तुलना की अवधारणा : गणितीय समझ का आधार

मुकेश मालवीय

क्या 'गणित' को समझने में तुलना का कौशल प्रभावी हो सकता है? अपने इस प्रश्न पर विचार करते हुए लेखक गणित की कुछ चयनित अवधारणाओं में तुलना के मायने खोजते हैं। अपने कक्षा अनुभवों के आधार पर वे दर्शाते हैं कि बहुत-सी गणितीय अवधारणाओं को समझने, उनकी व्याख्या करने में तुलना की अवधारणा की समझ एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है।

एक दिन मैं स्वयं के लिए इन प्रश्नों को समझने की कोशिश कर रहा था–

जो शब्द हम बोलते हैं या समझ पाते हैं, उनके अर्थ हमारे पास कैसे आए होंगे?

बोली या सुनी बात के अर्थ निर्माण की प्रक्रिया क्या है?

उदाहरण के लिए, यदि मैं कहूँ कि "मुझे रास्ते में कुत्ता दिखा", इस वाक्य में 'रास्ते' या 'कुत्ता' शब्द का मतलब क्या है? अलग तरह से कहूँ तो इन शब्दों को बोलने या सुनने से, बोलने वाले या सुनने वाले के संज्ञान में किस तरह की छवि या अर्थ बनता है? और यही अर्थ क्यों बना?

थोड़ा चिन्तन करने पर यह समझ आता है कि शायद हमने शब्दों (ध्वनियों) पर अर्थों का आरोपण किया है। कुत्ता शब्द का अर्थ इससे सम्बन्धित मेरे कई सारे अवलोकनों व सूचनाओं से मेरे पास बना है। इनमें आवाज़, आकार, कई अलग-अलग छवियाँ, अलग-अलग समय पर इस शब्द के उपयोग को सुनने या बोलने के अनुभव से बने विभिन्न सम्बन्ध, आदि शामिल हैं। इन सभी तरह की छवियों, जानकारियों, अनुभवों से मिलकर मेरे लिए 'कुत्ता' शब्द की एक अवधारणा बनी है। जब भी मैं इस शब्द को सुनता हूँ या बोलता हूँ, मैं इसके एक विशेष अर्थ, जो इस शब्द को बोलने, सुनने, लिखने वाले अन्य व्यक्तियों के लिए भी लगभग वही या वैसा ही है, को ग्रहण करता हूँ। हम बहुत-से ऐसे शब्दों का इस्तेमाल भी करते हैं जिनके लिए हमारे पास कोई ठोस छवियाँ तो नहीं हैं, पर उन शब्दों से जुड़े सन्दर्भ और अनेक अनुभव हैं जो उस शब्द के अर्थ / अवधारणा का हमें एहसास कराते हैं।

तो एक मोटा निष्कर्ष यह बन सकता है कि किसी शब्द का अर्थ उस शब्द पर एक या दो सूचनाओं या जानकारियों से नहीं बना, बल्कि उस शब्द से जुड़े हमारे तरह-तरह के अनुभवों या अर्थों के आरोपण के मौक़ों या अनुभवों के बाद बना है।

अब यहीं हम उन शब्दों या अवधारणाओं पर विचार करें जो विद्यालय में किसी विषय के अन्तर्गत विद्यार्थियों में पढ़ने-सुनने को मिलती हैं। उदाहरण के लिए, गणित में इकाई, दहाई, परिमाप, स्थानीय मान, क्षेत्रफल, आदि। विद्यार्थियों को इस तरह

चित्र 1 : गणित में शब्द, चित्र और अवधारणा एक दूसरे से गहरे से जुड़े हैं

के शब्द विद्यालय से बाहर की दुनिया में कम या बिल्कुल सुनने को नहीं मिलते हैं। इन शब्दों के अर्थ बनाने में विद्यार्थियों को शिक्षक और पाठ्यपुस्तक के साथ संवाद पर ही निर्भर होना होता है। तब यह मोटा निष्कर्ष जो हम बना रहे थे कि "किसी शब्द का अर्थ उस शब्द से बारे में तरह-तरह के अनुभवों के बाद बनता है", यहाँ शिक्षकों के लिए चिन्तन की एक जगह खुलती है। विषयगत अवधारणाओं के लिए जो शब्द हैं उनका अनुप्रयोग और अनुभव विद्यार्थियों के विद्यालयी जीवन में काफ़ी विरल है। जैसे-जैसे इनके बारे में अनुभव बढ़ता है, अवधारणाओं की स्पष्टता भी बढ़ती जाएगी।

गणतीय सन्दर्भों में शब्दों और अवधारणाओं की व्याख्या

दैनिक जीवन में या विद्यालय के बाहर जिन शब्दों या अवधारणाओं का हम इस्तेमाल करते हैं, उनके लिए कोई हमसे किसी अवधारणा की व्याख्या नहीं करवाता। कोई हमसे यह नहीं कहता कि कुत्ता क्या होता है, या इसकी क्या परिभाषा है? शब्द का इस्तेमाल या उसे सुनकर थोड़ा कम-ज़्यादा समझ लेने से काम चल जाता है। व्याख्या की भाषा के लिए कुछ अतिरिक्त कौशल की ज़रूरत होती है। जैसे, यहाँ गणित विषय को समझने

चित्र 2 : भाषा में जटिल अवधारणाओं के निर्माण को समझने के लिए पास और दूर को दर्शाता एक चित्र

और उसकी व्याख्या करने के लिए एक आवश्यक कौशल की बात करते हैं।

गणितीय शब्दावली वाले कुछ शब्दों की समझ को टटोलने के लिए, मैंने कक्षा 6 के विद्यार्थियों के साथ कम-ज़्यादा, दूर-पास, आदि जैसी शुरुआती अवधारणाओं को लेकर बातचीत शुरू की। उनसे कहा, "एक पास की वस्तु और एक दूर की वस्तु का नाम बताओ"? विद्यार्थी उनके पास और उनसे दूर की वस्तुओं के नाम पूरे वाक्य में बताने लगे। जैसे–मेरा घर पास है, महेश का घर दूर है; रीना मेरे पास बैठी है, अंशिता मुझसे दूर बैठी है; आदि। इस बीच, मैं सवाल करता रहा कि पास का क्या मतलब है, और दूर का क्या मतलब है? एक विद्यार्थी ने कहा, "लड़कियों का छात्रावास विद्यालय से पास है, और लड़कों का छात्रावास विद्यालय से दूर है। लड़कियों के छात्रावास तक जल्दी पहुँच सकते हैं, और लड़कों के छात्रावास जाने में देर लगेगी।" मैंने पूछा, "लड़कों के छात्रावास तक जाने में देर क्यों लगेगी?" जवाब था, "वो दूर है।"

मैंने फिर पूछा, "यह दूरी क्या है?" एक विद्यार्थी ने कहा, "दूरी किलोमीटर है।" कुछ ने कहा, "मीटर है।" वहीं एक अन्य ने दूरी को लम्बाई बताया। हम किसी निष्कर्ष पर पहुँचते, तभी स्मिता ने कहा, "लड़कियों के छात्रावास जल्दी पहुँचेंगे, और लड़कों के छात्रावास पहुँचने में देर लगेगी।" मैंने पूछा, "क्यों?" उसने कहा, "दूरी अधिक है तो समय ज़्यादा लगेगा, और दूरी कम है तो समय कम लगेगा।"

क्या हम दूरी की तुलना कर रहे हैं? यहाँ हमने पास और दूर की कोई सुस्पष्ट परिभाषा नहीं बनाई, पर हमारी समझ में यह आया कि पास और दूर को समझने के लिए जो अनकही समझ काम कर रही है वह तुलना की समझ है। हम पास और दूर शब्द को दूरी या वहाँ तक पहुँचने में लगने वाले समय की तुलना के आधार पर बताने की कोशिश कर रहे हैं।

मेरे लिए बच्चों की यह समझ महत्त्व रखती है। गणितीय सन्दर्भों में कुछ शब्दों और अवधारणाओं की व्याख्या के लिए तुलना की समझ (कौशल) की आवश्यकता होती है।

मैंने इन विद्यार्थियों से अगला प्रश्न किया, "इस कमरे में कितने विद्यार्थी बैठे हैं?" विद्यार्थियों ने गिनकर कहा, "38 विद्यार्थी हैं। इनमें 20 लड़कियाँ और 18 लड़के हैं।"

फिर कहा, "यानी लड़कियाँ ज़्यादा हैं और लड़के कम! अब बताओ यहाँ ज़्यादा का क्या मतलब है, और कम का क्या?" उत्तर था, "20 ज़्यादा होता है, 18 कम।" मैंने पूछा, "20 में क्या ज़्यादा है? या यह बताओ कि 20 का मतलब क्या है?" हम कुछ देर इस तरह उलझते रहे। हमें यह तो शायद पता था कि ज़्यादा और कम के क्या-क्या मायने हैं, पर इस तरह हमने कभी किसी शब्द का विश्लेषण और व्याख्या नहीं की थी। मैंने स्वयं से पूछा, "किसी भी संख्या का मतलब क्या है? जैसे 45, अगर हम दूसरी संख्या से इसकी तुलना न भी करें तब भी 45 का अर्थ तभी बनेगा जब हम इसमें समाहित 1 को 45 बार देखें, या इसे किसी

और समूह (दहाई और इकाई) में समझें। मैं इस निर्णय पर पहुँचा कि संख्याओं की समझ का मसला असल में तुलना की समझ को अपनाकर ज़्यादा अर्थवान हो सकता है। अब विद्यार्थियों के साथ मेरे संवाद की दिशा यह थी कि किसी संख्या को समझने और बताने के लिए उस संख्या में निहित मात्रा की तरफ़ उनका ध्यान जाए। इसी तरह संख्याओं में जोड़-घटा, गुणा-भाग जैसी संक्रियाओं के सवाल या उदाहरणों को लेकर उनमें संख्या और संक्रिया के बाद के प्रतिफल को भी तुलना का आधार लगाकर उन्हें व्यापक अर्थ देने के संवाद कक्षा में हुए।

भिन्न संख्या को तुलना की समझ से समझना

भिन्न संख्याओं के लिए मूल प्रश्न है, किसी इकाई के किसी टुकड़े / हिस्से को हम क्या कहें? हम एक से बड़ी सभी संख्याओं को एक की समझ से तुलना करके समझते हैं। क्या इसी तरह एक से तुलना की समझ को आधार बनाकर उसके किसी टुकड़े या हिस्से की भी समझ बना सकते हैं? मैंने विद्यार्थियों के बीच यह समस्या रखी। उन्हें चॉक दिखाकर कहा कि यह एक चॉक है, फिर एक और चॉक ली और कहा कि यह दो चॉक हैं। अब मैंने एक चॉक को तोड़ दिया, और उस टुकड़े को दिखाकर पूछा कि यह कितनी चॉक हैं? यह एक टुकड़ा चॉक है। मैंने पूछा, "यदि हम इसे संख्या की तरह ही बताना चाहें तो इसे क्या कहेंगे? इसे एक तो कह नहीं सकते क्योंकि हमने पूरी चॉक को एक कहा है।" एक विद्यार्थी ने कहा, "यह आधे से कम है।" तब मैंने एक दूसरी चॉक लेकर उसे आधा कर दिया, और पूछा, "यह टुकड़ा कितना है?" विद्यार्थियों ने कहा, "आधा है।" "अब बताओ, आधा क्या होता है?" हमने समझा कि चॉक के दो बराबर टुकड़े मिलकर पूरी एक चॉक बनाते हैं। इसलिए यह एक टुकड़ा आधा है।

चित्र 3 : तुलना की समझ को आधार बनाकर सन्दर्भित सामग्री से भिन्न को समझना (चरण 1)

अब वापस उस छोटे टुकड़े को लिया जो आधे से छोटा था। यह टुकड़ा कितना है? यह कैसे पता लगेगा? क्या इस टुकड़े को हमें पूरी चॉक पर जमाकर देखना चाहिए?

(अगर हम पहले से भिन्न को एक के कुछ बराबर हिस्से में से, किसी हिस्से के रूप में देखते आए हों तब एक मसला यह है कि वास्तविक जीवन में मापन यंत्रों के अतिरिक्त किसी इकाई का ऐसा बराबर हिस्सों में विभाजित कोई हिस्सा हमें नहीं मिलता।) समस्या इस तरह सामने आती है कि एक रोटी को खाना खाते समय हम एक निवाले के लिए जितना तोड़ते हैं, वह टुकड़ा कितना है। अगर हमें यह बताना हो कि यह रोटी का टुकड़ा कितना है, तब हम क्या करेंगे? हम ठहरकर सोचेंगे तब शायद एक तरीक़ा हमें यह सूझेगा कि इस टुकड़े को मैं पूरी रोटी पर जमा कर देखता हूँ कि उस रोटी पर यह कितनी बार जम सकेगा। मान लीजिए यह टुकड़ा पूरी रोटी पर 13 बार जम सकता है तब हमारे पास एक जवाब है कि यह एक रोटी का 13वाँ हिस्सा है। यदि यह टुकड़ा पूरा-पूरा नहीं जमता, 12 बार जमाने पर रोटी का कुछ हिस्सा छूटा रहता है, और 13 बार में इस टुकड़े का कुछ भाग रोटी से बाहर हो जाता है तो यह एक नई समस्या है जो उस टुकड़े और रोटी की तुलना से हल नहीं हुई। अब फिर सोचना होगा कि क्या करें! विवेकशील चिन्तन से शायद हमें यह तर्क मिलेगा कि इस टुकड़े के दो बराबर हिस्से किए जाएँ, और एक हिस्से को पूरी रोटी पर जमाकर देखा जाए। अब यदि यह हिस्सा 25 बार में पूरी रोटी कवर कर लेता है तो हम कहेंगे इस टुकड़े का आधा हिस्सा पूरी रोटी के 25वें हिस्से के बराबर है।

इस प्रक्रिया का मुख्य आधार तुलना ही है। इस समझ को हम किन्हीं लिपि प्रतीकों या शब्द प्रतीकों पर आरोपित कर सकते हैं। जैसे, 1/13 या 2 पच्चीसवें हिस्से या कुछ और।

गणित के जानकार लोग इस पर सवाल उठा सकते हैं कि रोटी का टुकड़ा अनियमित आकार है, इसे रोटी पर कैसे जमाया जा सकता है; या इस टुकड़े के दो बराबर एक जैसे हिस्से तो हो नहीं सकते; या गणित शुद्धता और सटीक उत्तर का विषय है; आदि। मैंने अपनी कक्षा के हरेक विद्यार्थी को एक-एक काग़ज़ दिया, और पूछा, "आपके पास कितने काग़ज़ हैं?" सबने कहा, "एक है।" "यदि मैं इस तरह का एक और काग़ज़ आपको दूँ तब आपके पास कितने हो जाएँगे?" सबने कहा, "दो।" "अच्छा, अब सब अपने-अपने काग़ज़ में से एक टुकड़ा काग़ज़ फाड़ लो। अब आपको यह बताना है कि आपका टुकड़ा कितना है।" जब हम भिन्न को समझने के लिए संवाद और प्रक्रिया कर रहे थे, हमारे पास भिन्न को लेकर व्याख्या की एक भाषा बन रही थी।

मुझे विद्यालय में किसी वर्ग, आयत, त्रिभुज या चतुर्भुज का क्षेत्रफल निकालना सिखाया गया था जो प्रायः लम्बाई और चौड़ाई के गुणा के सूत्रों (जिनमें कुछ कोण आदि भी शामिल होते हैं) से निकाला जाता है। यहाँ क्षेत्रफल की व्याख्या और अर्थ, क्षेत्रफल शब्द पर ठीक से आरोपित नहीं किए गए थे। भुजाओं (लम्बाई और चौड़ाई) के गुणन से ही एक इकाई वाले वर्गाकार क्षेत्र का क्षेत्रफल मिलता है। एक इकाई वाले वर्गाकार क्षेत्र से उस त्रिभुज, चतुर्भुज या अन्य किसी दिए गए क्षेत्र की तुलना करना ही क्षेत्रफल निकालना है, मेरी यह

चित्र 4 : तुलना की समझ को आधार बनाकर परिवेशीय सामग्री से भिन्न को समझना (चरण 2)

समझ शिक्षक बनने के बाद विद्यार्थियों को समझने-समझाने के दौरान बनी।

क्या हम गणित की अन्य अवधारणाओं को भी तुलना के इस नज़रिए से परख सकते हैं? सोचिएगा! मैंने पहले कभी गणित को इस तरह से नहीं समझा था। मेरा मानना है सूत्र और यांत्रिक तरीक़ों से सवाल हल करने से उत्तर आते हैं, समझ या व्याख्या की भाषा कम ही आती है।

लोक जीवन में भी व्याख्या की भाषा है

अभी हाल ही में, मैं एक भीड़ भरी ट्रेन में खड़े-खड़े यात्रा कर रहा था। मेरे पीछे दो दोस्त आपस में बात कर रहे थे। एक दोस्त, जो कहीं से एक क़िला देखकर आ रहा था, अपने दोस्त को उस क़िले के बारे में बता रहा था। वह बोला, "वो क़िला बहुत बड़ा था।" दूसरे ने सवाल किया, "कितना बड़ा?" दोस्त ने कहा, "अब तुझे कैसे बताऊँ! देख, ये जो ट्रेन का एक डिब्बा जितना बड़ा है, अगर इतने बड़े तीन डिब्बे जोड़ दें तो वह क़िला इतना तो लम्बा रहा होगा, और लगभग 5 डिब्बों की लम्बाई के बराबर उसकी चौड़ाई रही होगी। इतना बड़ा था वह क़िला, समझे? उसके दोस्त के साथ मुझे भी समझ में आ गया कि क़िला कितना बड़ा होगा। मैं सोच रहा था कि यदि वह दोस्त यह बोलता कि क़िले का क्षेत्रफल लगभग 95-96 हज़ार वर्ग फ़ुट रहा होगा। तब क्या दोस्त या मैं इस बात का कोई एहसास बना पाते कि वह क़िला कितना बड़ा है!

मुकेश मालवीय एक सरकारी विद्यालय में शिक्षक हैं। अपनी शिक्षण प्रक्रियाओं को प्रभावी बनाने के लिए शैक्षिक विषयवस्तु और विधियों का विश्लेषण करते रहते हैं। साथ ही, अपनी कक्षा के अनुभवों और विषयों की समझ पर लेखन करते रहते हैं। आप एनसीईआरटी द्वारा संचालित गणित की पाठ्यपुस्तकों के लेखन में शामिल रहे हैं।

सम्पर्क : mukeshmalviya15@gmail.com