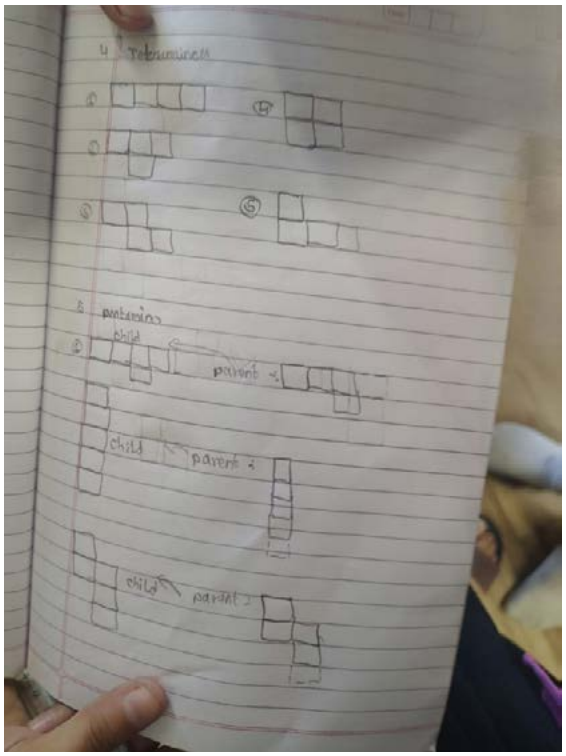
इन अलग-अलग तरीक़ों से यह स्पष्ट हो गया था कि विद्यार्थी अब विधिवत तरीक़े से सोचने लगे थे, उनकी स्थानिक समझ बेहतर हो रही थी, और वे यह भी समझने लगे थे कि घुमाने पर एक जैसी दिखने वाली आकृतियाँ अलग नहीं होती हैं।



चित्र-9 : विद्यार्थी द्वारा पेरेंट-चाइल्ड सम्बन्ध का उपयोग किए बिना बनाए गए पेंटोमिनोज़।



चित्र-10 : इस चित्र में पेरेंट और चाइल्ड के नाम आपस में बदल दिए गए हैं (सम्भव है विद्यार्थी को लगा हो कि पेरेंट को चाइल्ड से हमेशा बड़ा होना चाहिए)।



चित्र-11 : इस चित्र में, पेंटोमिनो बनाने के लिए बिन्दीदार रेखाओं का उपयोग रफ़ काम के रूप में किया गया है।

जब कुछ विद्यार्थियों को लगा कि सभी सम्भावनाएँ खोज ली गई हैं (और कुछ विद्यार्थियों ने एक ही आकृति को बार-बार बनाया), तब मैंने उनसे सवाल किया कि वे कैसे पक्का कह सकते हैं कि अब कोई नए पेंटोमिनोज़ नहीं बचे हैं। इस सवाल ने विद्यार्थियों को अपने तर्क देने के लिए प्रेरित किया। विद्यार्थियों ने अनौपचारिक रूप से पाँच वर्गों की स्थितियों की जाँच करना और आकृतियों की तुलना करना शुरू कर दिया ताकि यह देखा जा सके कि क्या कोई नई आकृति सच में अलग थी, या केवल पहले से बनी आकृति का घुमाया हुआ या प्रतिबिम्बित रूप है। हालाँकि उस समय यह तर्क पूरी तरह से सही नहीं था, फिर भी इस चर्चा से उन्हें यह समझ आया कि समान आकृतियों को दोबारा गिनने से बचना चाहिए। इससे वे केवल अनुमान तक सीमित न रहकर अधिक सोच-समझकर काम करने लगे।

सत्र-2 : घन पर टेट्रोमिनोज़ लपेटना

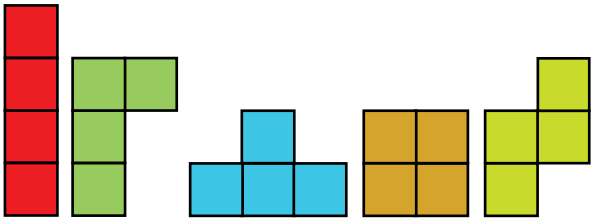
दूसरे सत्र में विद्यार्थियों ने पॉलीमिनोज़ को घन के चारों ओर लपेटने की गतिविधि की। इस लेख में, 'लपेटने' का मतलब था, **घन की ज़्यादा-से-ज़्यादा सतहों को ढँकना**, भले ही कुछ सतहें बिना ढँके रह जाएँ; लेकिन एक ही सतह को दो बार नहीं ढँक सकते, यानी ओवरलैपिंग की अनुमति नहीं है।

शुरुआत में, कई विद्यार्थियों ने 'लपेटने' का अर्थ **घन की सभी छह सतहों को ठीक एक बार में पूरी तरह से ढँकना** समझा। इससे उन्होंने **गुणनखण्डों और गुणजों** का उपयोग करके तर्क करना शुरू किया, और यह निष्कर्ष निकाला कि :

- किसी ट्रोमिनो को दो बार उपयोग करके 6 सतहों को ढँका जा सकता है।
- लेकिन किसी टेट्रोमिनो का उपयोग नहीं किया जा सकता, क्योंकि इससे कुछ सतहें बिना ढँकी रह जाएँगी।

हालाँकि यह समझ थोड़ी ग़लत थी, लेकिन विद्यार्थियों के लिए फ़ायदेमन्द साबित हुई। इससे यह पता चला कि विद्यार्थी अब केवल आकृति की दिशा पर नहीं, बल्कि संख्या से जुड़े गुणों पर भी सोचने लगे थे। इसके बाद, इस सन्दर्भ में 'लपेटने' शब्द का सही अर्थ स्पष्ट किया गया। इसका उद्देश्य यह था कि विद्यार्थी पेरेंट-चाइल्ड सम्बन्ध का उपयोग करके ऐसे हेक्सोमिनोज़ बना सकें जो घन के सम्भावित 'आकृति-जाल' हो सकते थे।

विद्यार्थियों से कहा गया कि वे ग्रिड पेपर पर टेट्रोमिनोज़ बनाएँ। उसके बाद शिक्षक ने उन आकृतियों को काटकर अलग किया, और उन्हें एक घन के चारों ओर लपेटने की कोशिश की। जब विद्यार्थियों के हाथ में कट-आउट आए, तो वे **आकृतियों की दिशा और उनके घन पर फ़िट** होने के बारे में अधिक प्रभावी ढंग से सोचने लगे। खोज-बीन के माध्यम से उन्होंने पाया कि **पाँच में से चार टेट्रोमिनोज़** एक घन के चारों ओर लपेटे जा सकते थे, जबकि एक को नहीं लपेटा जा सकता (**चित्र-12**)।



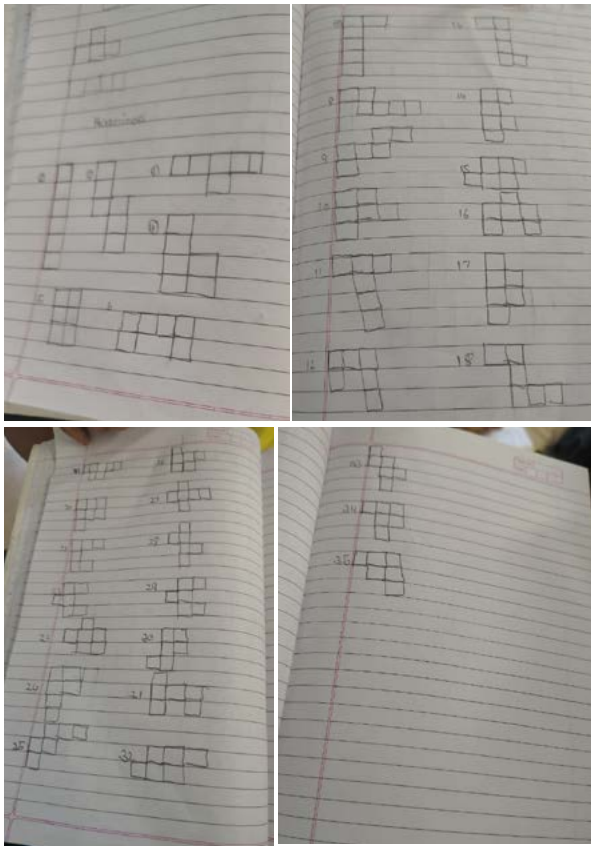
चित्र-12 : विद्यार्थियों ने समझा कि नारंगी रंग का टेट्रोमिनो ही एकमात्र ऐसा टेट्रोमिनो है जिसे एक घन के चारों ओर लपेटा नहीं जा सकता।

हालाँकि कट-आउट बनाने से समझ तो अच्छी हुई, लेकिन इसमें ज़्यादा समय लग रहा था क्योंकि सभी विद्यार्थियों को कैंची नहीं दी जा सकती थी।

सत्र-3 : हेक्सोमिनोज़ और किसी घन का आकृति-जाल

तीसरे सत्र में समय बचाने के लिए विद्यार्थियों से कहा गया कि वे अपनी नोटबुक में हेक्सोमिनोज़ बनाएँ। इसके साथ ही उन्हें पहले से तैयार किए गए कट-आउट भी दिए गए। सभी हेक्सोमिनोज़ बनाना थोड़ा मुश्किल था, इसलिए विद्यार्थियों को जोड़ी में काम करने के लिए कहा गया ताकि वे आपस में चर्चा कर सकें। विद्यार्थी मिलकर यह सोचने लगे कि कौन-सी आकृतियाँ सिर्फ़ घुमाने पर एक जैसी दिखती हैं और कौन-सी बार-बार बन रही हैं।

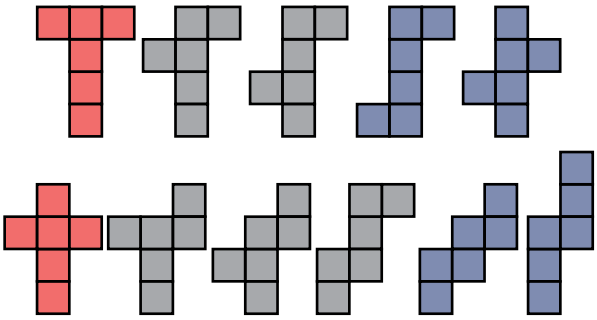
विद्यार्थियों को यह कार्य करने के लिए लगभग **35 मिनट** का समय दिया गया था, और दिलचस्प रूप से कुछ विद्यार्थियों ने **सभी 35 अनोखे हेक्सोमिनोज़** (**चित्र-13**) तैयार कर लिए।



चित्र-13 : दिए गए चार चित्र सभी सम्भावित हेक्सोमिनोज़ को दिखाते हैं।

हेक्सोमिनो के कट-आउट और घनों की मदद से विद्यार्थियों ने यह जाँचा कि कौन-सी आकृतियाँ घन को पूरी तरह से ढँक

सकती हैं, और जो नहीं ढँक सकतीं उन्हें अलग रख दिया। **35 सम्भावित हेक्सोमिनोज़** में से उन्होंने निष्कर्ष निकाला कि केवल 11 ही एक घन बना सकती हैं। इसी चरण पर, घन आकृति-जाल की औपचारिक अवधारणा से उनका परिचय कराया गया।



चित्र-14 : हेक्सोमिनोज़ जो घन आकृति-जाल बना सकते हैं।

इसके बाद विद्यार्थियों ने अपने बनाए हुए आकृति-जाल को मोड़ा, और **द्वि-आयामी आकृतियों** से त्रि-**आयामी संरचनाओं** में होने वाले परिवर्तन को ख़ुद अनुभव किया। समतल आकृतियों को घनों में बदलते देखना उनके लिए उत्साह और उपलब्धि से भरा एक पल था। अन्त में तैयार हुए घन केवल गणितीय वस्तु नहीं रहे, बल्कि उनके खोज और सीखने का एक ठोस प्रमाण बन गए – इस गतिविधि से मिला एक अर्थपूर्ण और यादगार अनुभव।

पूरे सत्र के दौरान, प्राय: देखा गया कि विद्यार्थी ऐसे सवाल पूछते थे, जैसे : "अगर हम वर्ग को किसी दूसरी जगह जोड़ें तो क्या होगा?" वे इस बात पर चर्चा करते थे कि क्या दो आकृतियाँ सचमुच अलग हैं, या केवल एक-दूसरे का घुमाव या प्रतिबिम्ब हैं।

लपेटने और टेट्रोमिनोज़ से जुड़ी गतिविधियों के दौरान, मैंने विद्यार्थियों को उनके द्वारा बनाई गई संरचनाओं की जाँच करने के लिए जोड़ने वाले छोटे-छोटे घन (ब्लॉक्स, गुटके) दिए। हालाँकि, इससे कभी-कभी भ्रम भी पैदा हुआ, क्योंकि इन घनों का आकार हमेशा काग़ज़ के कट-आउट के आयामों से मेल नहीं खाता था। इसलिए मैंने विद्यार्थियों को समझाया कि वे सटीक आकार पर कम ध्यान दें और इसके बजाय इस बात पर विचार करें कि यदि आकार को उचित रूप से बड़ा या छोटा किया जाए, तो क्या वह आकृति घन को लपेट सकती है या उसकी सतह को ढँक सकती है।

जब विद्यार्थी आकृति-जाल को लपेटने की कोशिश कर रहे थे, और कोई एक वर्ग बिना ढँका रह जाता था, तो वे कट-आउट को घुमाकर, बचे हुए हिस्से की स्थिति बदलकर, और फिर से मोड़ने का प्रयास करते थे। इस तरह के प्रयास और सुधार के तरीक़े उनके विकसित होते स्थानिक चिन्तन और दृढ़ता को स्पष्ट रूप से दर्शाते हैं।

विचार और अधिगम के प्रतिफल

कुल मिलाकर, यह गतिविधि बहुत ही दिलचस्प और समझ बढ़ाने वाली थी :

- विद्यार्थियों ने घुमाव और अनूठेपन को अच्छे से समझा
- पॉलीमिनोज़ को लपेटते समय उनकी सोच और कल्पनाशक्ति बेहतर हुई
- उन्होंने द्वि-आयामी आकृतियों और त्रि-आयामी वस्तुओं के बीच का अर्थपूर्ण सम्बन्ध समझा
- विद्यार्थियों ने साथ मिलकर काम करना, चर्चा करना और गणितीय विचार साझा करना सीखा

भविष्य में सुधार के सुझाव

कक्षा में किए गए अवलोकनों के आधार पर निम्नलिखित सुधार उपयोगी हो सकते हैं :

- समय बचाने और विद्यार्थियों की रुचि बनाए रखने के लिए पॉलीओमिनो के कट-आउट पहले से तैयार रखें
- पर्याप्त संख्या में घन के आकृति-जाल उपलब्ध कराएँ ताकि सभी विद्यार्थी सक्रिय रूप से भाग ले सकें
- विद्यार्थियों से गहराई से सोचने के लिए प्रेरित करने वाले सवाल पूछें। जैसे :
  - → *आप कैसे कह सकते हैं कि एक आकृति दूसरी का घुमाव है?*
  - → *हम कैसे सुनिश्चित कर सकते हैं कि दो हेक्सोमिनोज़ वास्तव में अलग हैं?*
  - → *क्या आपने कभी ऐसी स्थिति देखी है जहाँ चाइल्ड अपने पेरेंट से बड़ा हो?*

इस तरह के सवाल विद्यार्थियों की वैचारिक समझ को मज़बूत करते हैं और उनकी गणितीय तर्कक्षमता को विकसित करने में सहायक होते हैं।

निष्कर्ष

पॉलीओमिनोज़ पर आधारित इन तीन सत्रों की गतिविधियों ने कक्षा-4 के विद्यार्थियों को औपचारिक पाठ्यक्रम से पहले ही **घन के आकृति-जाल** को समझने का एक सरल

और प्रभावी तरीक़ा प्रदान किया। साधारण पॉलीओमिनो संरचनाओं से शुरुआत करते हुए, हेक्सोमिनोज़ को घनों के चारों ओर लपेटने तक की प्रक्रिया के माध्यम से, विद्यार्थियों ने सशक्त स्थानिक तर्कशक्ति, घुमाव और समानता की समझ, तथा गणितीय सम्भावनाओं को व्यवस्थित रूप से खोजने की क्षमता विकसित की। पेरेंट-चाइल्ड सम्बन्धों के उपयोग ने उनकी संरचनात्मक सोच और पैटर्न पहचानने की क्षमता को और भी अधिक गहरा किया।

सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह है कि प्रत्यक्ष अनुभव के माध्यम से जब विद्यार्थियों ने यह खोजा कि 35 हेक्सोमिनोज़ में से केवल 11 ही घन के आकृति-जाल बनाते हैं तो एक अमूर्त विचार उनके लिए ठोस और स्पष्ट समझ में बदल गया। सफल आकृति-जालों को मोड़कर घन का रूप देना, इस सीखने की यात्रा का एक उत्साहपूर्ण और सन्तोषजनक समापन था। इस प्रक्रिया ने द्वि-आयामी आकृतियों और त्रि-आयामी वस्तुओं के बीच सम्बन्ध को और मज़बूत किया, साथ ही विद्यार्थियों में आत्मविश्वास, जिज्ञासा और सार्थक गणितीय जुड़ाव को भी बढ़ावा दिया।

Reference and citations

- Figure 3: Images of trominoes. Source: Wikipedia contributors, 2025, Tromino.
- Figure 4: Images of tetrominoes. Source: Alchetron, 2024, Tetromino.
- Figure 6: Students' observation on parent-child relation. Source: Author's classroom, 2026.
- Figure 7: Construction of tetrominoes using L-shaped tromino. Source: Adapted from Wikipedia contributors, 2025, Tromino.
- Figure 8: Construction of tetrominoes using an I-shaped tromino. Source: Adapted from Wikipedia contributors, 2025, Tromino.
- Figure 9: Drawing of pentominoes without using parent-child relation. Source: Author's classroom, 2026.
- Figures 10-11. Drawing of pentominoes using parent-child relation. Source: Author's classroom, 2026.
- Figure 12: Images of tetrominoes. Source: Puzzle Genius, n.d., Tetromino.
- Figure 13: Images of hexominoes. Source: Author's classroom, 2026.
- Figure 14: Images of hexominoes that are nets of cube. Source: Adapted from Wikipedia contributors, 2025, Hexomino.

अस्मा मेमन अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु की पूर्व छात्रा हैं। वर्तमान में वे मुम्बई में शिखा अकादमी में एक प्राथमिक गणित शिक्षक हैं। उन्हें ऐसे टूल्स और गतिविधियों को डिज़ाइन करने और उपयोग करने में आनन्द आता है जो विद्यालयी गणित को हैंडस-ऑन अनुभव और दृश्य पहलुओं से जोड़ते हैं। इसके अलावा, कॉलेज में गणित की पढ़ाई करने के दौरान उन्होंने दिए गए डेटा में पैटर्न और वितरण का विश्लेषण करने का भी अनुभव लिया। उनसे asma.memon20ug@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रोशन ख़ान **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर** : अतुल अग्रवाल

nRich वैबसाइट की समीक्षा

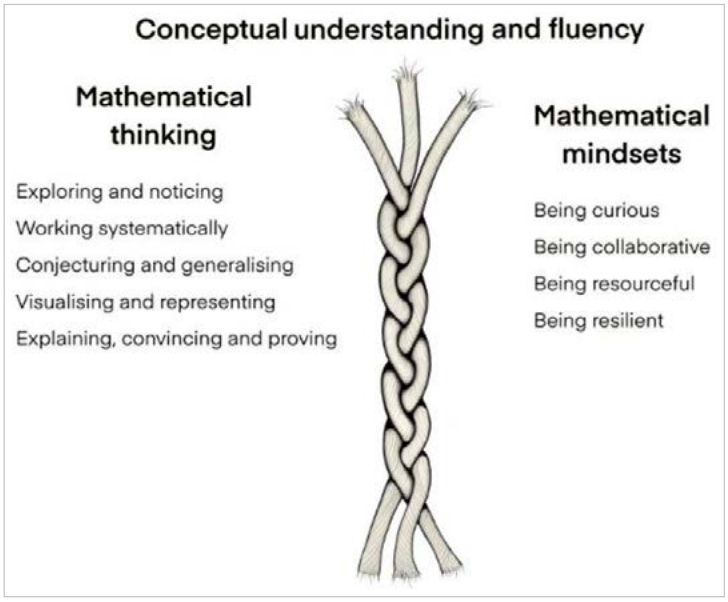
समीक्षक : स्नेहा टाइटस

nRich वैबसाइट की समीक्षा *एट राइट एंगल्स* के दिसम्बर, 2012 के अंक में पहले भी छप चुकी है (https://bit.ly/45X6F5Y)। तो फिर यह दूसरी समीक्षा क्यों? इस काम को फिर से करने के लिए मेरे पास दो कारण थे।

मार्च, 2024 में अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी पब्लिकेशन्स ने *एट राइट एंगल्स* को उसके मूल मक़सद और मंशा पर वापस लाने का फ़ैसला लिया – यानी, भारत की सरकारी शिक्षा प्रणाली के प्राथमिक और उच्च प्राथमिक कक्षाओं के शिक्षकों/ शिक्षक-प्रशिक्षकों के लिए गुणवत्तापूर्ण शिक्षण का संसाधन बनाना। इसलिए, यह समीक्षा प्राथमिक विद्यालय के संसाधनों पर केन्द्रित होगी। दूसरी बात यह कि पिछली समीक्षा के बाद से nRich वैबसाइट को नए सिरे से डिज़ाइन किया गया है। आइए देखें कि क्या बदला है और क्या वैसा ही है।

होम पेज https://nrich.maths.org/ सादा, खुला-खुला और व्यवस्थित है, जहाँ आप 3-18 वर्ष की उम्र के विद्यार्थियों के लिए nRich के गणित के निःशुल्क संसाधनों को खोज सकते हैं। यहाँ पर, *हू इज द 'यू'? टीचर्स, स्टूडेंट, एंड पेरेन्टस* पेज पर ऊपर दिए गए टैब इसी बात को दिखाते हैं, साथ ही *प्राब्लम साल्विंग स्कूल्स, इवेंटस* और *अबाउट एनरिच* अतिरिक्त टैब हैं। यह दिलचस्प है कि इस आख़िरी टैब में वैबसाइट के काम में शामिल लोगों की व्यक्तिगत जानकारी नहीं दी गई है। इस बात पर ज़ोर देने की बजाय कि वे कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी के गणित संकाय के लोग हैं, यह टैब इस बारे में बात करता है कि वे क्या मानते हैं, उनकी सोच क्या है और वे यह क्यों कर रहे हैं; और वैबसाइट का यह आरेख (**चित्र–1** देखें) सब साफ़-साफ़ समझाता है।

जैसे-जैसे मैंने *टीचर्स* के तहत आने वाले पेजों को देखा-समझा, मुझे इन शब्दों के बारे में ज़्यादा जानकारी मिली। मेरा पहला पड़ाव *अर्ली इयरस* सेक्शन था और यहाँ मुझे *एक्टीविटीज़, आर्टीकल, चिल्ड्रन थिंकिंग* और *प्रोफ़ेशनल डेवलपमेंट* के लिए टैब मिले। ज़ाहिर है, मैं सीधे आख़िरी टैब पर गई और उनके न्यूज़लैटर के लिए 'साइन–अप' किया (पेज के निचले बाएँ कोने में स्थित टैब देखें)। वैबसाइट का वादा है कि इस न्यूज़लैटर से मुझे आगे होने वाले निःशुल्क वैबिनारों के बारे में जानकारी मिलती रहेगी।



चित्र-1 : स्रोत https://bit.ly/46zI9Is

इसके बाद, मैं *एक्टीविटीज़* में गई और उनके *अर्ली-स्टेज फ़ाउण्डेशन एक्टीविटीज़* (EYFS) प्रारूप की व्याख्या से एक बार फिर प्रभावित हुई। यहाँ दी गई गतिविधियाँ इस पर आधारित हैं कि बच्चे (3-5 वर्ष) अकसर क्या करते हैं और वयस्क किस तरह से उन गतिविधियों को आगे बढ़ा सकते हैं। आइए, *द मड किचिन* – https://bit.ly/4cmUV0E – से एक उदाहरण देखें।

काम : खेलने के लिए ऐसी जगह तय करें जहाँ बच्चों का छोटा समूह आज़ादी से मिट्टी की रसोई (The Mud Kitchen) को खेल-खेल में समझ सके ।	
शुरुआती प्रेरणा (Stimulus)	बच्चों को अकसर मिट्टी खोदने, ख़ासकर गीली मिट्टी को खोदने में, बर्तनों को मिट्टी से भरने और ख़ाली करने में, कल्पनाओं से भरे खेल खेलने और आज़ादी से बातें करने में मज़ा आता है ।
प्रतिक्रिया (Reaction)	बड़े लोग रसोई से कई तरह की चीज़ें दे सकते हैं – पतीली, कड़ाही, पानी की सप्लाई, रसोई के छोटे-बड़े बर्तन आदि ।
संकेत-व्याख्या (Cues-Describing)	यहाँ क्या-क्या है?
तार्किक रूप से समझना (Reasoning)	आपको क्यों लगता है कि यह बर्तन इस काम के लिए सही है? क्या आपको वहाँ कोई ऐसी चीज़ दिख रही है जिसका इस्तेमाल किया जा सकता है? वह किस तरह से उपयोगी होगी?
खुलना (Opening Out)	आप इस चीज़ के साथ क्या करना चाहेंगे? क्या यह चीज़ उतनी बड़ी है, जितनी इस काम के लिए ज़रूरी है?
दर्ज करना (Recording)	अगर हम इसकी फ़ोटो ले लें, तो क्या इसे याद रखने में मदद मिलेगी?
गणितीय सफ़र (अवधारणाएँ और शब्दावली) [The Mathematical Journey (Concepts and Vocabulary)]	गणना समान व अलग माप
विकास और विविधता (Development and Variation)	रेत के गड्ढे, पानी के खेल
संसाधन (Resources)	बाहर खुले में ऐसी जगह जहाँ मिट्टी हो, रसोई के सामान (बर्तन, कड़ाही, चम्मच, पलटे आदि), बड़ा ड्रम (जिसे मेज़ की तरह इस्तेमाल किया जा सके), खिलौने वाला कुकर, छोटा ब्लैकबोर्ड, पानी, प्लास्टिक के टब आदि ।

मुझे सुखद आश्चर्य हुआ जब मैं यह समझ पाई कि **चित्र-1** में जो तीन पहलू बताए गए हैं – अवधारणात्मक समझ एवं सहजता (Conceptual Understanding and Fluency), गणितीय तार्किकता (Mathematical Reasoning) और गणितीय मानसिक प्रवृत्तियाँ (Mathematical Mindsets) – वे रोज़मर्रा की इस सरल गतिविधि में किस तरह गुँथे हुए हैं! इन भारी-भरकम शब्दों को छोटे बच्चों के लिहाज़ से ढाला जा सकता है। 😊

प्रारम्भिक शिक्षा के बुनियादी चरण (EYFS – ईवायएफ़एस) का प्रारूप इन पहलुओं को उभारने में मदद करता है; इसके लिए यह उन बातों से शुरुआती प्रेरणा लेता है जो बच्चे अकसर करते हैं और बड़ों की प्रतिक्रिया के लिए सुझाव देता है। व्याख्या करने, तार्किक रूप से समझने, खुलने, दर्ज करने की गतिविधियों से मिलने वाले संकेतों के ज़रिए गणितीय सोच का विकास किया जाता है। गणितीय सफ़र के विवरण को पढ़ें, जिसे उनके ही शब्दों में बख़ूबी समझाया गया है।

डेवलपमेंट एंड वैरियेशन टैब में ऐसी ही अन्य गतिविधियों, गीतों और कविताओं के सुझाव हैं। *रिसोर्सेस* भाग में बताया गया है कि गतिविधि के लिए वास्तव में किन चीज़ों की ज़रूरत होगी। गतिविधियों को संख्या, माप, आकार और स्थान व पैटर्न जैसे अध्ययन के क्षेत्रों के मुताबिक़ जमाया गया है। यहाँ ध्यान देने की एक बात यह है कि शायद ये गीत और कविताएँ भारतीय सन्दर्भ में सांस्कृतिक रूप से प्रासंगिक न हों।

क्या करना है, कैसे करना है, हम क्यों ऐसा करते हैं, इससे क्या विकसित होता है और इसे आगे कैसे विकसित करना है... एक शिक्षक को मार्गदर्शन के लिए भला और क्या चाहिए? अगर हम भारत में सरकारी स्कूल की प्रणाली को देखें, तो यक़ीनन भाषा से जुड़ी कुछ समस्याएँ पेश आएँगी। इस वैबसाइट पर अँग्रेज़ी भाषा की जो विषय-वस्तु और संसाधन हैं, उनका अनुवाद उपलब्ध नहीं है; ये संसाधन यूनाइटेड किंगडम/ संयुक्त राज्य अमरीका की पाठ्यचर्याओं के लिए तैयार किए गए हैं। यहाँ मुहैया कराए गए संसाधनों का लाभ लेने के लिए भारत के स्कूली शिक्षकों को शायद 'गूगल ट्रांसलेट' का इस्तेमाल करना पड़ सकता है। यहाँ मौजूद बहुत-सी विषय-वस्तु भारतीय पाठ्यचर्या से मेल खाती है और इन गतिविधियों को आज़माने में ख़ुद शिक्षकों को भी मज़ा आएगा।

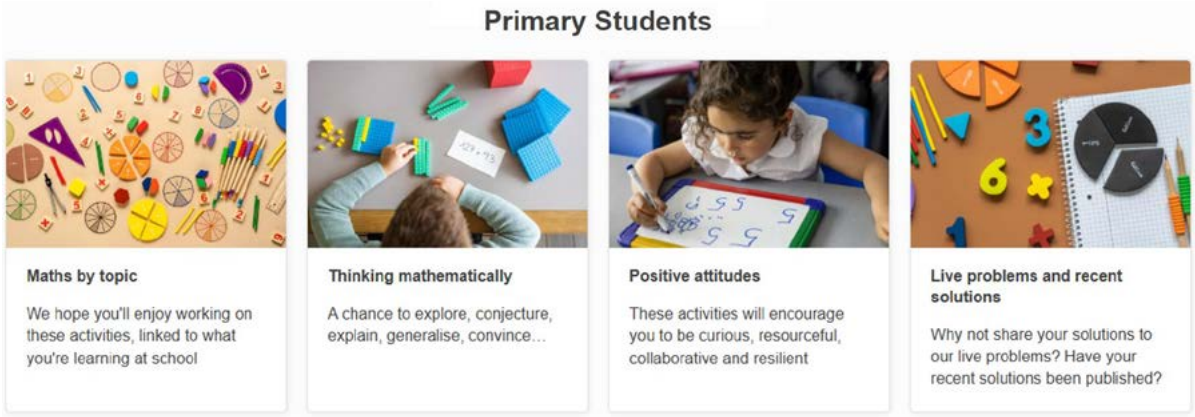
इसी तरह, उन कक्षाओं के बच्चे इस वैबसाइट पर मौजूद अन्तर्क्रियात्मक संसाधनों का पूरा फ़ायदा नहीं उठा पाएँगे जहाँ बच्चों के लिए इंटरनेट और कम्प्यूटर की उपलब्धता सीमित है। अच्छी बात यह है कि ज़्यादातर गतिविधियों के बारे में ऐसे संसाधन उपलब्ध करवाए गए हैं, जिनकी पीडीएफ़ फ़ाइलें डाउनलोड की जा सकती हैं और प्रिंटआउट लेकर बच्चों को दिया जा सकता है।

टीचर्स टैब में दिए गए संसाधनों पर क्लिक करने पर आप ऐसे लेखों और गतिविधियों तक पहुँचते हैं, जिन्हें शुरुआती वर्ष, प्राथमिक, माध्यमिक और 16 वर्ष से अधिक आयु-वर्ग के मुताबिक़ जमाया गया है। हर गतिविधि को चुनौती के स्तर के मुताबिक़ भी जमाया गया है – यह ज़रूर है कि चुनौती के स्तर विद्यार्थियों की क्षमता के अनुसार अलग-अलग हो सकते हैं, लेकिन यह शिक्षक के लिए शुरुआती मार्गदर्शक है। कक्षा में पढ़ाने के तौर-तरीक़ों, मशहूर गणितज्ञों और गणित से जुड़े विषयों पर आधारित लेख शिक्षकों को उनकी कक्षा के विद्यार्थियों की स्थिति के मुताबिक़ अपनी पढ़ाने की शैली को ढालने में मददगार हैं।

इस समीक्षा के लिए रिसर्च करते समय, मुझे कॉलिन फ़ॉस्टर की *मैथमेटिकल एट्यूड्स*– https://bit.ly/4l34XWM – मिली, जिसमें उन्होंने उबाऊ और थकाने वाले अभ्यासों के लिए 'सुहाने, ख़ूबियों भरे' विकल्प सुझाए हैं। हालाँकि उन्होंने अपने सुझावों को किसी-न-किसी ख़ास प्रक्रिया के इर्द-गिर्द ही रचा है, लेकिन वे बस एक उत्तर की ओर ही नहीं ले जाते हैं। उनके सुझाए अभ्यास और दोहरावों से सीखना-सिखाना बहुत सहज और मज़ेदार तरीक़ों से पूरा हो जाता है – कोई शिक्षक (या माता-पिता या विद्यार्थी) और क्या चाहेगा?

मैं ख़ुद एलन विगली के लेख 'गणित पढ़ाने के मॉडल' – https://bit.ly/47gTJIA – से प्रभावित हुई हूँ। इस लेख में एलन ने शिक्षकों को 'राह आसान करने वाले मॉडल' के प्रति आगाह किया है और 'चुनौती भरे मॉडल' के लिए सुझाव दिए हैं। यहाँ वे मुद्दे भी हैं जो भारतीय शिक्षकों की आम समस्याएँ हैं – समय की कमी और बहुत सारी विषयवस्तु जिसे अलग-अलग क्षमताओं वाले विद्यार्थियों को पूरा पढ़ाना है। हालाँकि, ज़्यादातर भारतीय कक्षाओं में पढ़ाई-लिखाई शिक्षक की ओर से ही संचालित होती है; विद्यार्थी तो निर्देशों का पालन करने के ही आदी होते हैं। यहाँ दिए गए सुझाव शायद ऐसी कक्षाओं पर लागू न हो पाएँ। यह मुझे शिक्षक के दख़ल के व्यापक मुद्दे पर ले आता है। यहाँ दी गई गतिविधियाँ खोज-बीन, तर्क-वितर्क और समस्या-समाधान के मक़सद से बनाई गई हैं। मैं कह नहीं सकती कि भारतीय कक्षाओं में शिक्षक आसान बनाने, समझाने और हल ही बता देने से ख़ुद को रोक पाने के आदी हैं या नहीं। अगर उन्हें ज़रा इन्तज़ार करने के लिए तैयार किया जा सके, तो ये समस्याएँ और गतिविधियाँ विद्यार्थियों में ज़्यादा आज़ादी के साथ सीखने का जज़्बा जगा सकती हैं और शायद उन्हें गणित से डरने की बजाय उसका मज़ा लेने का ज़रिया बन सकती हैं।

मुझे *टीचर्स* पेज के हर हिस्से के नीचे दिए गए *रिसोर्सेस* बहुत पसन्द आए; यहाँ ऐसे संसाधन उपलब्ध हैं जिन्हें प्रिंट किया जा सकता है, जो अन्तर्क्रियात्मक हैं और लाइव हैं – इनमें से लाइव वाला समस्याओं का ऐसा समुच्चय है, जिनके उत्तर भेजने के लिए विद्यार्थियों को कहा जाता है। इसे विद्यार्थियों के लिए लिंक वाले स्क्रीनशॉट के आख़िरी कॉलम में देखा जा सकता है (यहाँ प्राथमिक, माध्यमिक और 16+ आयु वर्ग के विद्यार्थियों के लिए अलग-अलग लिंक दिए गए हैं)।



इस वैबसाइट में बहुत सारी रोचक गतिविधियाँ दी हुई हैं और मैंने लेख के आख़िर में कुछ लिंक दिए हैं। लेकिन मैं उन सात कारणों को बताते हुए इस समीक्षा को समाप्त करना चाहूँगी, जिनकी वजह से मैं इस वैबसाइट की पुरज़ोर सिफ़ारिश कर रही हूँ :

1. यह वैबसाइट दिशा देती है : मैं कहाँ जाना चाहता हूँ? गणित पढ़ाने के लिए मेरा दूरगामी नज़रिया क्या है?
2. यह आगे का नक़्शा दिखाती है : मैं वहाँ तक कैसे पहुँचूँ? इस राह में क्या-क्या रुकावटें और चुनौतियाँ आ सकती हैं? मैं इनसे बचने के रास्ते कैसे ढूँढ़ूँ? मैं दूसरों के अनुभव से कैसे सीखूँ? https://bit.ly/4r0R2lL – पर देखें। यहाँ, प्राथमिक स्तर पर पढ़ाए जाने वाले विषयों को वैबसाइट पर दी गई गतिविधियों और लेखों से जोड़ा गया है और ज़्यादा स्पष्टीकरण के बग़ैर यह मेरी बात को दर्शाता है।
3. यह संसाधन मुहैया कराती है : मैंने पाया कि इन संसाधनों को भारतीय सन्दर्भ में ढालना पड़ सकता है, लेकिन ऐसा आसानी से किया जा सकता है और ज़्यादातर मामलों में ये कम ख़र्चीले भी हैं। साथ ही, इनमें शामिल अन्तर्क्रियात्मक गतिविधियाँ मज़ेदार हैं और मोबाइल फ़ोन से भी अमल में लाई जा सकती हैं। अँग्रेज़ी में निर्देश होना बड़ी अड़चन तो है, लेकिन वैब–ट्रांसलेटर का इस्तेमाल करके या किसी बड़े की मदद लेकर एक दफ़े जब ये समझ में आ जाते हैं, तो फिर विद्यार्थी घण्टों तक उन गतिविधियों से जुड़े रह सकते हैं और अपनी कुशलता के स्तरों को बढ़ाते हुए खेलते रह सकते हैं।
4. यह मुश्किल शब्दजालों को आसानी से समझाती है : 'गणितीय मानसिक प्रवृत्तियाँ' (Mathematical Mindsets), 'गणितीय तार्किकता' (Mathematical Reasoning) और 'अवधारणात्मक समझ' (Conceptual Understanding) जैसी शब्दावलियाँ बहुत अच्छे लक्ष्य पेश करती हैं, लेकिन कोई शिक्षक अपनी रोज़ाना की पाठ-योजना में इन पहलुओं को कैसे शामिल कर सकती/ता है? अभिभावक घर पर ही इनको अमल में लाने वाले मज़ेदार और सार्थक खेल में कैसे शामिल हो सकते हैं?
5. यह वैबसाइट लगातार पेशेवर विकास में उपयोगी है और साथ-ही-साथ उन शिक्षकों के लिए मददगार है जो अपना पाठ पढ़ाने के लिए कोई फ़ौरी युक्ति ढूँढ़ रहे होते हैं। इसके अलावा, वैबसाइट में दिए गए लेख आसान भाषा में हैं और दुनिया भर के शिक्षकों के सामने आने वाली समस्याओं से जुड़े हुए हैं। साथ ही, ये लेख ऐसे शिक्षकों के फ़ीडबैक और रोचक समाधान भी पेश करते हैं जिन्होंने इन समाधानों को आज़माया है।
6. यह विद्यार्थियों को समस्याओं पर काम करने, अपने नतीजों को दर्ज करने और दूसरों के साथ साझा करने का बढ़ावा देती है; साथ ही, यह अच्छी सोच और समस्याओं का समाधान करने की क्षमताओं को सराहती है।
7. यह विषय-वस्तु का क्षैतिज (horizontal) और लम्बवत (vertical) दोनों तरह का ज्ञान उपलब्ध कराती है, जिससे शिक्षक किसी ख़ास आयु-वर्ग के लिए विषय के विस्तार में जा सकते हैं और साथ-ही-साथ उससे पहले के और बाद के आयु-वर्ग की पढ़ाई के साथ मेल बिठा सकते हैं। उदाहरण के लिए, https://bit.ly/4rGkChj शिक्षण की ऐसी

राह दिखाता है, जो शिक्षकों को यह समझने में मददगार है कि पैटर्न को समझना गणित के शिक्षणशास्त्र का इतना महत्त्वपूर्ण आधार क्यों है और इसको कम उम्र से ही कैसे विकसित किया जा सकता है।
यहाँ कुछ गतिविधियाँ दी गई हैं, जिन पर मैं आपका ध्यान चाहूँगी :

लिंक	यह क्या है?	मुझे यह क्यों पसन्द है
https://bit.ly/4shndyb	यह लेख चीज़ों को व्यवस्थित करने जैसी आम गतिविधि को गणित से जोड़ता है।	यह ऊपर बताए गए EYFS फ़ॉर्मेट में है, इसलिए इसका शिक्षणशास्त्रीय पहलू ज़ाहिर है। साथ ही, यह उन अच्छी आदतों से जुड़ा है जिन्हें शिक्षक और माता-पिता विद्यार्थियों में पैदा करना चाहते हैं।
https://bit.ly/4l46WKJ	यहाँ ऐसे कथनों की सूची है, जिन्हें हमेशा/ कभी-कभी/ कभी भी सच नहीं (Always/Sometimes/Never True) के आधार पर वर्गीकृत किया जाना है।	इस तरह की गतिविधियों से प्राथमिक स्तर पर अनुमान लगाना और सामान्यीकरण करना मुमकिन हो पाता है।
https://bit.ly/3MPmCov	फ़र्श पर पोस्ट-इट्स (Post-its – चिपकने वाले काग़ज़ के टुकड़ों) के ज़रिए डेटा हैंडलिंग का अभ्यास।	यह किया जा सकता है, दिलचस्प है और इससे जो दृश्य बनते हैं, वे विद्यार्थियों को पिक्टोग्राम और बार चार्ट की ओर ले जाते हैं। भारत की कुछ कक्षाओं में इसे चिपकने वाली बिन्दियों के साथ भी आज़माया गया है।
https://bit.ly/4cSxegL	गति-आधारित (kinesthetic) गतिविधि के साथ संख्या-कौशल का विकास।	विद्यार्थी तौर-तरीक़ों को परखते हैं, उन पर ध्यान देते हैं और उनके बारे में सीखते हैं।
https://bit.ly/4u4DKat	दो अंकों वाली दो संख्याओं की तुलना करना।	यह उतना आसान नहीं है जितना आप सोचते हैं! इसमें स्कोरिंग बड़ी-से-बड़ी संख्याओं को प्राप्त करने पर निर्भर करती है।

मुझे उम्मीद है कि आपको इन संसाधनों को देखने और इस्तेमाल करने में उतना ही मज़ा आएगा, जितना मुझे आया है!

स्नेहा टाइटस *एट राइट एंगल्स की* मुख्य सम्पादक हैं। वे इस पत्रिका की शुरुआत से ही इससे जुड़ी रही हैं। स्नेहा को भाषा और गणित, दोनों ही विषयों में काम करना पसन्द है। उन्होंने सिक्किम की कक्षा-4 और कक्षा-5 की गणित की पाठ्यपुस्तकों में और विभिन्न आयु समूहों के लिए आकलन के डिज़ाइन तैयार करने में अपना योगदान दिया है। स्नेहा के पास गणित में स्नातकोत्तर की उपाधि है। उन्होंने कई वर्षों तक उच्च माध्यमिक विद्यालयों में गणित पढ़ाया है। स्नेहा ने एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकों के लिए कई अध्याय लिखे हैं। उनकी रुचियों में अभिकलनात्मक ढंग से सोचने (computational thinking) को सीखना और, शिल्प एवं गणित (craft and mathematics) के बीच रिश्तों की खोज-बीन शामिल हैं।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

लेख आमंत्रित हैं...

एट राइट एंगल्स भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षक-प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रैक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होने चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को रिवीजन और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीक़ों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोज़मर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषयक गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।
- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचिंग लर्निंग मटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली ग़लतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या–समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठयपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरों (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क़िस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

लेखों को स्वीकार करने की नीति

एट राइट एंगल्स प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर पूर्णत: केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि यह मौलिक है और प्रकाशन के लिए इस पर किसी भी तरह का क़ानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाए।

एट राइट एंगल्स पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक ***एट राइट एंगल्स*** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे ***एट राइट एंगल्स*** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

एट राइट एंगल्स में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से यूनिवर्सिटी की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

लेखकों के लिए विशेष दिशा–निर्देश

अगर आप ***एट राइट एंगल्स*** के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

1. **रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ़ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ़ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मज़ेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक क़िस्सा हो सकता है। ख़ासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
2. **लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
3. **शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज़ करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीक़े से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
4. **सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
5. **सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ़ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
6. **दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
7. **संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
8. **अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
9. **उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आए हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फ़ुटनोट से बचें। यदि फ़ुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
10. **संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
11. **चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ई-मेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीचीं गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
12. **चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज़ करें।
13. **लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिज्योलूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज़्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
14. **ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
15. आप अपने लेख **हिन्दी** में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अँग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
16. **लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTex में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक ऋषिकेश बी.एस., रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1, एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

गिनती से परिचय

पद्मप्रिया शिराली

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

गिनती से परिचय

बच्चों में संख्याओं की समझ स्वाभाविक रूप से तब शुरू होती है जब वे अपने आस-पास की दुनिया को टटोलते हैं – यहाँ तक कि शैशवावस्था में भी। वस्तुओं के साथ बार-बार होने वाली अन्तःक्रियाओं और अपने परिवेश में इस्तेमाल होने वाली भाषा के माध्यम से वे धीरे-धीरे संख्या सम्बन्धी प्रारम्भिक अवधारणाओं का निर्माण करते हैं।

रोज़मर्रा की स्थितियों में बच्चे खिलौने, प्लेट, कपड़े, कुर्सी या भोजन के डिब्बों जैसी परिचित घरेलू वस्तुओं के माध्यम से वस्तुओं के समूहों और 'दो' और 'चार' जैसी संख्याओं से रूबरू होते हैं। दिनचर्या से जुड़ी बातचीत, जैसे कि, *"क्या तुमने दो रोटियाँ खाईं?"*, *"उसके पास तीन गुड़िया हैं,"* या *"मैंने छह केले और चार सेब ख़रीदे"* – संख्याओं को सन्दर्भ के साथ अनुभव करने के सार्थक अवसर प्रदान करती है। ये वास्तविक जीवन के अनुभव ही प्रारम्भिक संख्यात्मक सोच की नींव रखते हैं।

शिशु संख्या-शब्दों को वास्तविक मात्राओं के साथ जोड़ना शुरू कर देते हैं, जैसे यह समझना कि 'दो' का अर्थ दो सेब या दो खिलौने होता है। वे तुलनात्मक विचारों को भी समझते हैं, जैसे कि 'ज़्यादा' और 'कम', उदाहरण के लिए, ज़्यादा बिस्कुट लेना या कम गाज़र लेना। शुरुआत में, बच्चे संख्याओं को मात्रा के संकेतक के रूप में देखते हैं। धीरे-धीरे, वे समझने लगते हैं कि संख्याएँ स्थान (दूसरा, तीसरा) भी बता सकती हैं, लेबल के रूप में काम कर सकती हैं (मकान नम्बर 104) या अमूर्त माप (तीन साल की उम्र) को निरूपित कर सकती हैं।

चित्र-1

बच्चों में वस्तुओं के छोटे समूहों (आमतौर पर पाँच तक) को बिना गिने ही दृश्य रूप से देखने और उनकी तुलना करने की जन्मजात क्षमता होती है, जिसे 'बोधात्मक त्वरित गणना' (perceptual subitising) के रूप में जाना जाता है। गिनने के प्रभावी कौशल के विकास में मदद करने के लिए शिक्षक इस प्राकृतिक क्षमता का लाभ उठा सकते हैं। इसके अतिरिक्त, यह ध्यान देने योग्य है कि गिनती में जोड़ निहित होता है और उल्टी गिनती में घटाव निहित होता है। इसलिए, ये तीनों अवधारणाएँ साथ-साथ चलती हैं।

यह पुलआउट बच्चों और वयस्कों दोनों की बिना गिने छोटी मात्राओं (छह तक) को तुरन्त पहचानने की प्राकृतिक क्षमता पर प्रकाश डालने से शुरू होता है। यह विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से इस कौशल को मज़बूत करने पर ज़ोर देता है, साथ ही प्री-प्राइमरी के तीन वर्षों और कक्षा 1-2 के विद्यार्थियों को गिनने के प्रभावी तरीक़े सिखाने पर भी बल देता है। 'त्वरित गणना' (subitization) प्रारम्भिक गणित शिक्षा में एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है, क्योंकि यह बच्चों को संख्याओं की मानसिक छवि बनाने और संख्या तथ्यों की कल्पना करने में मदद करती है। यह संख्याओं की सहज समझ विकसित करती है, मानसिक अंकगणित कौशल को बढ़ाती है, रटी हुई गिनती बोलने से हटकर संख्याओं के बारे में लचीली सोच की ओर ले जाती है और संख्याओं के पैटर्न को पहचानने में मदद करती है जो गणित की अधिक उन्नत अवधारणाओं में सहायक होते हैं।

की-वर्ड : *संख्या, पूर्व-संख्या कौशल, त्वरित गणना, गिनती, संख्यात्मकता, गिनती के सिद्धान्त।*

1-2-3 जितना सरल नहीं

फ़ाउण्डेशनल स्टेज पर कार्य करने वाले शिक्षक यह देख सकते हैं कि जैसे-जैसे बच्चे गिनने और संख्या की समझ में प्रगति करते हैं, उनमें कुछ ग़लतफ़हमियाँ भी हो जाती हैं और वे कुछ ग़लतियाँ भी करते हैं, जैसे :

- वस्तुओं के बीच की दूरी या उनके जमाने के तरीक़े (arrangement) के आधार पर उनकी मात्रा का ग़लत अनुमान लगाना।
- यह न समझ पाना कि गिनी गई अन्तिम संख्या ही कुल मात्रा को दर्शाती है (मान की समझ का सिद्धान्त/ cardinality principle)।
- गिनती के सही क्रम को याद रखने में जूझना।
- सीधी या उल्टी गिनती करते समय संख्या-नामों के क्रम में भ्रमित होना (नियत क्रम सिद्धान्त/ stable order principle)।
- 'एक-एक संगति' (one-to-one correspondence) में ग़लतियाँ करना, जैसे – वस्तुओं को छोड़ देना या एक ही वस्तु को दो बार गिनना।
- संरक्षण सिद्धान्त (conservation principle) को समझने में विफल रहना कि जमावट बदलने के बावजूद मात्रा वही रहती है।
- वस्तुओं के छोटे समूहों की तुलना करते समय दृश्य-समझ (visual perception) का कम उपयोग करना। बच्चे वस्तुओं के छोटे समूहों की तुलना करते समय अपनी दृश्य-समझ पर कम भरोसा कर सकते हैं। गिनती सीखने के बाद, वे अकसर यह मानने लगते हैं कि उन्हें हर बार गिनना ज़रूरी है, भले ही वे मात्रा को स्पष्ट रूप से देख पा रहे हों – जैसे कि चार वस्तुओं के समूह को पहचानना।

हमारे शिक्षण के तरीक़े ऐसे होने चाहिए जो इन त्रुटियों को रोकें और बच्चों को गिनती सीखने और संख्याओं को समझने के दौरान इनसे उबरने में सक्रिय रूप से सहायता करें।

तालिका-1

गतिविधि-1 : बोधात्मक त्वरित गणना (Perceptual Subitization) कौशल का विकास

उद्देश्य : बच्चों में बोधात्मक त्वरित गणना की क्षमता [यानी बिना गिने, छोटी मात्राओं (आमतौर पर पाँच या छह तक) को तुरन्त पहचानने की क्षमता] को विकसित करने में सहायता करना और उसका आकलन करना।

सामग्री : डॉट फ्लैश कार्ड (बिन्दुओं वाले कार्ड), मानक पाँसा

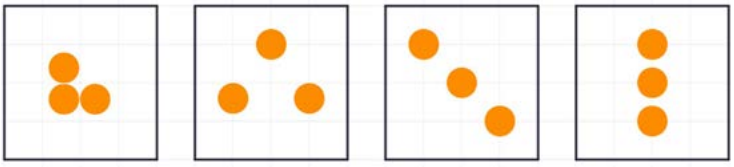
प्रक्रिया

बोधात्मक त्वरित गणना किसी छोटे समूह की मात्रा की बिना गिने तत्काल पहचान करना है। उदाहरण के लिए, जब एक बच्चा पाँसे पर चार बिन्दु देखता है, तो वह प्रत्येक बिन्दु को गिने बिना 'चार' कह सकता है।

इन पैटर्नों को सुदृढ़ करने के लिए पाँसे का एक प्राकृतिक उपकरण के रूप में उपयोग करें, विशेष रूप से 1 से 6 तक की मात्राओं के लिए।

चित्र-2

3, 4, 5 और 6 बिन्दुओं की विभिन्न स्थानिक जमावट को दर्शाने वाले फ्लैश कार्ड तैयार करें।

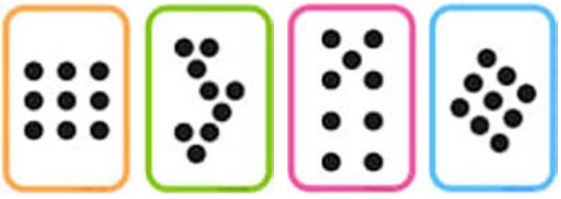


चित्र-3 : 3 बिन्दुओं वाले फ्लैशकार्ड का उदाहरण

स्पष्टता सुनिश्चित करने के लिए बिन्दुओं के आकार और उनके बीच की दूरी को एक समान रखें। प्रत्येक कार्ड को बच्चों को थोड़ी देर के लिए (1-2 सेकंड) दिखाएँ और उनसे वह संख्या बताने के लिए कहें जो वे देख रहे हैं। यह गिनती करने की बजाय दृश्य पैटर्न की पहचान को प्रोत्साहित करता है।

विस्तार

एक बार जब बच्चे अलग-अलग व्यवस्थाओं में 1 से 6 तक की मात्राओं को आत्मविश्वास के साथ पहचानने लगें, तो 7 से 10 बिन्दुओं वाले फ्लैश कार्ड दिखाएँ। 9 के लिए एक उदाहरण यहाँ दिया गया है (**चित्र-4**)।



चित्र-4

इन कार्डों के लिए मन में अधिक जटिल समूह (mental grouping) बनाने की आवश्यकता हो सकती है और ये अवधारणात्मक त्वरित गणना की नींव रखते हैं।

अवधारणात्मक त्वरित गणना में बड़ी संख्याओं को पहचानने के लिए उनमें मौजूद छोटे समूहों को मन में व्यवस्थित करके पहचानना शामिल होता है। उदाहरण के लिए, 9 बिन्दुओं को तीन-तीन के तीन समूहों के रूप में देखना। इस प्रकार

की पहचान बच्चों को 'हिस्से व पूर्ण' (part-whole) के सम्बन्धों को समझने में मदद करती है, जो जोड़ और घटा के लिए महत्त्वपूर्ण होते हैं।

गतिविधि-2

उद्देश्य : बोधात्मक व अवधारणात्मक त्वरित गणना (Perceptual and Conceptual Subitization) विकसित करने में सहायता करना और उसका आकलन करना।

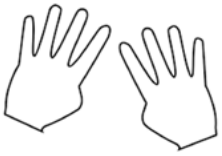
सामग्री : हाथ और उँगलियाँ, टेन-फ्रेम (10-खाने वाले फ्रेम), बिन्दुओं वाले टेन-फ्रेम

शुरुआत में उन्हें 5 से कम की संख्याओं के साथ शुरू करने दें। उदाहरण के लिए : 3 को अलग-अलग तरीक़ों से दिखाएँ **(चित्र-5)**।

चित्र-5

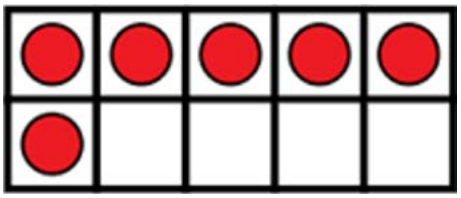
बच्चे 10 तक की संख्या दिखाने के लिए स्वाभाविक रूप से अपने हाथों और उँगलियों का उपयोग करते हैं। वे उँगलियों की व्यवस्था से बनने वाले संख्या पैटर्न को पहचानना शुरू कर देते हैं, जैसे आठ को पाँच और तीन या चार और चार के रूप में देखना।

चित्र-6



चित्र-7

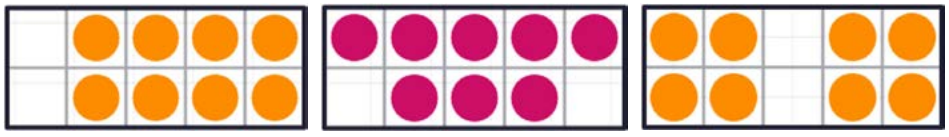
टेन-फ्रेम (**चित्र-8**) एक आयताकार ग्रिड है जो दो पंक्तियों और पाँच स्तम्भों से बनी होती है, जिसमें कुल 10 खाने होते हैं। बच्चे 10 तक की संख्याओं को दर्शाने के लिए इस पर गोटी रखते हैं, जिससे उन्हें संख्या बोध (number sense) विकसित करने तथा एक-एक संगति (one-to-one correspondence), त्वरित गणना और संख्याओं के दृश्य निरूपण को समझने में मदद मिलती है।



चित्र-8

बच्चों को इन फ्रेमों पर विभिन्न पैटर्नों में गोटियाँ रखने दें और गोटियों की संख्या बताने को कहें। इसका ढाँचा बच्चों को पाँच से बड़ी संख्याओं को अधिक आसानी से पहचानने में मदद करता है।

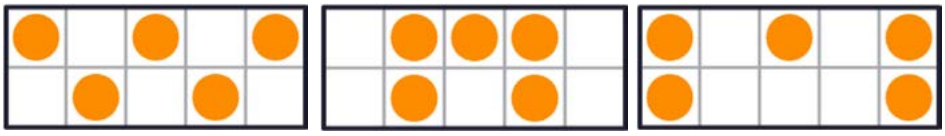
इसके बाद टेन-फ्रेम पर प्रदर्शित विभिन्न संख्या पैटर्नों वाले चार्ट या फ्लैशकार्ड का उपयोग किया जा सकता है ताकि बच्चों की बोधात्मक व अवधारणात्मक दोनों तरह की त्वरित गणना क्षमता को बढ़ाया जा सके।



चित्र-9 : टेन-फ्रेम व्यवस्था का उपयोग करके संख्या 8 दिखाने वाले फ्लैशकार्ड

जैसे-जैसे बच्चे टेन-फ्रेम के साथ सहज होते जाते हैं, वे कार्डों को अलग-अलग तरीक़ों से देखना शुरू कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, कुछ बच्चे तुरन्त 4 और 4 जैसे पैटर्न को पहचान सकते हैं, जबकि अन्य यह देख सकते हैं कि एक भरे हुए फ्रेम में से दो काउंटर ग़ायब हैं और निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि संख्या 8 है। यह आवश्यक है कि विद्यार्थियों

को फ्रेम की व्याख्या करने के लिए अपनी रणनीति विकसित करने के मौक़े और स्वतंत्रता दी जाए। शिक्षक इस तरह के प्रश्न पूछकर बच्चों की गहरी सोच को प्रोत्साहित कर सकते हैं, "आपको क्यों लगता है कि यह 8 है?" या "यदि नीचे की पंक्ति ख़ाली होती तो क्या होता?"



चित्र-10 : टेन-फ्रेम व्यवस्था का उपयोग करके संख्या 5 दिखाने वाले फ्लैशकार्ड

विस्तार : संख्याओं को अलग-अलग तरीक़ों से दर्शाना

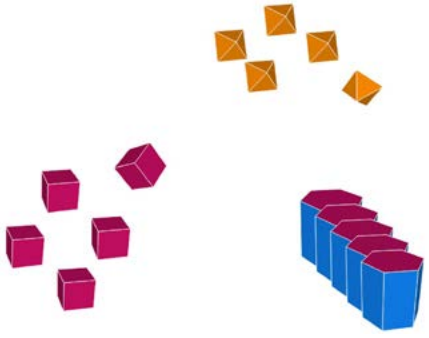
पाँच उँगलियाँ उठाएँ, एक बड़े पाँसे पर कोई संख्या या एक अंक दिखाएँ और फिर बच्चों से उस संख्या को अधिक-से-अधिक तरीक़ों से प्रदर्शित करने के लिए कहें। गिनने योग्य वस्तुएँ और संसाधन प्रदान करें ताकि वे विभिन्न निरूपणों के साथ प्रयोग कर सकें।

सम्भावित सामग्री :

- बीज, गोटियाँ, छोटे खिलौने, बड़े ब्लॉक, मल्टीलिंक गुटका (जुड़ने वाले घन)
- बिन्दु पैटर्न जैसे कि पाँसे और डोमिनोज़ पर होते हैं
- गठित सामग्री जैसे गणितमाला, 10-मोतियों वाली पट्टियाँ, मोंटेसरी नम्बर रॉड
- रोज़मर्रा की पैकिंग की वस्तुएँ जिनमें खाँचे हों, जैसे अण्डे की ट्रे या डिब्बे या क्रेयॉन के डिब्बे
- संख्या प्रतीक, संख्या रेखाएँ या 100 वर्ग ग्रिड

गणितीय सोच को प्रोत्साहित करना

चित्र-11 में तीन '5' दिखाए गए हैं।



चित्र-11

वर्णन करना

चित्र-12

- यह पाँच, उस पाँच (दूसरे समूह की ओर इशारा करते हुए) से अलग कैसे दिखता है?
- पाँच का यह पैटर्न (एक समूह की ओर इशारा करते हुए) किसके जैसा दिखता है?
- आप क्या देख सकते हैं?

तर्क करना

- आपको कैसे पता कि ये सभी एक ही संख्या हैं?
- **चित्र-11** में प्रत्येक पाँच दूसरों से अलग कैसे दिखता है? इन पाँचों में क्या समानता है और क्या अन्तर हैं?

खोज के अवसर

- आप दो हाथों से पाँच कैसे बना सकते हैं?
- क्या आप मुझे अपनी उँगलियों का उपयोग करके किसी और तरीक़े से पाँच दिखा सकते हैं?

खेल-1 : गोटी छुपाओ और दिखाओ

बच्चे स्वाभाविक रूप से छिपाने और खोजने के खेल की ओर आकर्षित होते हैं। तीन अलग-अलग लेकिन एक जैसे कटोरे के नीचे एक, दो और तीन गोटियाँ रखें। थोड़ी देर के लिए एक कटोरे के नीचे रखी गोटियाँ दिखाएँ, फिर उसे दोबारा ढँक दें और बच्चों से यह पहचानने के लिए कहें कि उन्होंने कितनी गोटियाँ देखीं। यह तत्काल पहचान (instant recognition) को प्रोत्साहित करता है।

गतिविधि-3

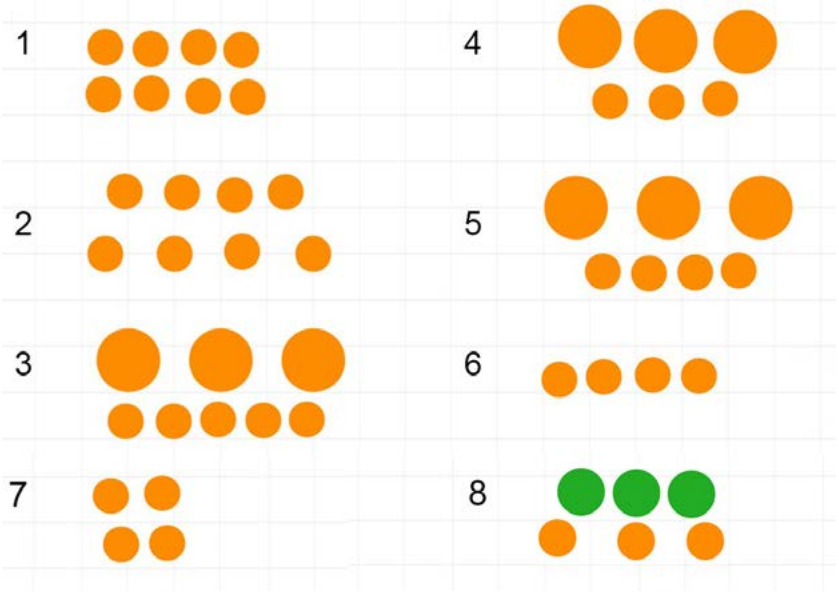
उद्देश्य : बच्चों में संख्या के संरक्षण (conservation of number) के विकास में मदद करना और उसका आकलन करना।

सामग्री : 2 अलग-अलग आकार की गोटियाँ या दो अलग-अलग आकार के बीज, जैसे राजमा और चना।

वस्तुओं के दो समूहों की मात्रा की तुलना करते समय, विद्यार्थी वस्तुओं की संख्या की बजाय उनके सापेक्ष आकार या उनके रखे जाने के तरीक़े (व्यवस्था) पर ध्यान केन्द्रित कर सकते हैं। वे एक-दूसरे से दूर-दूर रखी गई 4 वस्तुओं के समूह को, पास-पास रखी गई उन्हीं 4 वस्तुओं के समूह से 'अधिक' समझ सकते हैं।

चित्र-13 : संरक्षण का सिद्धान्त

शिक्षक गोटियों की विभिन्न व्यवस्थाओं का उपयोग कर सकते हैं (जैसा कि **चित्र-14** में दिखाया गया है) और विद्यार्थियों से दो पंक्तियों या दो समूहों की तुलना करने और उन जोड़ों को पहचानने के लिए कह सकते हैं जो समान संख्या दर्शाते हैं। इससे यह सुनिश्चित किया जा सकता है कि विद्यार्थियों में 'संख्या के संरक्षण' की समझ विकसित हो गई है।



चित्र-14 : इस तरह की गतिविधि का अनुभव लेने से विद्यार्थियों को संरक्षण के सिद्धान्त को समझने में मदद मिलेगी कि व्यवस्था में बदलाव के बावजूद मात्रा समान रहती है।

अगली गतिविधि में, हम एक समूह के मान (cardinal value) को समझने की दिशा में बढ़ेंगे। इसमें यह समझना शामिल होता है कि किसी समूह में जब तक कुछ जोड़ा या हटाया न जाए, तब तक मान नहीं बदलता – जो कि संख्या के संरक्षण का ही एक तत्त्व है।

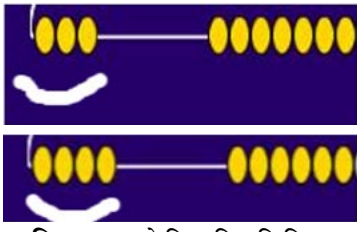
गतिविधि-4

उद्देश्य : 'एक और' (one more) की धारणा के माध्यम से संख्याओं की मज़बूत वैचारिक समझ बनाना। मान की समझ के सिद्धान्त को समझना।

सामग्री : वस्तुओं का सेट (रंगीन मोती/ गुटका), 10 मोतियों की माला, 10 आपस में जुड़ने वाले गुटका (interlocking cubes)

तालिका-1 में बताई गई समस्याओं (गिनती सीखने के दौरान होने वाली सामान्य ग़लतियाँ) को काफ़ी हद तक शुरुआत में 'एक और' की अवधारणा को स्पष्ट रूप से पेश करके और संख्या सम्बन्धों की पूरी समझ बनने तक इस पर ज़ोर देकर हल किया जा सकता है। इसके बाद 'एक कम' की अवधारणा आती है। उदाहरण के लिए, संख्या 5, संख्या 4 से '1 अधिक' है या संख्या 9, 10 से '1 कम' है। यह तरीक़ा गिनती की प्रक्रिया को धीमा कर देता है, जिससे प्रत्येक वस्तु की ओर इशारा करने (एक-एक संगति) और गिने गए समूह को बताने (मान की समझ के सिद्धान्त पर कार्य करने) के लिए पर्याप्त समय मिलता है।

चित्र-15 : 10 बड़े मोतियों की एक माला, क्रम से गिनती सिखाने के लिए एक अच्छी सामग्री है।



चित्र-16 पर केन्द्रित निम्नलिखित बातचीत इस तरीक़े को स्पष्ट करेगी।

'चलो शुरू करते हैं। यह 1 है।' (पहले मोती की ओर इशारा करें।)

अब एक और मोती को खिसकाएँ। 'अब इस तरफ़ कितने मोती हैं? बिल्कुल सही, 2!' (दोनों मोतियों की ओर इशारा करें।)

एक और मोती खिसकाएँ। 'अब यहाँ कितने मोती हैं? हाँ, 3!' (तीनों इकट्ठे मोतियों की ओर इशारा करें।)

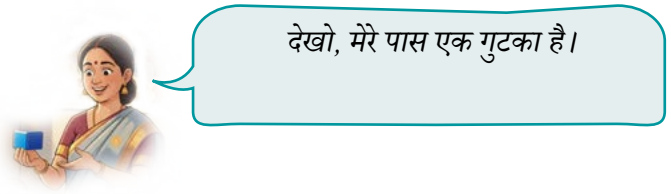
फिर एक और मोती खिसकाएँ और चारों इकट्ठे मोतियों की ओर इशारा करें।

विभिन्न दिशाओं में गिनती करके इस गतिविधि को दोहराएँ – दाएँ से बाएँ, बाएँ से दाएँ।

बाद में, डोरी को लम्बवत (vertical) पकड़ा जा सकता है और गिनती ऊपर से नीचे या नीचे से ऊपर की जा सकती है।

घनाकर गुटकों (cubes) के साथ काम करते समय, शिक्षक और विद्यार्थी के बीच एक सामान्य बातचीत इस तरह होगी :

एक नीला गुटका ऊपर पकड़ते हुए



उसे टेबल पर रख देती हैं।

अब मैं इसमें एक और जोड़ रही हूँ।
(उसके बगल में एक नीला गुटका रख देती हैं।)
चलो गिनते हैं : एक, दो।
(दो गुटकों के सेट की ओर इशारा करती हैं।)
अब कितने गुटके हैं?

दो

हाँ ! दो गुटके। एक (दो में से एक गुटके की ओर इशारा करती हैं) *और एक - दो।*

अब मैं एक और जोड़ रही हूँ।
(एक और नीला गुटका जोड़ती हैं।) *आओ अब मिलकर गिनते हैं : एक, दो, तीन। अब हमारे पास हैं...*

तीन गुटके

बिलकुल सही ! एक, दो, तीन – (तीनों की ओर इशारा करती हैं) *तीन गुटके।*

एक और गुटका। (एक नीला गुटका जोड़ती हैं।) *आओ गिनें : एक, दो, तीन, चार। अब ये कितने हो गए हैं?* (सभी चार गुटकों की तरफ़ इशारा करती हैं)

नोट : गिनती और संख्या-नाम सिखाते समय, सीखने की प्रक्रिया को दो चरणों में विभाजित करना अकसर अधिक प्रभावी होता है। पहले चरण में, बच्चों को 5 तक की संख्याओं से परिचित कराया जाता है। इससे उन्हें छोटी मात्राओं को समझने, बुनियादी गिनती सीखने और सम्बन्धित संख्या-नामों से परिचित होने में मदद मिलती है। एक बार जब वे शुरुआती गिनती में सहज हो जाते हैं, तो दूसरे चरण में 1 से 10 तक की संख्याओं पर ध्यान केन्द्रित किया जा सकता है। धीरे-धीरे सीमा बढ़ाने से बच्चों में आत्मविश्वास पैदा होता है, वे संख्या पैटर्न को पहचान पाते हैं और अपने गिनने व संख्या पहचान कौशल दोनों को मज़बूत करते हैं।

खेल-2 : ख़ज़ाना पेटी

सामग्री : छोटी वस्तुओं (जैसे शंख, कंकड़ या गोटियाँ) को रखने के लिए एक कार्डबोर्ड डिब्बा।

निर्देश : कुछ वस्तुएँ दिखाएँ (उदाहरण के लिए, तीन शंख) और बच्चों के साथ ज़ोर से गिनें : 1, 2, 3। बच्चों के सामने गिने हुए शंखों को अपारदर्शी डिब्बे में रखें।

बच्चों से पूछें, ''डिब्बे में कितने शंख हैं?''

फिर डिब्बे में और शंख जोड़कर गतिविधि जारी रखें और आगे की सोच को प्रेरित करें :

- अगर मैं एक और जोड़ूँ तो कितने शंख होंगे?
- अगर मैं दो और जोड़ूँ तो कितने होंगे?
- अगर मैं एक निकाल दूँ तो कितने होंगे?

बच्चों को डिब्बे खोलकर जाँचने से पहले अपनी गिनती और मन में जोड़ कौशल के आधार पर उत्तर देने के लिए प्रोत्साहित करें।

गतिविधि-5

उद्देश्य : 'एक कम' की धारणा के माध्यम से 'शून्य' की मज़बूत वैचारिक समझ बनाना। 'एक कम', 'शून्य', 'कुछ नहीं' जैसी भाषा का उपयोग करते हुए उल्टी गिनती करना।

सामग्री : अंक कार्ड (10 से 1)

परिदृश्य : गीत, कहानी और संख्या खेल के माध्यम से बच्चों को जोड़ना।

यह गतिविधि 10 से 0 तक की गिनती वाली किसी भी कविता को सुनाते समय विद्यार्थियों द्वारा अभिनीत की जा सकती है। यहाँ एक सम्भावित कविता दी गई है :

चित्र-17

"ज़ूम ज़ूम ज़ूम, चल दिए हम चाँद पर!

ज़ूम ज़ूम ज़ूम, जल्द होंगे हम चाँद पर!

10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 0. ये लो उड़ चले!"

यह कविता छोटे शिक्षार्थियों के लिए उल्टी गिनती को सुलभ और मनोरंजक बनाने के लिए दोहराव और कहानी कहने का उपयोग करती है। बच्चों को एक-दूसरे के पीछे एक पंक्ति में खड़ा करें और उन्हें घटते क्रम में 10 से 1 तक के अंक कार्ड पकड़ाएँ। उन्हें चाँद पर जाने वाली कविता सिखाएँ। उन्हें गाने और अभिनय करने में शामिल होने दें। कविता को धीरे-धीरे गाना शुरू करें। प्रत्येक छन्द के अन्त में, जो बच्चा नेतृत्व कर रहा होगा, वह उछलेगा और पंक्ति छोड़ देगा। बच्चों से हर बार यह बताने के लिए कहें कि कितने शेष बचे हैं। "हम 10 थे। एक कम। अब 9", "हम 9 थे, एक कम। अब 8।" बच्चों के लिए उत्तर का अनुमान लगाना आसान होगा, क्योंकि हर बार एक कम हो रहा है।

प्रश्न पूछें :

- *'हर बार एक बच्चे के 'ज़ूम' करके चले जाने पर बच्चों की संख्या का क्या होता है?'*
- *'अगर दो ज़ूम करके चले जाएँ, तो कितने बचेंगे? आपको कैसे पता?'*
- *'क्या होगा अगर सभी एक साथ ज़ूम करके चले जाएँ? क्या होगा अगर और बच्चे शामिल हो जाएँ?'*

शिक्षक बच्चों को अपनी उँगलियों से गतिविधि का प्रदर्शन करने (यानी मॉडल बनाने) के लिए कहकर उनका आकलन कर सकते हैं।

आकलन

कक्षा के सन्दर्भ के आधार पर पहेलियाँ पूछें : आप कक्षा में मेरा केवल एक ही रूप देख सकते हैं! मैं कौन हूँ? आप मेरे केवल दो रूप देख सकते हैं! मैं कौन हूँ? विद्यार्थियों को संख्या एक के लिए ब्लैकबोर्ड या दरवाज़े जैसे उदाहरण देने दें।

घर का सन्दर्भ : ऐसे प्रश्न पूछें जो उन्हें घर की कुछ वस्तुओं पर विचार करने में मदद करें। परिवार के सदस्यों की संख्या पर चर्चा करें। पूछें कि क्या चारपाइयों या पलंग की संख्या परिवार के सदस्यों की संख्या के बराबर है या उससे अधिक है। क्या वे ऐसी किसी वस्तु के बारे में सोच सकते हैं जो परिवार के सदस्यों की संख्या से कम या अधिक हो? घर की कुछ वस्तुएँ आमतौर पर केवल एक होती हैं, कुछ दो हो सकती हैं इत्यादि। बच्चों से घर में ऐसी वस्तुएँ खोजने के लिए कहें जो केवल एक हों, केवल दो हों आदि।

टिप्पणियाँ : प्रेरणा

बच्चे आमतौर पर गिनती का आनन्द लेते हैं और अकसर रोज़मर्रा की स्थितियों में स्वाभाविक रूप से ऐसा करते हैं। हालाँकि, कक्षा के भीतर, शिक्षक को कभी-कभी गिनती के सार्थक कारण बनाने की आवश्यकता हो सकती है। "हम कैसे पता लगा सकते हैं कि यहाँ कितने हैं?" जैसे प्रश्न पूछकर जिज्ञासा को प्रोत्साहित करें।

गिनती के विभिन्न अवसर प्रदान करें :

- एक पंक्ति में व्यवस्थित या बेतरतीब ढंग से बिखरी हुई वस्तुओं को गिनें।
- ढोल की थाप, तालियाँ या कमरे को पार करने में लगने वाली छलाँगों की संख्या गिनें।
- प्रत्येक बच्चे के नाम में अक्षरों की संख्या की तुलना करें।
- वस्तुओं के छोटे समूहों में वस्तुओं की संख्या का अनुमान लगाने के लिए प्रोत्साहित करें और गिनती करके उसे सत्यापित करें।

पाँच पाण्डव या *स्नो-व्हाइट और सात बौने* जैसी संख्या-आधारित कहानियों का अभिनय करें।

खोई हुई जादुई संख्या : वस्तुओं का एक समूह दिखाएँ, चुपके से कुछ वस्तुएँ हटा दें और बच्चों को 'खोई हुई जादुई संख्या' खोजने की चुनौती दें।

गतिविधि-6

उद्देश्य : 'अधिक' और 'कम' जैसे शब्दों का उपयोग करके मात्राओं की तुलना करना।

सामग्री : वस्तुओं का सेट (रंगीन मोती/ घनाकार गुटके)

संग्रह : बच्चों को प्रकृति से वस्तुएँ एकत्र करना बहुत पसन्द होता है। ये पत्थर, बीज, फूल हो सकते हैं या कक्षा में रखे मोती, गुटके और खिलौने हो सकते हैं। शिक्षक, प्रत्येक बच्चे को एक टोकरी दे सकते हैं या 2-3 बच्चों के बीच एक टोकरी दे सकते हैं। वे अपनी टोकरी में एक ही प्रकार की कुछ वस्तुएँ (5 से 10 के बीच) एकत्र कर सकते हैं।

बातचीत शुरू करें : *'मुझे बताओ कि तुम्हारी इस टोकरी में क्या है। कितने हैं? क्या होता है जब तुम इसमें एक और डालते हो? क्या होता है अगर तुम उनमें से कुछ मुझे दे देते हो?'*

'आओ देखें कि इन दो टोकरियों में क्या है। क्या इनमें वस्तुओं की संख्या समान है? दूसरा पहले से अलग क्यों है?'

चित्र-18 : गणितमाला आगे और पीछे गिनती करने और संख्याओं की तुलना करने में मदद करती है।

दैनिक स्थितियों में, 'उतने ही जितने' (as many as) के बारे में बात करें, उदाहरण के लिए, *'स्टूलों की संख्या उतनी ही है जितनी विद्यार्थियों की संख्या।'*

हाथ में वस्तुएँ : बच्चों को एक हाथ में अधिक वस्तुएँ और दूसरे हाथ में कम वस्तुएँ पकड़ने के लिए कहें।

पक्ष बदलना : 2 घेरे बनाएँ और दो बच्चों को एक घेरे में और पाँच बच्चों को दूसरे घेरे में खड़ा होने के लिए कहें। प्रश्न पूछें, *''हम इस घेरे में (दो वाले की ओर इशारा करते हुए) अधिक और दूसरे में कम कैसे कर सकते हैं?''* क्या विद्यार्थी इसे हल करने के लिए एक से अधिक तरीक़े खोजते हैं?

खुले सवाल (Open-ended questions) पूछें : *''क्या आप उस संख्या से अधिक दिखा सकते हैं? आप कितनी तरह से अधिक दिखा सकते हैं?''*

''क्या आप उस संख्या से कम दिखा सकते हैं? आप कितनी तरह से कम दिखा सकते हैं?''

इन दोनों टोकरियों में वस्तुओं की संख्या समान करने के लिए हमें क्या करना चाहिए? बच्चों में सन्तुलन का अन्तर्निहित बोध होता है और वे विभिन्न सुझाव देंगे।

चित्र-19 क

चित्र-19 ख

नोट : समूहों की तुलना करते समय आपसी सम्बन्धों पर ज़ोर दिया जाना चाहिए। 'क्रेयॉन की तुलना में पेंसिलें अधिक हैं। इसलिए, पेंसिलों की तुलना में क्रेयॉन कम हैं।'

एक-एक संगति का उपयोग : बच्चे दृश्य बोध के माध्यम से छोटे समूहों में 'अधिक' या 'कम' की पहचान करने में सक्षम हो सकते हैं। हालाँकि, जैसे-जैसे संख्याएँ बढ़ती हैं, एक-एक संगति का उपयोग ही किया जाना चाहिए।

नोट : स्कूल आने से पहले, बच्चे वस्तुओं की एक छोटी संख्या (आमतौर पर 10 तक) गिनना सीख जाते हैं। स्कूल में, गिनती की इस समझ को संरचित शिक्षण विधियों के माध्यम से और मज़बूत किया जाता है। गतिविधि-4, 5 और 6 को त्वरित गणना गतिविधियों-1, 2 और 3 से पहले करवाया जा सकता है। गतिविधियों के लिए किसी निश्चित क्रम का पालन करना आवश्यक नहीं है, क्योंकि कुछ गतिविधियाँ समानान्तर रूप से आगे बढ़ सकती हैं।

गतिविधि-7

उद्देश्य : गिनने की प्रभावी तकनीकें विकसित करना।

सामग्री : वस्तुओं का सेट (रंगीन मोती/ गुटके)

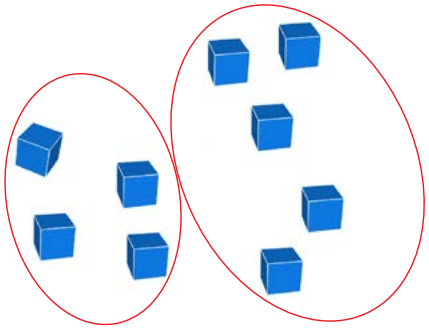
बच्चे अपने विविध अनुभवों से यह समझने लगते हैं कि वस्तुओं को गिनने का क्रम कुल संख्या को प्रभावित नहीं करता है। इस अवधारणा को 'क्रम की अप्रासंगिकता का सिद्धान्त' (order irrelevance principle) के रूप में जाना

जाता है। इसे समझने के लिए, बच्चों को अलग-अलग तरीक़ों से व्यवस्थित एक ही सेट को गिनने के कई अवसरों की आवश्यकता होती है, जिससे उन्हें यह एहसास होता है कि वस्तुओं को गिनने का क्रम बदलने से कुल संख्या नहीं बदलती है। शिक्षक फ़र्श पर टाइलों की संख्या, जूतों के रैक पर रखे जूतों या अलमारियों पर रखी किताबों जैसी वस्तुओं की पंक्तियों को कई दिशाओं से गिनने का अनुभव प्रदान कर सकते हैं।

हालाँकि गिनती आमतौर पर नए सिरे से शुरू होती है (1 से लेकर सेट के अन्त तक)। प्रभावी गिनती में अकसर पूर्व ज्ञान या रणनीतियों जैसे कि विभाजन (partitioning), आगे या पीछे की गिनती और समूहन (grouping) का उपयोग शामिल होता है।

इन रणनीतियों के उदाहरणों में शामिल हैं :

- विभाजन और गिनती
- मिलान और गिनती
- समूहन और गिनती
- सीधी और उल्टी गिनती करें



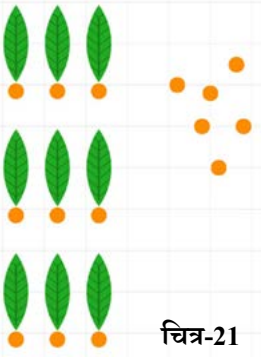
चित्र-20

विभाजन और गिनती : एक बच्चा वस्तुओं के समूह को छोटे सेटों में विभाजित कर सकता है और संख्या तक पहुँचने के लिए 'बोधात्मक त्वरित गणना' का उपयोग कर सकता है।

उदाहरण : दिए गए गुटकों के संग्रह को गिनने के लिए, बच्चा मानसिक रूप से इसे दो सेटों में विभाजित कर सकता है और 9 तक पहुँच सकता है।

मिलान और गिनती

कितने बेर (berries) हैं?

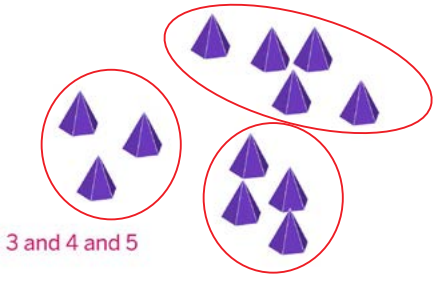


चित्र-21

एक बच्चा यह पहचान सकता है कि यहाँ 9 पत्तियाँ हैं और 9 बेर जुड़े हुए हैं और फिर शेष बेरों को गिनकर 15 तक पहुँच सकता है। (9 और 6 मिलकर 15 होते हैं।)

समूहन और गिनती

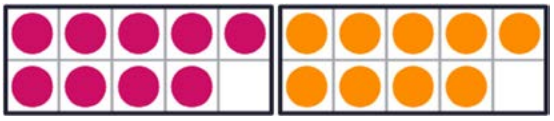
चित्र-22 में कितनी आकृतियाँ हैं? बच्चा उन्हें 3 समूहों के रूप में मान सकता है जिनमें क्रमशः 3, 4 और 5 आकृतियाँ हैं और उन्हें एक साथ गिन सकता है, यह पहचानते हुए कि 3 और 4 मिलकर 7 होते हैं और फिर 5 जोड़ना या 5 और 4 को 9 के रूप में पहचानना और 3 जोड़ना।



चित्र-22

उल्टी और सीधी गिनती

चित्र-23 में कितने गोले हैं?



चित्र-23

एक बच्चा इस विन्यास (configuration) को 9 और 9 के रूप में पहचान सकता है और 9 के आगे 10, 11, 12,..... 18 के रूप में आगे की गिनती कर सकता है।

या वह दोनों फ्रेमों को 10 और 10 के रूप में पहचान सकता है और 20, 19, 18 के रूप में 2 क़दम पीछे जा सकता है।

इन अवधारणाओं को विविध सामग्रियों के माध्यम से प्रदर्शित करना अच्छा होता है। इस विचार को पुख़्ता करने के लिए 'गणितमाला' का उपयोग किया जाना चाहिए।

आगे की गिनती में, ध्यान दें कि क्या बच्चे समूह को पहचान रहे हैं और आगे गिन रहे हैं।

नोट : प्रारम्भिक चरण में 'जोड़/घटा' शब्द और '+ /-' प्रतीकों के उपयोग से बचें।

गतिविधि-8

उद्देश्य : पैटर्न का उपयोग करके गिनती करना।

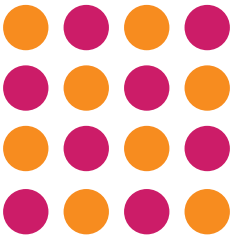
चित्र-25

चित्र-24 में दिखाए गए अनुसार सरल पैटर्न बनाएँ और बच्चों को आकृतियों को गिनने के लिए कहें। बच्चे पैटर्न पहचानने और वर्गीकरण के अपने कौशलों का उपयोग कर सकते हैं।

कितने गुलाबी गोले हैं? कितने नारंगी गोले हैं?

दाएँ से बाएँ, बाएँ से दाएँ, ऊपर से नीचे आदि पैटर्न बनाएँ।

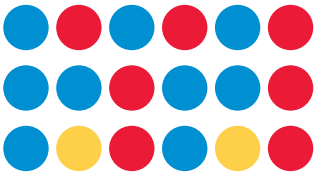
विभिन्न प्रकार के पैटर्न, किनारी पर बने पैटर्न और बढ़ते पैटर्न (growing patterns) का पता लगाएँ।



चित्र-24

चित्र-26 एक अधिक जटिल पैटर्न दिखाता है! कितने नीले हैं? कितने लाल हैं? कितने पीले हैं?

बच्चों से यह बताने के लिए कहें कि वे उत्तर तक कैसे पहुँचे।



चित्र-26

गतिविधि-9

उद्देश्य : दैनिक अनुभवों के माध्यम से गिनने का कार्य।

कक्षा : उपस्थित विद्यार्थियों की संख्या गिनना, दिन के अन्त में कक्षा व्यवस्थित करते समय आकृतियों, मोतियों जैसी सामग्रियों को गिनना।

शिक्षक सीटों के लिए नम्बर लेबल बना सकते हैं।

कैलेंडर पर किसी विशेष कार्यक्रम के लिए शेष दिनों की गिनती करना या घड़ी पर घण्टों की गिनती करना, ऐसी दृश्य सामग्रियों (जैसे कैलेंडर और घड़ी) के माध्यम से गिनने के तरीक़े हैं जो अधिकांश कक्षाओं में मौजूद होते हैं।

निम्नलिखित रटकर गिनने (rote counting) के तरीक़े विद्यार्थियों को सही क्रम में संख्या-नाम सीखने में मदद करते हैं।

- विद्यार्थियों से एक से नौ तक सीधी और उल्टी गिनती करवाएँ।
- उन्हें किसी दी गई संख्या से आगे गिनने दें।
- उन्हें दी गई दो संख्याओं के बीच की गिनती करने दें।

सामान्य खेल : साँप-सीढ़ी, लुका-छिपी में गिनती और 10 से 20 तक की संख्याओं के साथ हॉपस्कॉच (कुंटे बिल्ले/किथ-किथ/लंगड़ी) के स्थानीय संस्करण।

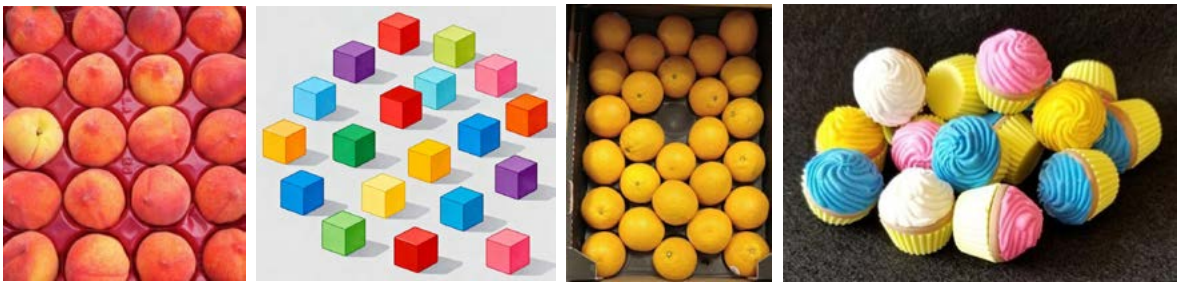
गतिविधि-10

उद्देश्य : विद्यार्थियों को नई स्थितियों में गिनने के तरीक़े खोजने के लिए प्रोत्साहित करना।

सामग्री : 10 से 20 के बीच की संख्या वाली वस्तुओं के चित्र।

ऐसी वस्तुओं के चित्र एकत्र करें जो किसी भी तरीक़े से व्यवस्थित हो भी सकती हैं और नहीं भी। उन्हें गिनने की चुनौती दें। देखें कि बच्चे किन रणनीतियों का उपयोग कर रहे हैं।

पूछें, *"वहाँ कितनी वस्तुएँ हैं? मुझे दिखाओ कि तुमने उन्हें कैसे गिना। तुमने इस बात का ध्यान कैसे रखा कि किन वस्तुओं की गिनती हो चुकी है?"*



चित्र-27

चित्र-28 फलों के तीन समूह दिखाता है। किन दो समूहों को मिलाकर 10 फल होंगे?

चित्र-28

बच्चे गिनती का आनन्द लेते हैं और शिक्षक सार्थक, मनोरंजक गतिविधियाँ और सन्दर्भ बना सकते हैं जिनमें बच्चे अपने गिनने के कौशल का अभ्यास करें।

गिनती विभिन्न स्थितियों में और विभिन्न प्रकार की वस्तुओं के साथ हो सकती है। कुछ सन्दर्भों में स्थिर खिसकाई जा सकने वाली वस्तुएँ शामिल होती हैं (जैसे गुटका या पेंसिल) जिन्हें बच्चे गिनती की गतिविधियों के दौरान हाथ से पकड़कर इस्तेमाल कर सकते हैं। अन्य में गतिशील वस्तुएँ शामिल हो सकती हैं, जैसे सड़क पर गुज़रने वाले वाहन। गिनती खेलों से भी सम्बन्धित हो सकती है, जैसे कि गेंद को कितनी बार उछाला जाता है। यहाँ कुछ उदाहरण दिए गए हैं :

- बच्चों को सड़क पर गुज़रने वाली साइकिलों जैसी वस्तुओं को गिनने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है।
- ऐसी वस्तुओं को गिनते समय जिन्हें हटाया नहीं जा सकता (उदाहरण के लिए, वर्कशीट में दिखाई गई वस्तुएँ), बच्चों के लिए यह ध्यान रखना कठिन हो जाता है कि किन वस्तुओं की गिनती हो चुकी है। यहाँ निशान लगाने या रंग भरने जैसी रणनीतियों का उपयोग करना महत्त्वपूर्ण है।
- क्रियाओं (जैसे छलाँग, ताली या उछाल) को गिनना और भी अमूर्त है, क्योंकि ये घटनाएँ कोई दृश्य या स्पर्शनीय प्रमाण नहीं छोड़ती हैं। प्रत्येक घटना को रिकॉर्ड करना [शायद गिनती के निशानों (tally marks) के माध्यम से] बच्चों को याद रखने में मदद कर सकता है।

ये गतिविधियाँ बच्चों को ठोस वस्तुओं की गणना (concrete object counting) से अमूर्त गणना (abstract counting) और बाद में डेटा हैंडलिंग (data handling) की ओर बढ़ने में मदद करेंगी।

गिनती की अवधारणा का परिचय आमतौर पर प्रारम्भिक बाल्यावस्था के शिक्षा कार्यक्रमों में शुरू होता है। कई भारतीय राज्यों में, बच्चे कक्षा-1 में प्रवेश करने से पहले नौ तक की संख्याओं से परिचित हो जाते हैं। कक्षा-1 के दौरान, वे गिनती, संख्याओं और अंकों की अपनी समझ विकसित करना जारी रखते हैं – 20 तक की संख्याओं से शुरू करके धीरे-धीरे 99 की ओर बढ़ते हुए।

संख्याओं को सिखाते और सीखते समय, शिक्षकों को अधिगम के निर्धारित प्रतिफलों से कड़ाई से बँधे रहने की आवश्यकता नहीं है। यदि बच्चे अपनी तैयारी दिखाते हैं, तो शिक्षक उनके अधिगम को निर्धारित परिणामों से आगे बढ़ा सकते हैं।

यह लेख प्रारम्भिक बाल्यावस्था या फ़ाउण्डेशनल स्टेज के साथ-साथ कक्षा-1 पर भी ध्यान देता है। कक्षा-1 के शिक्षक संख्या अवधारणाओं को दोहराने के लिए 'त्वरित गणना' गतिविधियों का उपयोग कर सकते हैं। छोटी संख्याओं (जैसे 8 या 9) की ज्यामितीय व्यवस्थाओं में पैटर्न को पहचानना इस प्रक्रिया में सहायक होता है। बच्चे हैंडस-ऑन अनुभवों के माध्यम से स्वाभाविक रूप से इस क्षमता को विकसित करते हैं – जैसे पेगबोर्ड पर पेग व्यवस्थित करना, टाइल वर्ग बनाना या सममित बिन्दु पैटर्न बनाना। हालाँकि, इस कौशल के उभरने को किसी चरण-विशिष्ट अधिगम के प्रतिफल के रूप में निर्धारित नहीं किया जा सकता है; यह धीरे-धीरे और अलग-अलग शिक्षार्थियों के लिए अलग-अलग चरणों में विकसित होता है। सीखने को अधिक आकर्षक बनाने के लिए शिक्षक इन गतिविधियों को खेलों के रूप में प्रस्तुत करना भी चुन सकते हैं।

नोट : इस लेख में कुछ चित्रों को बनाने के लिए AI का उपयोग किया गया है।

आभार :

https://nrich.maths.org/articles/subitising

https://nrich.maths.org/eyfs-activities/explanation-our-eyfs-format

Reference:

How Much or Till What: When and Why?
Review of Ten-Frames http://bit.ly/4dja81t

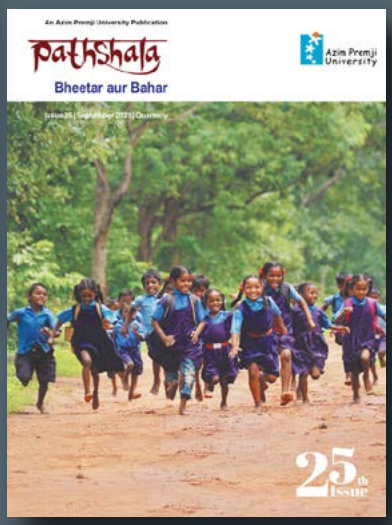
पद्मप्रिया शिराली

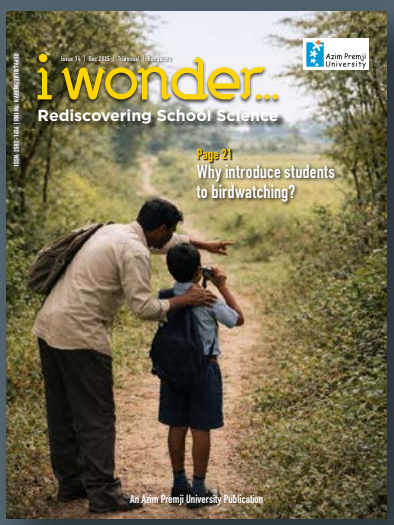
पद्मप्रिया शिराली वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर का हिस्सा हैं, जहाँ वे 1983 से कार्यरत हैं। उन्होंने वहाँ गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषयों को पढ़ाया है। 1990 के दशक में, उन्होंने दिवंगत श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वे उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलीमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को तैयार किया था, जिसे 'स्कूल इन अ बॉक्स' (School in a Box) के नाम से जाना जाता है। वर्तमान में वे एनसीईआरटी के पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

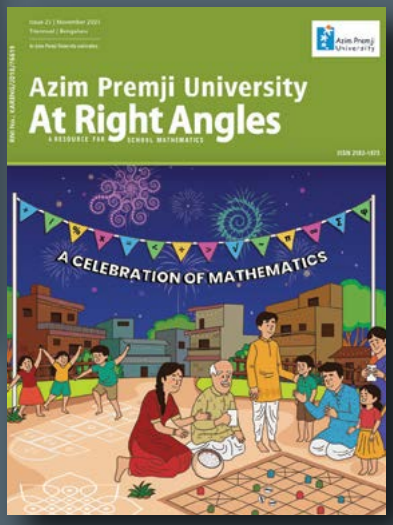
Azim Premji University

Azim Premji University Magazines





Scan here to subscribe to At Right Angles for free!



To know more about our other publications, write to us at publications@apu.edu.in

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

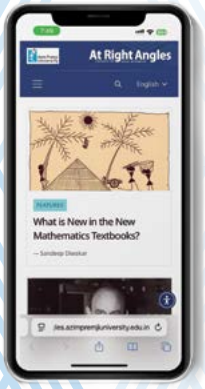
गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन, गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

Azim Premji University

क्या आपने एट राइट एंगल्स का डिजीटल एडीशन देखा है?

यह गणित के स्कूल शिक्षकों के लिए है।



आपका विश्वसनीय शिक्षण संसाधन अब बस एक क्लिक की दूरी पर है...

- कभी भी, कहीं भी बेहतर पहुँच
- एक ही स्थान पर तीन भाषाओं में लेख
- शेयर और डाउनलोड करना आसान
- इंटरैक्टिव फीचर्स

देखने के लिए स्कैन करें

Azim Premji University
Survey No. 66, Burugunte Village,
Bikkanahalli Main Road, Sarjapura
Bengaluru – 562125

azimpremjiuniversity.edu.in

Facebook: /azimpremjiuniversity Instagram: @azimpremjiuniv X: @azimpremjiuniv