Translation of Teacher's Diary on Classroom Assessment - III
: Sneha Titus_From_Azim Premji University At Right Angles_July,2014

कक्षा आकलन पर एक शिक्षक की डायरी : भाग-3

स्नेहा टाइटस

की-वर्ड : *सतत और व्यापक मूल्यांकन; सहयोगात्मक; परियोजना; पेपर फोल्डिंग; ओरिगामी; टेनग्राम; चतुर्भुज; त्रिभुज; क्षेत्रफल; क्षेत्रमिति; मूर्त; अमूर्त*

सीसीई के मेरे पिछले लेख में, मैंने रचनात्मक आकलन के हिस्से के रूप में एक प्रोजेक्ट को शामिल किया था। व्यक्तिगत और मिलकर काम करने, दोनों को प्रेरित करने के लिए मैंने इन दोनों घटकों को एक ही प्रोजेक्ट में शामिल करने की महत्त्वाकांक्षी योजना बनाई थी। अब वह समय था जब मुझे अपनी योजनाओं को वास्तविक रूप देना था। ऐसे उपयुक्त प्रोजेक्ट की खोज में जिनमें अंकगणित, ज्यामिति और बीजगणित व्यापक रूप से शामिल हों और जिनके केन्द्र में क्षेत्रमिति हो, मेरा ध्यान स्वाभाविक रूप से टेनग्राम की ओर गया। यह शिक्षकों और प्रोजेक्ट बनाने वालों दोनों का पसन्दीदा विषय है। मैंने सोचा कि क्या मैं इस प्रोजेक्ट के अवसरों का लाभ उठाते हुए एक अलग रास्ते पर चल सकती हूँ। तब मुझे मेरे एक साथी ने दिखाया कि एक A4 शीट से पेपर फोल्डिंग की मदद से किस प्रकार टेनग्राम बना सकते हैं। इस प्रोजेक्ट को मैंने उनकी मदद से तैयार किया।

इस प्रोजेक्ट को बनाने के मुख्य कारण इस प्रकार थे :

1. विद्यार्थियों को 'मूर्त से अमूर्त' की ओर ले जाने का मेरा लक्ष्य : जैसे-जैसे विद्यार्थियों ने पेपर कटिंग और उसके बाद पेपर फ़ोल्डिंग पर काम किया, वे विमाओं को बदलते हुए देख पा रहे थे। जो विद्यार्थी विभिन्न चरणों पर अपने प्रोजेक्ट की विमाओं का मापन करने में सहज थे, उन्हें कक्षा में साथियों के साथ की जाने वाली चर्चाओं ने संख्याओं का उपयोग करने के स्थान पर सामान्यीकरण करने और बीजगणितीय पदों का उपयोग करने में सक्षम बनाया। मैं निश्चित रूप से कक्षा में होने वाली चर्चाओं के माध्यम से इस प्रक्रिया में मदद करूँगी।
2. बीजगणित पढ़ने की शुरुआत कर रहे विद्यार्थियों के लिए बीजगणितीय सरलीकरण कभी आसान नहीं रहा है। बीजगणितीय सरलीकरण से क्षेत्रफल की गणना करने और वास्तव में गणनाओं की जाँच करने से विद्यार्थियों को बहुत मदद मिलेगी।
3. चतुर्भुजों के गुणों को प्राय: केवल याद किया जाता है। देखकर समझने की बजाय करके समझने के विचार से मैंने विद्यार्थियों को चतुर्भुज बनाने के लिए कहा।

4. काग़ज़ के साथ काम करने और फिर द्विआयामी सामान्यीकरण करने से विद्यार्थियों को उनकी स्थानिक क्षमताओं को बेहतर बनाने में मदद मिलेगी।

चूँकि कक्षा के लिए पेपर फ़ोल्डिंग नया काम था, मैंने अन्दर की ओर मोड़ने (खाई मोड़) और बाहर की ओर मोड़ने (पहाड़ मोड़) को समझाने में पर्याप्त समय लगाया। फ़ोल्डिंग से जुड़ी सममिति पर भी हमने समूह में चर्चा की। मैं जानती थी कि यह प्रोजेक्ट आसान नहीं है और विद्यार्थियों से व्यक्तिगत रूप से काम करने को कहने पर वे बाहरी मदद तलाशेंगे। पूरे प्रोजेक्ट के दौरान, मैंने विद्यार्थियों को चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित किया और मैं भी समय-समय पर पूरी कक्षा के साथ चर्चा करती रही ताकि विद्यार्थी अपनी कठिनाइयाँ साझा कर सकें। चूँकि प्रत्येक समूह में ऐसे विद्यार्थी थे जो एक जैसे प्रोजेक्ट पर काम कर रहे थे, तो वे एक-दूसरे से अपने नोट्स साझा कर सकते थे और एक-दूसरे की मदद कर सकते थे। मैंने विद्यार्थियों को उनके प्रोजेक्ट की प्रगति का दस्तावेज़ीकरण करने के लिए भी कहा, उन्हें समझाया कि यह उन्हें 'सही उत्तर' पाने की बजाय अधिक अंक (credit) दिलवाने में मदद करेगा।

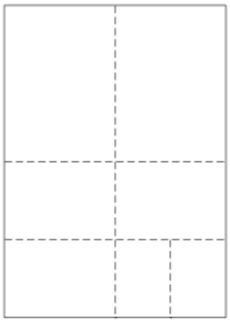
समूह कार्य : 7 विद्यार्थियों के प्रत्येक समूह को एक A4 शीट दी गई और उन्हें **चित्र-1** में दिखाए अनुसार उसे 2 चौथाई भाग, 3 आठवें भाग और 2 सोलहवें भाग में बाँटने को कहा गया। प्रत्येक विद्यार्थी ने पेपर का एक-एक टुकड़ा ले लिया। समूह को नीचे दिए कार्य करने को कहा गया :

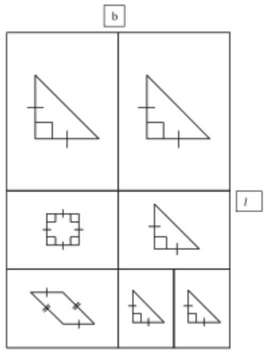
i. सभी टुकड़ों का योग 1 है, यह गणना दर्शाएँ।
ii. A4 आकार की शीट की लम्बाई l और चौड़ाई b का अनुपात ज्ञात करें।
iii. निम्न पर चर्चा करें और इन्हें बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें :

$$\frac{l}{2}, \frac{b}{2}, \frac{l}{4}, \frac{b}{4}, \frac{l}{8}, \frac{b}{8}$$

व्यक्तिगत कार्य : समूह के प्रत्येक विद्यार्थी को काग़ज़ की शीट के साथ निम्नलिखित निर्देश दिए गए :

i. **विद्यार्थी 1 और 2** : A4 शीट के चौथाई हिस्से से एक त्रिभुज बनाओ। (प्रक्रिया : त्रिभुज, चित्र-3)
ii. **विद्यार्थी 3** : A4 शीट के आठवें हिस्से से एक त्रिभुज बनाओ। (प्रक्रिया : त्रिभुज, **चित्र-3**)
iii. **विद्यार्थी 5 और 6** : A4 शीट के सोलहवें हिस्से से एक त्रिभुज बनाओ। (प्रक्रिया : त्रिभुज, **चित्र-3**)
iv. **विद्यार्थी 4** : A4 शीट के आठवें हिस्से से एक वर्ग बनाओ। (प्रक्रिया : वर्ग, चित्र-4)
v. **विद्यार्थी 7** : A4 शीट के आठवें हिस्से से एक समान्तर चतुर्भुज बनाओ। (प्रक्रिया : समान्तर चतुर्भुज, **चित्र-5**)



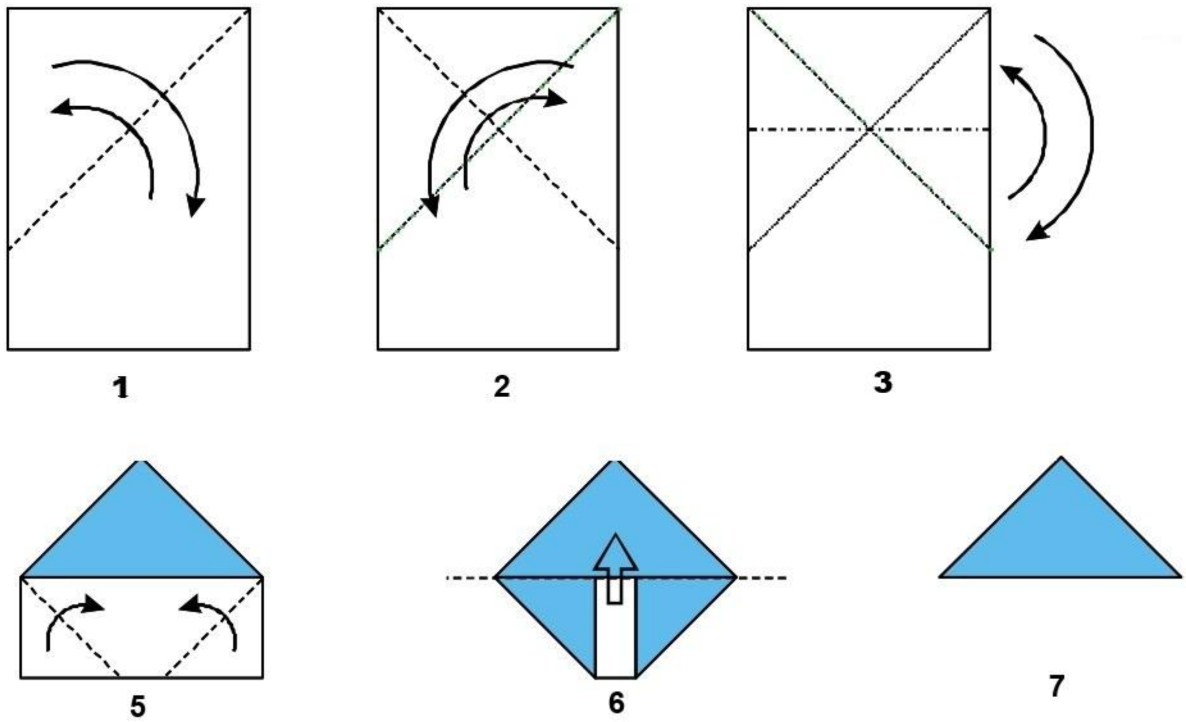


चित्र-1 : A4 शीट को बिन्दुदार रेखाओं से 7 हिस्सों में काटें – 2 एक-बराबर बड़े आयत में, 3 एक-बराबर मध्यम आयत में और 2 एक-बराबर छोटे आयत में।

चित्र-2

शीट मिलने के बाद समूह के प्रत्येक विद्यार्थी द्वारा हल किए जाने वाले सामान्य प्रश्न (इनके उत्तर आगे दिए गए शिक्षक नोट्स में हैं।)

1. यदि मूल A4 शीट की लम्बाई l और चौड़ाई b हो, तो आपको दिए गए शीट के हिस्से की विमाएँ क्या हैं? अपना उत्तर l और b के पदों (terms) में दें और यह बताएँ कि इनमें से कौन छोटा और कौन बड़ा है?
2. आपकी शीट के हिस्से का क्षेत्रफल कितना है?
3. आपकी शीट के हिस्से और मूल A4 शीट के क्षेत्रफल का अनुपात कितना है?
4. काग़ज़ मोड़कर अधिकांश आकृतियाँ बनाने के निर्देशों में आपको एक वर्ग बनाकर शुरुआत करनी होती है। आपकी शीट के हिस्से से बनने वाले सबसे बड़े सम्भावित वर्ग की विमाएँ l और b के पदों में क्या हैं?
5. इस वर्ग को बनाने के लिए आपको एक छोटे आयताकार हिस्से को मोड़ना होगा – l और b के पदों में इस आयत की विमाएँ क्या हैं?



चित्र-3 : त्रिभुज बनाने की प्रक्रिया

त्रिभुज बनाने की प्रक्रिया : चित्र-3 के चित्रों के क्रमांक के अनुसार नीचे दिए चरणों को पूरा करें-

(1) बिन्दुदार रेखा पर काग़ज़ को अन्दर की ओर मोड़कर वापस खोलें। (खाई मोड़)

(2) बिन्दुदार रेखा पर पुन: काग़ज़ को अन्दर की ओर मोड़कर खोलें। (खाई मोड़)

(3) बिन्दुदार रेखा पर काग़ज़ को बाहर या पीछे की ओर मोड़कर खोलें। (पहाड़ मोड़)

(4) इस चरण का चित्र नहीं है। कागज की रंगीन साइड को ऊपर करें और उसे क्षैतिज व तिरछी रेखाओं पर मोड़कर चित्र-5 में दिखाई आकृति प्राप्त करें।

(5) बिन्दुदार रेखा पर अन्दर की ओर मोड़ें। (खाई मोड़)

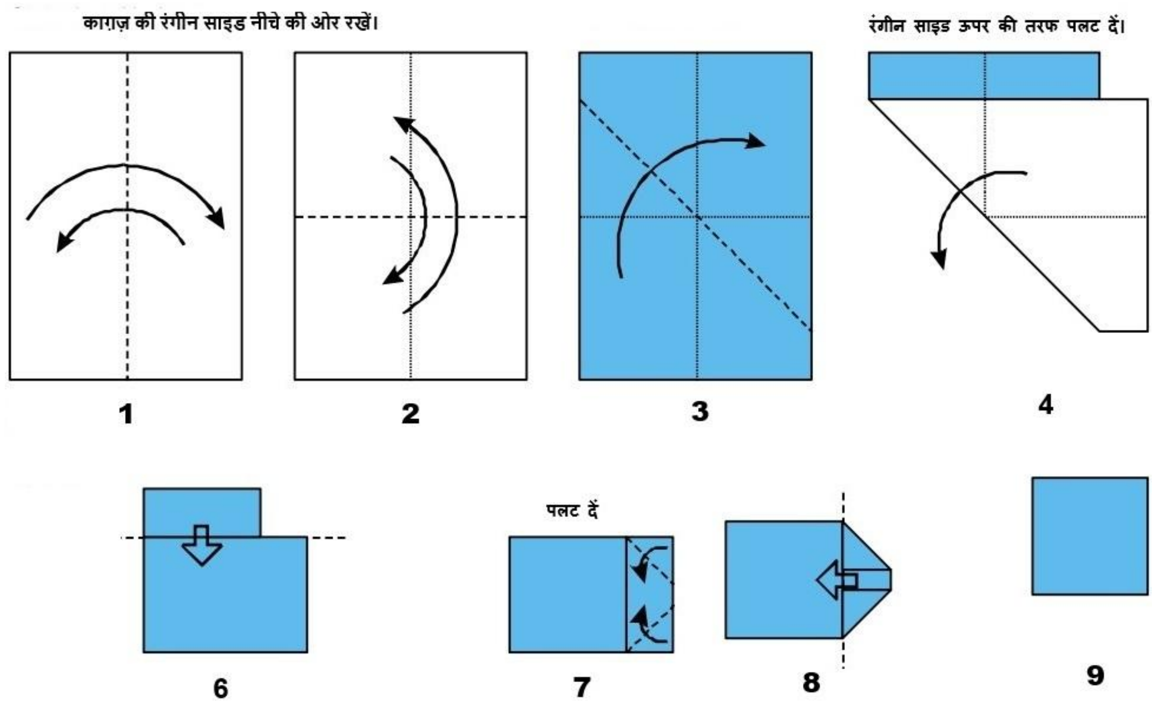
(6) बिन्दुदार रेखा पर मोड़ें और नीचे के हिस्से को ऊपर के त्रिभुज के अन्दर डालें ताकि आकृति खुले नहीं।

(7) आकृति पूरी हुई।

त्रिभुज बनाने वाले विद्यार्थियों द्वारा हल किए जाने वाले विशिष्ट प्रश्न (इनके उत्तर आगे दिए शिक्षक नोट्स में हैं)।

1. आपके द्वारा चिन्हित वर्ग का क्षेत्रफल l और b के पदों में दो तरीक़ों से प्राप्त करें। अपनी गणना दिखाएँ।
2. चरण-3 में दो चुन्नट (क्रीज़) पर पहाड़ मोड़ किया गया है। इस मोड़ से (आयत के ऊपर) एक त्रिभुज कैसे बना?
3. जब अतिरिक्त काग़ज़ को मोड़कर अन्दर खोंसा गया, तो आपको किस प्रकार का त्रिभुज मिला?
4. इस त्रिभुज के कोणों की माप क्या होगी?

5. इस त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई क्या होगी? (संकेत : इसके लिए आपको पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करना होगा।)
6. दो अलग-अलग तरीक़ों से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।



चित्र-4 : वर्ग बनाने की प्रक्रिया

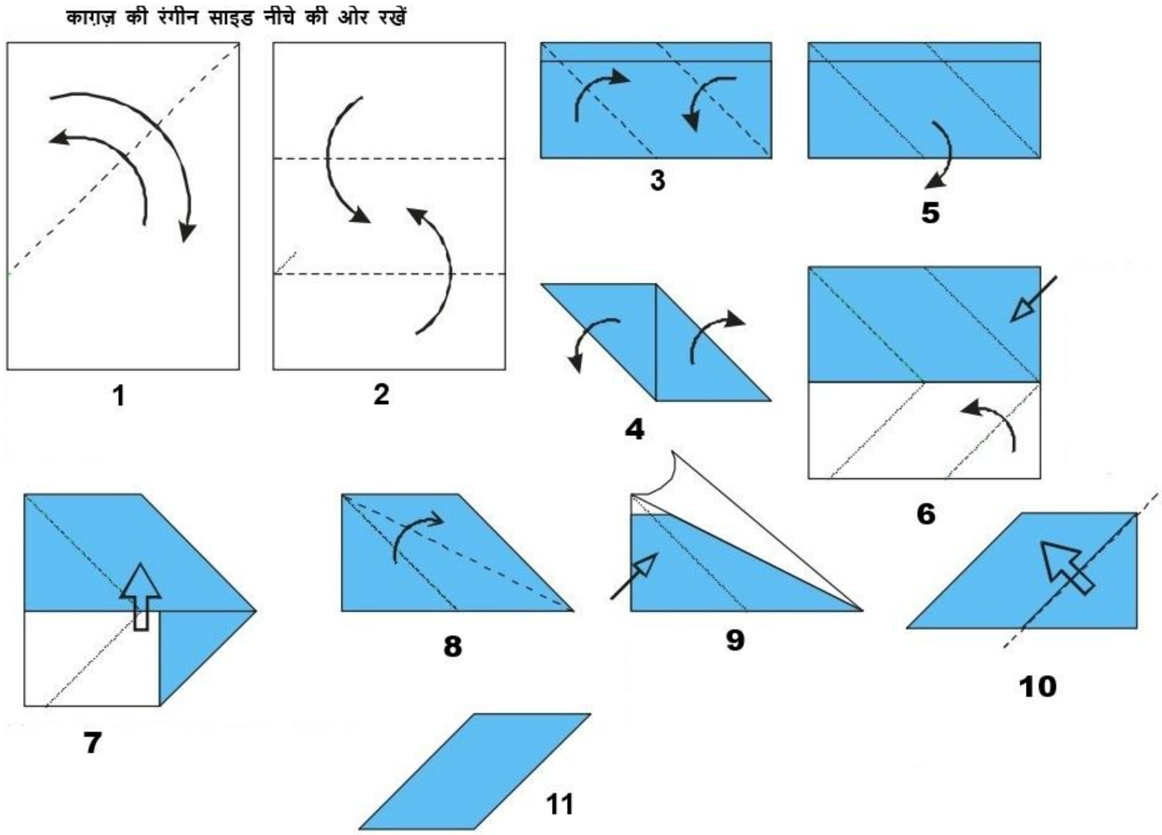
वर्ग बनाने की प्रक्रिया : चित्र-4 के चित्रों के क्रमांक के अनुसार नीचे दिए चरणों को पूरा करें-

(1) बिन्दुदार रेखा पर काग़ज़ को अन्दर की ओर मोड़कर वापस खोलें। (खाई मोड़)
(2) बिन्दुदार रेखा पर पुन: अन्दर की ओर मोड़कर वापस खोलें। (खाई मोड़)
(3) बिन्दुदार रेखा पर अन्दर की ओर मोड़ें। (खाई मोड़)
(4) वापस खोलें।
(5) इस चरण का चित्र नहीं है। अगली आकृति प्राप्त करने के लिए तिरछी रेखा के साथ-साथ क्षैतिज और उर्ध्वाधर रेखाओं पर मोड़ें।
(6) बिन्दुदार रेखा पर मोड़ें और ऊपर की ओर मोड़ें।
(7) बिन्दुदार रेखा पर अन्दर की ओर मोड़ें। (खाई मोड़)
(8) बिन्दुदार रेखा पर मोड़ें और बगल के टुकड़े को वर्ग की ऊपरी सतह के टुकड़े को वर्ग की ऊपरी सतह के अन्दर खोंस दे ताकि आकृति खुले नहीं।
(9) आकृति पूरी हुई।

वर्ग बनाने वाले विद्यार्थियों द्वारा हल किए जाने वाले विशिष्ट प्रश्न (इनके उत्तर आगे दिए शिक्षक नोट्स में हैं)।

1. दिखाई गई तीन चुन्नट (क्रीज़) एक बिन्दु से होकर जाती हैं। यह कौन-सा बिन्दु है?

2. वर्ग बनाने की प्रक्रिया में बीच वाले एक चतुर्भुज के दोनों ओर दो आयत चिन्हांकित करना होता है। इन दो आयत की विमाएँ क्या हैं?
3. चरण-3 में खाई मोड़ उर्ध्वाधर और क्षैतिज रेखा के साथ कितना कोण बनाता है?
4. ये कोण **चित्र-4** के चरण-4 और चरण-5 के खाई मोड़ को बनाना किस प्रकार सम्भव करते हैं?
5. **चित्र-4** के चरण 5-9 में खाई मोड़ दोनों ओर दो आयत के साथ एक चतुर्भुज बनाता है। इस चतुर्भुज की भुजाओं की लम्बाई कितनी है?
6. यह कौन-सा चतुर्भुज है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।
7. इसका क्षेत्रफल कितना है?



चित्र-5 : समान्तर चतुर्भुज बनाने की प्रक्रिया

समान्तर चतुर्भुज बनाने की प्रक्रिया : चित्र-5 के चित्रों के क्रमांक के अनुसार नीचे दिए चरणों को पूरा करें-

(1) काग़ज़ को बिन्दुदार रेखा पर हल्के से मोड़ें। खाई मोड़ और निचले हिस्से पर क्रीज बनाएँ।

(2) पहले ऊपर और फिर नीचे की बिन्दुदार रेखा पर खाई मोड़ बनाएँ।

(3) पहला समान्तर चतुर्भुज दिखाने के लिए दोनों बिन्दुदार रेखाओं पर खाई मोड़ बनाएँ।

(4) वापस खोलें।

(5) फ्लैप वापस खोलें।

(6) ऊपर के त्रिभुजाकार हिस्से को क्रीज मोड़ पर बाहरी फ्लैप के बीच डालें और नीचे के त्रिभुज को खाई मोड़ में मोड़ें।

(7) बिन्दुदार रेखा पर मोड़ें और नीचे के फ्लैप को ऊपर के समलम्ब चतुर्भुज वाली सतह के अन्दर डालें।

(8) ऊपर की सतह को बिन्दुदार रेखा से अलग करें।

(9) नीचे के त्रिभुजाकार हिस्से को क्रीज वाले फ्लैप के बीच में डालें और ऊपर के फ्लैप को छोड़ दें।

(10) बिन्दुदार रेखा पर मोड़ें और त्रिभुजाकार फ्लैप को समान्तर चतुर्भुज की सतहों के बीच फँसा दें, ताकि आकृति खुली रहे।

(11) आकृति पूरी हुई।

समान्तर चतुर्भुज बनाने वाले विद्यार्थियों द्वारा हल किए जाने वाले विशिष्ट प्रश्न

1. जब शीट के हिस्से को तीन भागों में मोड़ा जाता है, तो नीचे की ओर बनने वाले बड़े आयत की विमाएँ क्या होंगी (चरण-3 में)?
2. इस आयत का क्षेत्रफल l और b के पदों में दो अलग-अलग तरीक़ों से निकालें। अपनी गणना दिखाएँ।
3. इस आयत की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात कितना है?
4. दो त्रिभुजों को मोड़ने पर एक ऐसी आकृति कैसे मिलती है जिसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर और समान्तर हैं?
5. ये मोड़ देने के दौरान कौन-से अलग-अलग बहुभुज बनते हैं? उनका चित्र बनाएँ या फोटो चिपकाएँ।

आकलन

विद्यार्थियों को जब उनके व्यक्तिगत प्रोजेक्ट के आधार पर ग्रेड दिया जाना था, तब मैंने अन्तिम परिणाम को महत्त्व देने की बजाय प्रक्रिया पर ध्यान देने की योजना बनाई। मैंने तय किया कि मैं उन्हें अधिक-से-अधिक विवरण देने के लिए प्रेरित करूँगी। मैंने यह भी सोचा कि यदि विद्यार्थी पावरपॉइंट या चित्रों या आलेखों जैसे किसी अन्य रूप में अपना कार्य जमा करते हैं, तो मैं उसका स्वागत करूँगी। आकलन के लिए बनाए गए रूब्रिक का विवरण इस प्रकार है :

1. क्या विद्यार्थी व्यक्तिगत प्रोजेक्ट के लिए दिए गए निर्देशों को समझ सकता है?
2. क्या विद्यार्थी निर्देशों को समझने के लिए साथियों या शिक्षकों की मदद लेता है? (नोट : यह नकारात्मक या निगेटिव मार्किंग का बिन्दु नहीं है, मैं विद्यार्थियों को स्वयं प्रयास करने और अपने प्रस्तुतिकरण में यह दर्शाने के लिए प्रोत्साहित करती हूँ कि उन्होंने स्वयं कितना कार्य किया है और दूसरों से कितनी मदद ली है।)
3. व्यक्तिगत प्रश्नों के उत्तर देने के लिए क्या विद्यार्थी चित्र बनाने या तर्क देने में सक्षम रहा? क्या उत्तर सही है?
4. क्या विद्यार्थी एक से अधिक विधि से उत्तर प्राप्त करने में सक्षम रहा?

शीट मिलने के बाद समूह के प्रत्येक विद्यार्थी को हल करने के लिए दिए गए सामान्य प्रश्नों के उत्तर -

1. यदि मूल A4 शीट की लम्बाई l और चौड़ाई b हो, तो आपको दी गई शीट के हिस्से की विमाएँ क्या हैं? अपना उत्तर l और b के पदों में दें और यह बताएँ कि इनमें से कौन छोटा और कौन बड़ा है?

   विद्यार्थी 1 और 2

   $\frac{l}{2}$ और $\frac{b}{2}$, जिसमें $\frac{b}{2}$ छोटा है।

   विद्यार्थी 3, 4 और 7

   $\frac{l}{4}$ और $\frac{b}{2}$, जिसमें $\frac{l}{4}$ छोटा है।

   विद्यार्थी 5 और 6

   $\frac{l}{4}$ और $\frac{b}{4}$, जिसमें $\frac{b}{4}$ छोटा है।

2. आपको मिली शीट के हिस्से का क्षेत्रफल कितना है?

   विद्यार्थी 1 और 2 : $\frac{lb}{4}$

   विद्यार्थी 3, 4 और 7 : $\frac{lb}{8}$

   विद्यार्थी 5 और 6 : $\frac{lb}{16}$

3. शीट के आपके हिस्से और मूल A4 शीट के क्षेत्रफल का अनुपात कितना है?

   विद्यार्थी 1 और 2 : 1:4

   विद्यार्थी 3, 4 और 7 : 1:8

   विद्यार्थी 5 और 6 : 1:16

4. काग़ज़ मोड़कर अधिकांश आकृतियाँ बनाने के निर्देशों में आपको एक वर्ग बनाकर शुरुआत करनी होती है। आपके काग़ज़ के टुकड़े से बनने वाले सबसे बड़े सम्भावित वर्ग की विमाएँ l और b के पदों में क्या हैं?

   विद्यार्थी 1 और 2 : $\frac{b}{2} \times \frac{b}{2}$

   विद्यार्थी 3, 4 और 7 : $\frac{l}{4}$ और $\frac{l}{4}$

   विद्यार्थी 5 और 6 : $\frac{b}{4}$ और $\frac{b}{4}$

5. इस वर्ग को बनाने के लिए आपको काग़ज़ के एक छोटे आयताकार हिस्से को मोड़ना होगा – l और b के पदों में इस आयत की विमाएँ क्या हैं?

   विद्यार्थी 1 और 2 : $\frac{l-b}{2}$ और $\frac{b}{2}$

   विद्यार्थी 3, 4 और 7 : $\frac{l}{4}$ और $\frac{b}{2}$ - $\frac{l}{4}$

   विद्यार्थी 5 और 6 : $\frac{b}{4}$ और $\frac{l-b}{4}$

त्रिभुज बना रहे विद्यार्थियों को हल करने के लिए दिए गए विशिष्ट प्रश्नों के उत्तर -

1. आपके द्वारा चिन्हित वर्ग का क्षेत्रफल l और b के पदों में दो तरीक़ों से प्राप्त करें। अपनी गणना दिखाएँ।

    विद्यार्थी 1 और 2 : $\frac{b}{2} \times \frac{b}{2} = b^2/4$

    विद्यार्थी 3 : $\frac{l}{4} \times \frac{l}{4} = l^2/16$

    विद्यार्थी 5 और 6 : $\frac{b}{4} \times \frac{b}{4} = b^2/16$

    दूसरा तरीक़ा है शीट के मूल हिस्से के क्षेत्रफल में से आयताकार हिस्से का क्षेत्रफल घटाना। विद्यार्थियों को यह दर्शाने में सक्षम होना चाहिए कि दोनों ही विधियों से एक ही उत्तर मिलता है।

2. चरण-3 में दो क्रीज़ पर पहाड़ मोड़ किया गया है। इन मोड़ से (आयत के ऊपर) एक त्रिभुज कैसे बना?

    पहाड़ मोड़ वर्ग के विकर्णों पर बनाया गया है जो वर्ग को चार सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करते हैं। इससे दो त्रिभुज एक-दूसरे के अन्दर आ जाते हैं और दो एक-दूसरे को ढँक लेते हैं।

3. जब अतिरिक्त काग़ज़ को मोड़कर अन्दर कर दिया जाता है, तो आपको किस प्रकार का त्रिभुज मिलता है?

    यह समकोण-समद्विबाहु त्रिभुज है।

4. इस त्रिभुज के कोणों की माप क्या होगी?

    45°, 45°, 90°

5. इस त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई क्या होंगी? (संकेत : इसके लिए आपको पाइथागोरस प्रमेय का उपयोग करना होगा।)

    विद्यार्थी 1 और 2 : $b/2$, $\sqrt{2}/4 \times b$, $\sqrt{2}/4 \times b$

    विद्यार्थी 3 : $l/4$, $\sqrt{2}/8 \times l$, $\sqrt{2}/8 \times l$

    विद्यार्थी 5 और 6 : $b/4$, $\sqrt{2}/8 \times b$, $\sqrt{2}/8 \times b$

6. दो अलग-अलग तरीक़ों से त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

    सूत्र 'आधार गुणा ऊँचाई का आधा' त्रिभुज का क्षेत्रफल इस प्रकार देता है :

    विद्यार्थी 1 और 2 : $1/2 \times \sqrt{2}/4 \times b \times \sqrt{2}/4 \times b = b^2/16$

    विद्यार्थी 3 : $1/2 \times \sqrt{2}/8 \times l \times \sqrt{2}/8 \times l = l^2/64$

    विद्यार्थी 5 और 6 : $1/2 \times \sqrt{2}/8 \times b \times \sqrt{2}/8 \times b = b^2/64$

प्रत्येक त्रिभुज का क्षेत्रफल वर्ग के क्षेत्रफल का 1/4 है और उत्तर की जाँच इस तथ्य से या 'आधार गुणा ऊँचाई का आधा' की गणना से की जा सकती है। यहाँ त्रिभुज का आधार सबसे बड़ी भुजा है और ऊँचाई, अन्दर की ओर मोड़े गए आयत की ऊँचाई है।

वर्ग बना रहे विद्यार्थियों को हल करने के लिए दिए गए विशिष्ट प्रश्नों के उत्तर -

1. दिखाई गई तीन क्रीज़ एक बिन्दु से होकर जाती हैं। यह कौन-सा बिन्दु है?
   यह बिन्दु शीट के आयताकार टुकड़े का केन्द्र है।
2. वर्ग बनाने की प्रक्रिया में बीच वाले एक चतुर्भुज के दोनों ओर दो आयत चिन्हांकित करना होता है। इन दो आयत की विमाएँ क्या हैं?
   प्रत्येक की विमाएँ l/4 और ½ (b/2 - l/4) हैं।
3. चरण-3 में अन्दर की ओर मोड़ (खाई मोड़) उर्ध्वाधर और क्षैतिज रेखा के साथ कितना कोण बनाता है?
   45° और 135°
4. ये कोण चित्र-4 के चरण-4 और चरण-5 के खाई मोड़ को बनाना किस प्रकार सम्भव करते हैं?
   चूँकि विकर्ण एक-दूसरे के लम्बवत हैं, इसलिए खाई मोड़ के दोनों ओर के कोण बराबर हैं। इससे एक त्रिभुज को उससे सर्वांगसम बाहरी त्रिभुज के अन्दर मोड़ा जाना सम्भव हो पाता है।
5. चित्र-4 के चरण 5-9 में खाई मोड़ दोनों ओर दो आयत के साथ एक चतुर्भुज बनाता है। इस चतुर्भुज की भुजाओं की लम्बाई कितनी है?
   इस चतुर्भुज की भुजाओं की लम्बाई मूल आयत की छोटी भुजा की आधी है अर्थात यह l/8 है।
6. यह किस प्रकार का चतुर्भुज है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।
   यह एक वर्ग है, क्योंकि इसकी चारों भुजाएँ बराबर हैं (प्रत्येक की लम्बाई l/8 है) और ये परस्पर लम्बवत हैं (45°के कोण मोड़ने से दोगुने होते हैं)। साथ ही यह एक-दूसरे को ढँके समकोण-समद्विबाहू त्रिभुजों के चार युग्मों से मिलकर बना है।
7. इसका क्षेत्रफल कितना है?
   इसका क्षेत्रफल भुजाओं की लम्बाई का गुणनफल है। इसका क्षेत्रफल 1/4 (मूल आयत का क्षेत्रफल – आयताकार विस्तार का क्षेत्रफल) से भी प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात

   $$\tfrac{1}{4}\left({}^{lb}/_{8} - 2\left({}^{l}/_{4} \times \tfrac{1}{2}\left({}^{b}/_{2} - {}^{l}/_{4}\right)\right)\right)$$
   $$= {}^{lb}/_{32} - {}^{lb}/_{32} + {}^{l^2}/_{64} = {}^{l^2}/_{64}$$

   नोट : कक्षा-8 के केवल सक्षम बच्चे ही इस स्तर के बीजगणित हल करने का प्रयास कर सकते हैं, इसलिए यहाँ क्षेत्रफल ज्ञात करने की केवल एक ही विधि पूछी गई है।

समान्तर चतुर्भुज बनाने वाले विद्यार्थियों को हल करने के लिए दिए गए विशिष्ट प्रश्नों के उत्तर-

1. (चरण-3 में) जब शीट तीन हिस्सों में मोड़ी जाती है, तो नीचे की ओर बनने वाले बड़े आयत की विमाएँ क्या होंगी?
   l/4 और ½ (l/4)

2. इस आयत का क्षेत्रफल l और b के पदों में दो अलग-अलग तरीक़ों से प्राप्त करें। अपनी गणना दिखाएँ।
   हम इसे ऊपर प्राप्त विमाओं को गुणा कर प्राप्त कर सकते हैं। इसके अलावा, हम 1/2 (मूल आयत का क्षेत्रफल – पहले मोड़ का क्षेत्रफल) से भी ज्ञात कर सकते हैं

   $$= \frac{1}{2}\left(\frac{lb}{8} - \frac{l}{4} \times \left(\frac{b}{2} - \frac{l}{4}\right)\right) = \frac{l^2}{32}$$

3. इस आयत की लम्बाई और चौड़ाई का अनुपात कितना है?
   2:1
4. दो त्रिभुजों को मोड़ने पर एक ऐसी आकृति कैसे मिलती है जिसकी सम्मुख भुजाएँ बराबर और समान्तर हैं।
   आयत दो सर्वांगसम वर्ग (चूँकि लम्बाई, चौड़ाई की दो गुनी है) से मिलकर बना है। त्रिभुजों को इन आसन्न वर्गों के विकर्णों पर मोड़ा गया है। इन विकर्णों की लम्बाई बराबर है और ये आयत के आधार की ओर झुके हुए हैं।
5. इस फोल्डिंग के दौरान कौन-से अलग-अलग बहुभुज बनते हैं? उनका चित्र बनाएँ या फोटो चिपकाएँ।
   सप्तभुज, पंचभुज, दो आसन्न वर्ग और समान्तर चतुर्भुज।

सार

जब व्यक्तिगत प्रोजेक्ट जमा हो जाएँ और उनकी ग्रेडिंग हो जाए, तब सात विद्यार्थियों का समूह पारम्परिक टेनग्राम प्रोजेक्ट कर सकता है। इसके लिए उचित जानकारी सन्दर्भ (2), (3) और (4) में दी गई लिंक से मिल सकती है। इससे सम्बन्धित अन्य बहुत-सी जानकारियाँ इंटरनेट पर उपलब्ध हैं। समूह उनके द्वारा बनाए गए काग़ज़ के विशिष्ट हिस्सों पर काम करते हैं। इसका परिणाम प्रत्येक हिस्से पर किए गए काम पर निर्भर करता है, अतः निम्न गुणवत्ता का (या आड़ा-टेढ़ा) हिस्सा पूरे काम को प्रभावित करेगा। इस स्थिति में विद्यार्थी अपने प्रोजेक्ट को फिर से बना सकते है। हालाँकि यहाँ भी रूब्रिक, परिणाम के स्थान पर प्रक्रिया पर केन्द्रित होगा। इसके साथ ही मिलकर काम करने और समूह की ज़िम्मेदारी व व्यक्तिगत ज़िम्मेदारी दर्शाने के अंक समूह को दिए जाएँगे।

सन्दर्भ :

1. Swati Sircar : Sr. Lecturer, Azim Premji University and Chang Wen Wu : Origamist extraordinaire
2. Hands on Math for Class-6 : Jonaki B Ghosh, Haneet Gandhi, Tandeep Kaur
3. Hands on Math for Class-7 : Jonaki B Ghosh, Haneet Gandhi, Tandeep Kaur
4. Math Masti Booklet-2 : math4all (www.math4all.in)

स्नेहा टाइटस एट राइट एंगल्स की सह-सम्पादक और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी रिसोर्स सेंटर,बेंगलूरु में सहायक प्राध्यापक और गणित की स्रोत व्यक्ति हैं।

अनुवाद : संजय गुलाटी **पुनरीक्षण** : सुशील जोशी **कॉपी-एडीटर** : अनुज उपाध्याय
सम्पादन : राजेश उत्साही