अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

कक्षा में गणितीय संवाद

पद्मप्रिया शिराली

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

कक्षा में गणितीय संवाद

की-वर्ड : *शैक्षिक रणनीतियाँ, चर्चा, तर्क करना, सम्प्रेषण, समावेशन*

गणित शिक्षण में गणितीय संवाद (Math Talk) का कितना महत्त्व है?

इस सवाल का उत्तर देने से पहले, आइए अपने-आप से कुछ अन्य सवाल पूछें। यदि कक्षा में शिक्षक सिर्फ़ वही सवाल पूछते हैं जिनके उत्तर 'हाँ' या 'नहीं' में दिए जा सकते हैं, तो क्या ऐसी कक्षा विद्यार्थियों को अपने ज्ञान की वास्तविक समझ को अभिव्यक्त करने का अवसर देती है? क्या इससे उनकी ग़लतियाँ या ग़लत धारणाएँ सामने आती हैं? क्या ऐसी कक्षा में विद्यार्थियों को एक-दूसरे से सीखने का मौक़ा मिलता है? क्या वे यह देख पाते हैं कि उनके सहपाठी किसी सवाल को किस तरह समझते और हल करते हैं? निस्सन्देह, इन सभी प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं'।

यहाँ कुछ महत्त्वपूर्ण तरीक़े बताए गए हैं जिनसे गणितीय संवाद करने वाली कक्षा में विद्यार्थियों को लाभ मिलता है।

ऐसी कक्षा में विद्यार्थी :

- सोच-समझकर गणित के सवाल हल करना सीखते हैं, और अपने उत्तर का कारण बता पाते हैं।
- उनके उत्तर सही हैं या नहीं, इसकी जाँच स्वयं करना सीखते हैं।
- अपने सहपाठियों के साथ चर्चा करते हैं, और मिलकर काम करना सीखते हैं।
- गणित की अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को अच्छी तरह समझते हैं।
- इस तरह गहराई से जुड़ने से सीखी हुई बातें लम्बे समय तक याद रख पाते हैं।

क्या प्राथमिक स्तर पर गणितीय संवाद सम्भव हो सकता है? क्या ये उद्देश्य उन विद्यार्थियों के लिए अति महत्त्वाकांक्षी हैं जो अभी गणित को सीखना शुरू कर रहे हैं? यदि प्राथमिक कक्षा में गणित पढ़ाने का तरीक़ा टॉप-डाउन, शिक्षक-केन्द्रित और सत्ता-केन्द्रित हो (यानी जहाँ शिक्षक ही सब कुछ बताएँ, और विद्यार्थियों को अपनी बात कहने का अवसर न मिले) तो माध्यमिक कक्षाओं में विद्यार्थियों के लिए इस तरीक़े को बदलना सहज नहीं होगा। ऐसे में वे तर्क करने, ग़लती करके सीखने, अपने उत्तर की जाँच करने, और किसी सवाल को हल करने के अलग-अलग तरीक़े अपनाने का आत्मविश्वास नहीं बना पाएँगे।

पहली कक्षा से ही शिक्षक विद्यार्थियों को वस्तुओं और आसान बातचीत की मदद से गणित समझाने, और अपने उत्तर का कारण बताने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, 2 और 3 मिलकर 5 क्यों होते हैं; 7, 4 से बड़ा क्यों है आदि।

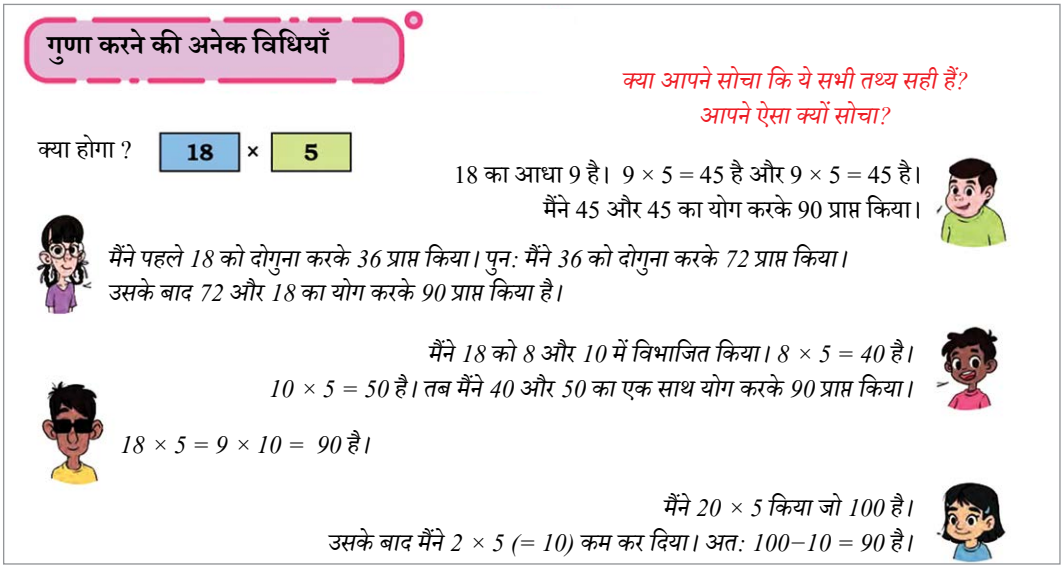
शिक्षक ऐसे सवाल भी पूछ सकते हैं जिनसे विद्यार्थी अपनी सोच बता सकें। जैसे–

- *इस ख़ाली जगह में कौन-कौन-सी संख्याएँ भरी जा सकती हैं? आपको ऐसा क्यों लगता है?*

  $8 > _$
- *क्या आप गोटियों का उपयोग करके दिखा सकते हैं कि 2×4 और 4×2 का उत्तर एक जैसा होता है?*
- *जब किसी संख्या को 4 से गुणा करते हैं तो वही उत्तर क्यों मिलता है जो पहले उसे 2 से गुणा करके, और फिर उस उत्तर को दोबारा 2 से गुणा करने पर मिलता है?*

अकसर शिक्षक समझते हैं कि इस तरह से पढ़ाने पर कक्षा को सँभालना कठिन हो सकता है, या उन्हें यह भी विश्वास नहीं होता कि गणितीय संवाद विद्यार्थियों के सीखने का अच्छा तरीक़ा हो सकता है। कई बार शिक्षकों को यह भी समझ नहीं आता कि शुरुआत कैसे करें। हालाँकि, ऐसी कक्षाएँ आसानी से ली जा सकती हैं जहाँ विद्यार्थी गणित पर खुलकर और सार्थक चर्चा करें।

एनसीईआरटी की कक्षा-5 की पाठ्यपुस्तक में इसका एक उदाहरण दिया गया है जिसे **चित्र-1** में दिखाया गया है। इस लेख में दिए गए उदाहरण बताते हैं कि कक्षा में इस तरह का गणितीय संवाद कैसे हो सकता है। शिक्षक कक्षा



चित्र-1 : एनसीईआरटी की कक्षा-5 की पाठ्यपुस्तक 'गणित मेला' से अनुमति के साथ प्रकाशित।

में ऐसा वातावरण कैसे बना सकते हैं, तथा खुलकर और अच्छा गणितीय संवाद कैसे करवा सकते हैं?

इस लेख में कुछ ऐसे उदाहरण दिए गए हैं जिनसे विद्यार्थी गणित पर आपस में चर्चा करने के लिए प्रेरित हुए। इन संवादों को कई तरीक़ों से कराया जा सकता है।

चित्र-2 स्रोत : एआई द्वारा बनाया गया

शिक्षक दो-दो विद्यार्थियों की जोड़ी बनाकर किसी सवाल को हल करने के लिए कह सकते हैं। विद्यार्थी पहले अपने-अपने तरीक़े से सवाल हल कर सकते हैं। फिर अपने उत्तर की जाँच एक-दूसरे से करवा सकते हैं, और दिखा सकते हैं कि उन्हें एक जैसा उत्तर मिला या नहीं। शिक्षक विद्यार्थियों को मेज़ के चारों तरफ़ चार-चार के समूह में बैठाकर भी काम करवा सकते है। ज़रूरत पड़ने पर हैंडस्-ऑन सामग्री का उपयोग भी किया जा सकता है। शिक्षक विद्यार्थियों को आपस में काम बाँटने के लिए प्रेरित कर सकते हैं, मिलकर काम करने और एक-दूसरे की मदद करना सिखा सकते हैं।

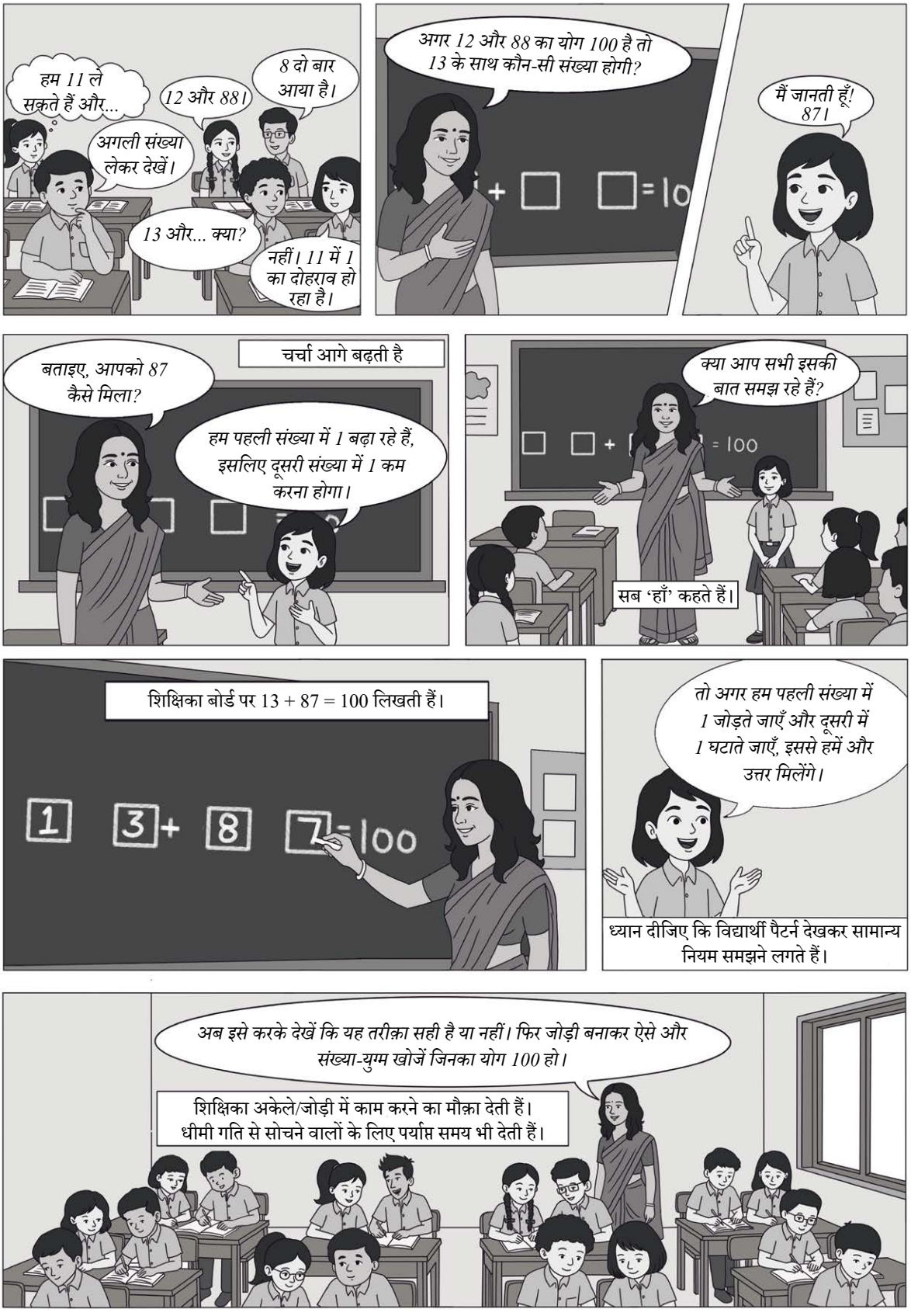
ऐसी चर्चा शुरू करने से पहले कुछ आसान नियम तय कर लेना अच्छा रहेगा। जैसे एक समय में एक ही विद्यार्थी बोले, सभी एक-दूसरे की पूरी बात सुनें और फिर अपनी बात कहें आदि। इससे सभी विद्यार्थियों को अपनी बात रखने का समान अवसर मिलता है, और सभी एक-दूसरे की बात ध्यान से सुनना सीखते हैं।

शिक्षक विद्यार्थियों से इस तरह के सवाल भी पूछ सकते हैं, *"क्या आप बता सकते हैं कि उसने क्या कहा?"* या *"उसका मतलब क्या था?"* इससे विद्यार्थी अपने साथियों की बात को अपने शब्दों में दोहराना, उसे समझना, और अपने उत्तर का कारण बताना सीखते हैं।

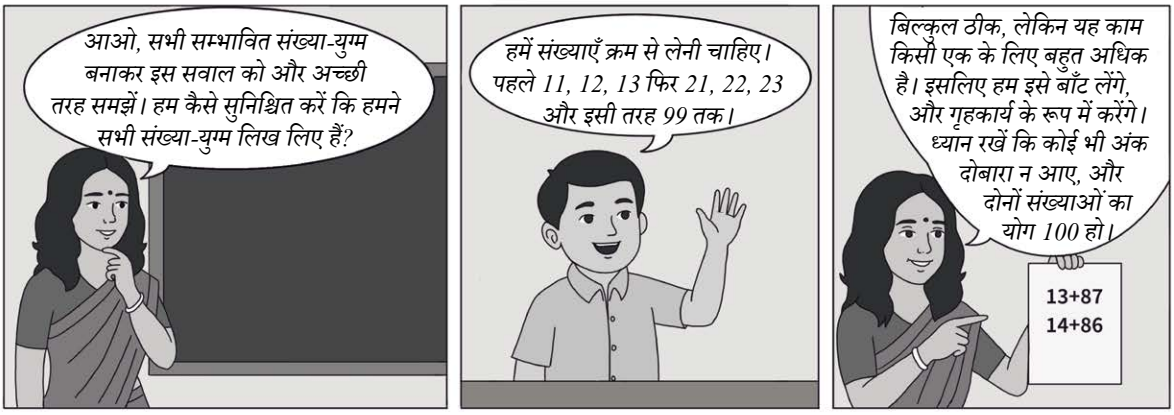
चर्चा के बाद विद्यार्थी अपने काम को पूरी कक्षा के सामने अलग-अलग तरीक़ों से प्रस्तुत कर सकते हैं। विद्यार्थियों के लिखे हुए उत्तर और चित्र कक्षा के बुलेटिन बोर्ड पर लगाए जा सकते हैं। यदि उन्होंने किसी सवाल को हल करने का कोई अलग तरीक़ा बताया है तो उसे भी सभी को दिखाया जा सकता है। खुले उत्तर वाले सवालों के अलग-अलग हल भी प्रदर्शित किए जा सकते हैं। इनसे विद्यार्थियों को यह समझने में मदद मिलती है कि एक ही सवाल को कई तरीक़ों से हल किया जा सकता है, और वे एक-दूसरे से सीखते हैं।

चर्चा-1

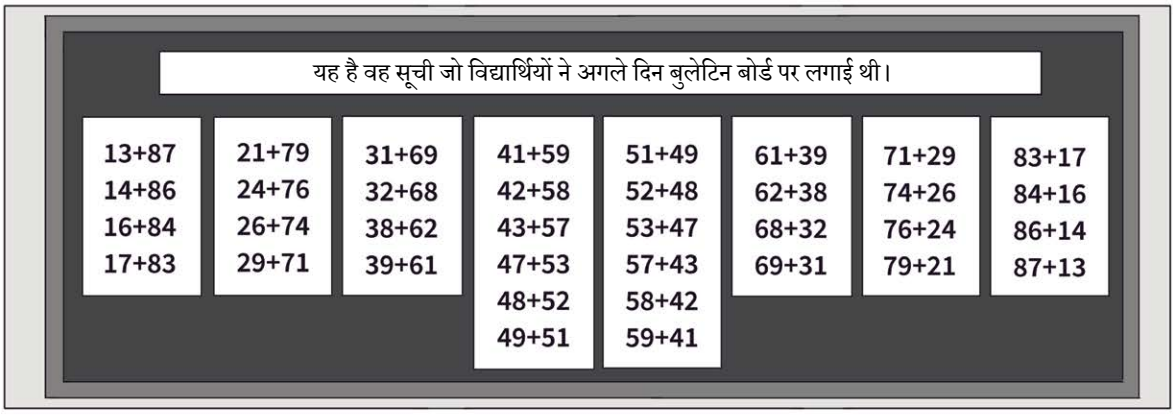
कक्षा-4 के विद्यार्थियों का चार-चार के समूहों में कार्य


हम 11 ले सकते हैं और...
12 और 88।
8 दो बार आया है।
अगली संख्या लेकर देखें।
13 और... क्या?
नहीं। 11 में 1 का दोहराव हो रहा है।
अगर 12 और 88 का योग 100 है तो 13 के साथ कौन-सी संख्या होगी?
मैं जानती हूँ! 87।
बताइए, आपको 87 कैसे मिला?
चर्चा आगे बढ़ती है
हम पहली संख्या में 1 बढ़ा रहे हैं, इसलिए दूसरी संख्या में 1 कम करना होगा।
क्या आप सभी इसकी बात समझ रहे हैं?
सब 'हाँ' कहते हैं।
शिक्षिका बोर्ड पर 13 + 87 = 100 लिखती हैं।
1 3 + 8 7 = 100
तो अगर हम पहली संख्या में 1 जोड़ते जाएँ और दूसरी में 1 घटाते जाएँ, इससे हमें और उत्तर मिलेंगे।
ध्यान दीजिए कि विद्यार्थी पैटर्न देखकर सामान्य नियम समझने लगते हैं।
अब इसे करके देखें कि यह तरीक़ा सही है या नहीं। फिर जोड़ी बनाकर ऐसे और संख्या-युग्म खोजें जिनका योग 100 हो।
शिक्षिका अकेले/जोड़ी में काम करने का मौक़ा देती हैं।
धीमी गति से सोचने वालों के लिए पर्याप्त समय भी देती हैं।

अब 14 और 86 लेकर देखते हैं। यह सही है।
फिर 15 + 85 लेकर देखते हैं, लेकिन 5 दो बार आ रहा है, तो यह सही नहीं है।
तब 16 और 84 को देखते हैं। यह सही है।
दूसरी संख्याएँ भी लिखते हैं। 17 + 83, फिर 18 + 82 (नहीं, नहीं)।
19 और 91 भी नहीं ले सकते। लगता है, अब सभी उत्तर मिल गए हैं।
क्या आपने सभी तरीक़े आज़मा लिए हैं?
विद्यार्थियों को पक्का पता नहीं है, वे चुप रहते हैं।
क्या 2-अंकीय संख्याएँ किसी दूसरे अंक से भी शुरू हो सकती हैं?
हाँ, हम 21, 22 और आगे की संख्याओं से भी शुरू करके देख सकते हैं।
क्या आप सभी को कुछ उत्तर मिले?
जो उत्तर मिले हैं, उन्हें बोर्ड पर लिखो।
विद्यार्थी बोर्ड पर कुछ संख्या-युग्म लिखते हैं। कुछ संख्या-युग्म एक जैसे होते हैं। शिक्षिका कुछ ख़ास संख्या-युग्मों की ओर ध्यान दिलाती हैं।


आओ, सभी सम्भावित संख्या-युग्म बनाकर इस सवाल को और अच्छी तरह समझें। हम कैसे सुनिश्चित करें कि हमने सभी संख्या-युग्म लिख लिए हैं?
हमें संख्याएँ क्रम से लेनी चाहिए। पहले 11, 12, 13 फिर 21, 22, 23 और इसी तरह 99 तक।
बिल्कुल ठीक, लेकिन यह काम किसी एक के लिए बहुत अधिक है। इसलिए हम इसे बाँट लेंगे, और गृहकार्य के रूप में करेंगे। ध्यान रखें कि कोई भी अंक दोबारा न आए, और दोनों संख्याओं का योग 100 हो।
13+87
14+86

शिक्षिका विद्यार्थियों की एक जोड़ी को 20 से 29 तक, दूसरी को 30 से 39 तक,
और इसी तरह अलग-अलग जोड़ियों को 80 से 89 तक की संख्याएँ देती हैं।


यह है वह सूची जो विद्यार्थियों ने अगले दिन बुलेटिन बोर्ड पर लगाई थी।
13+87
14+86
16+84
17+83
21+79
24+76
26+74
29+71
31+69
32+68
38+62
39+61
41+59
42+58
43+57
47+53
48+52
49+51
51+49
52+48
53+47
57+43
58+42
59+41
61+39
62+38
68+32
69+31
71+29
74+26
76+24
79+21
83+17
84+16
86+14
87+13

विद्यार्थी इतनी बड़ी सूची देखकर बहुत ख़ुश हुए।
शिक्षिका ने गणित पर चर्चा को आगे बढ़ाने के लिए
इसका इस्तेमाल करने का फ़ैसला किया।

तालिका को देखकर आपको क्या समझ में आ रहा है? इन संख्या-युग्मों के बारे में आप क्या जानते हैं?
32+68
38+62
41+59
42+58
43+57
47+53
48+52
49+51
51+49
52+48
53+47
57+43
58+42
59+41
61+39
62+38
68+32
69+31
4 दहाई और 5 दहाई वाली संख्याओं के संख्या-युग्म ज़्यादा हैं।
बहुत अच्छा, अब पहले स्तम्भ को ध्यान से देखो। इन संख्या-युग्मों में आपको क्या दिखाई देता है?
42+58
43+57
47+53
48+52
49+51
52+48
53+47
57+43
58+42
59+41
मुझे लगता है कि इन संख्या-युग्मों में इकाई के अंक आपस में बदल गए हैं। 13 + 87 अब 17 + 83 हो गया है।
14 + 86 की जगह 16 + 84 आ गया है।
ऐसा क्यों हुआ?
ऐसा इसलिए क्योंकि 3 + 7 और 7 + 3 का योग एक समान होता है।
ऐसा दूसरे स्तम्भों में भी हुआ है।
इसीलिए हर स्तम्भ में संख्या-युग्मों की संख्या सम है।
क्या कोई समझा सकता है कि उसने क्या कहा?
उसने बताया कि इकाई के अंक बदलने पर एक संख्या-युग्म से दूसरा संख्या-युग्म बनाया जा सकता है।
इसलिए हमेशा ऐसे दो संख्या-युग्म बनते हैं। इसी कारण कुल संख्या-युग्मों की संख्या सम होती है।
बिल्कुल सही।

क्या आपने किसी और बात पर ग़ौर किया?
विद्यार्थी शान्त हैं।
अगर हम चौथी और पाँचवीं सूची को साथ में देखें तो क्या दिखाई देता है?
अरे! पाँचवीं सूची में ये संख्याएँ उल्टे क्रम में हैं।
उल्टा क्रम क्या है? इससे आपका क्या मतलब है?
उसका मतलब है कि संख्या-युग्म उल्टे क्रम में लिखे गए हैं।
क्या आप इसका एक उदाहरण दे सकते हैं?
चौथी सूची में 49 + 51 आख़िरी संख्या-युग्म है, वहीं पाँचवीं सूची में 51+ 49 पहला संख्या-युग्म है।
संख्या-युग्म तो वही है, केवल दोनों संख्याओं की जगह बदल गई है। क्या इससे योग बदल सकता है?
नहीं, क्योंकि 3 + 5 और 5 + 3 का योग बराबर होता है।
ओह! 50 तक के उत्तर मिलने के बाद, हम उन्हें उल्टे क्रम में भी लिख सकते थे।
यह सममिति जैसा है!
बहुत बढ़िया! आपने अच्छी बात पर ध्यान दिया।

आगे की चर्चा के लिए सवाल

- क्या आपने ग़ौर किया कि कौन-सा अंक कभी इकाई के स्थान पर नहीं आता?
- क्या सभी सम्भव संख्या-युग्म खोजने का कोई और तरीक़ा हो सकता है?

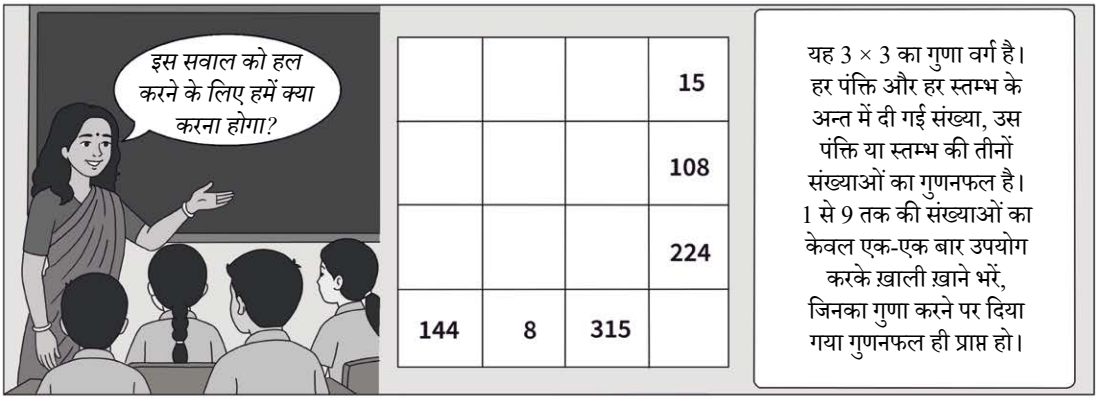
शिक्षिका द्वारा इस्तेमाल की गई शिक्षण रणनीतियाँ

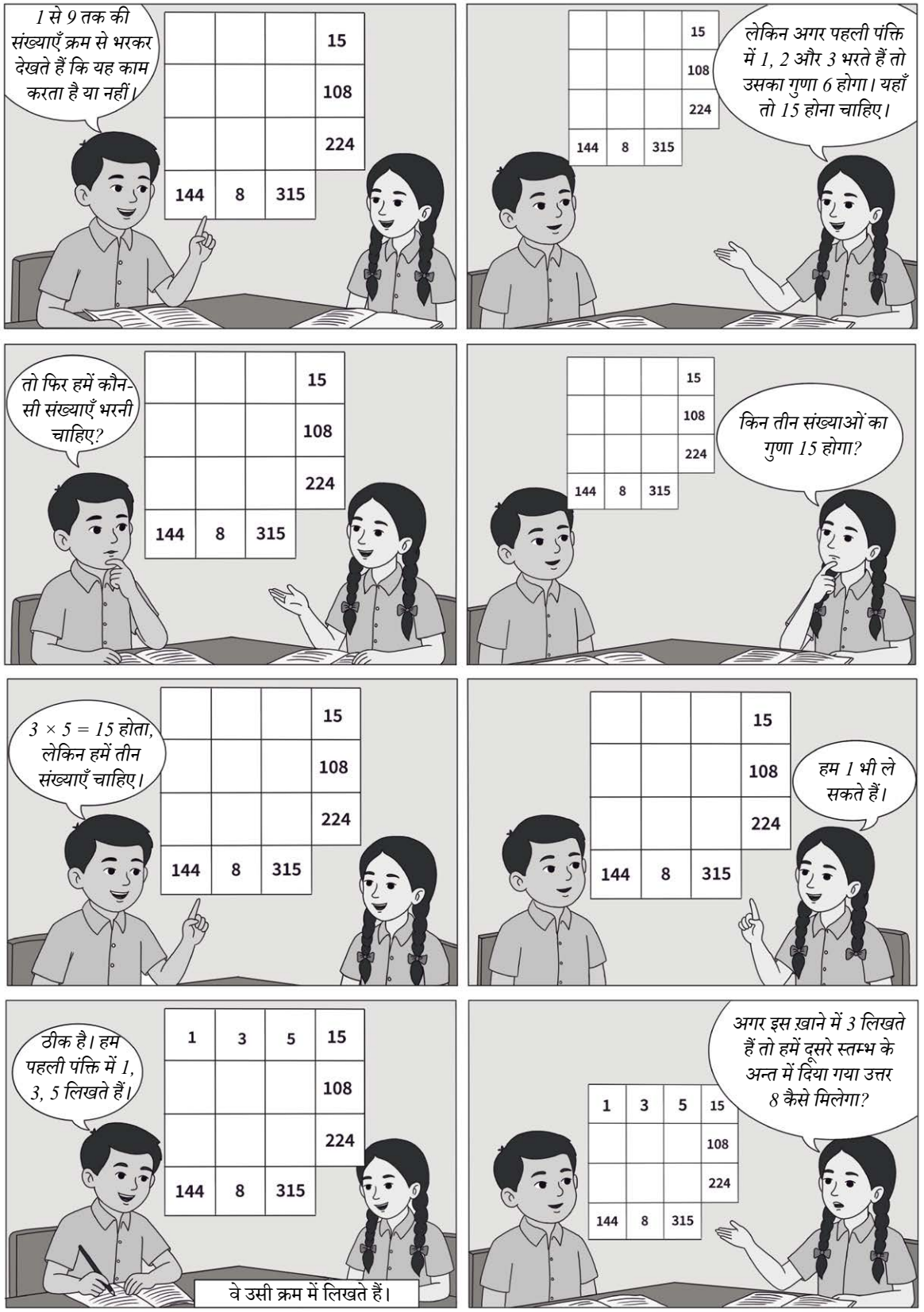
- शिक्षिका ने इस सवाल की मदद से विद्यार्थियों को गणित पर खुलकर चर्चा करने के लिए प्रेरित किया।
- विद्यार्थियों ने अपने शब्दों में सवाल को समझाया।
- चर्चा के दौरान सवाल की सभी शर्तों को समझा गया।
- विद्यार्थियों ने मिलकर अपने उत्तरों पर विचार किया, और उन्हें अपने तर्क के बारे में अपनी समझ स्पष्ट करने का मौक़ा मिला।
- जोड़ी में काम करने से अधिक विद्यार्थियों ने भाग लिया, विशेषकर उन विद्यार्थियों ने जो सामान्यतः कम बोलते हैं।
- शिक्षिका ने विद्यार्थियों को सभी सम्भव उत्तर क्रम से खोजने का तरीक़ा बताया।
- गृहकार्य कक्षा में किए गए काम का विस्तार था। इससे विद्यार्थियों को स्वयं सोचने और नए समाधान खोजने का अवसर मिला।
- शिक्षिका ने विद्यार्थियों को पैटर्न पहचानने और उसके पीछे का कारण समझाने के लिए प्रेरित किया। उन्होंने एक विद्यार्थी से दूसरे विद्यार्थी की बात अपने शब्दों में दोहराने के लिए कहा। इससे सभी ने एक-दूसरे की बात ध्यान से सुनी, और सभी के विचारों को महत्त्व मिला।
- शिक्षिका ने विद्यार्थियों को सही गणितीय शब्दों का प्रयोग करने के लिए प्रोत्साहित किया।
- अंकगणित के नियमों को फिर से समझाया और उनका अभ्यास कराया।
- एक ही गतिविधि से सीखने के कई उद्देश्य सफलतापूर्वक प्राप्त हो गए।
- क्या आपने शिक्षिका द्वारा इस्तेमाल की गई किसी और रणनीति पर ग़ौर किया?

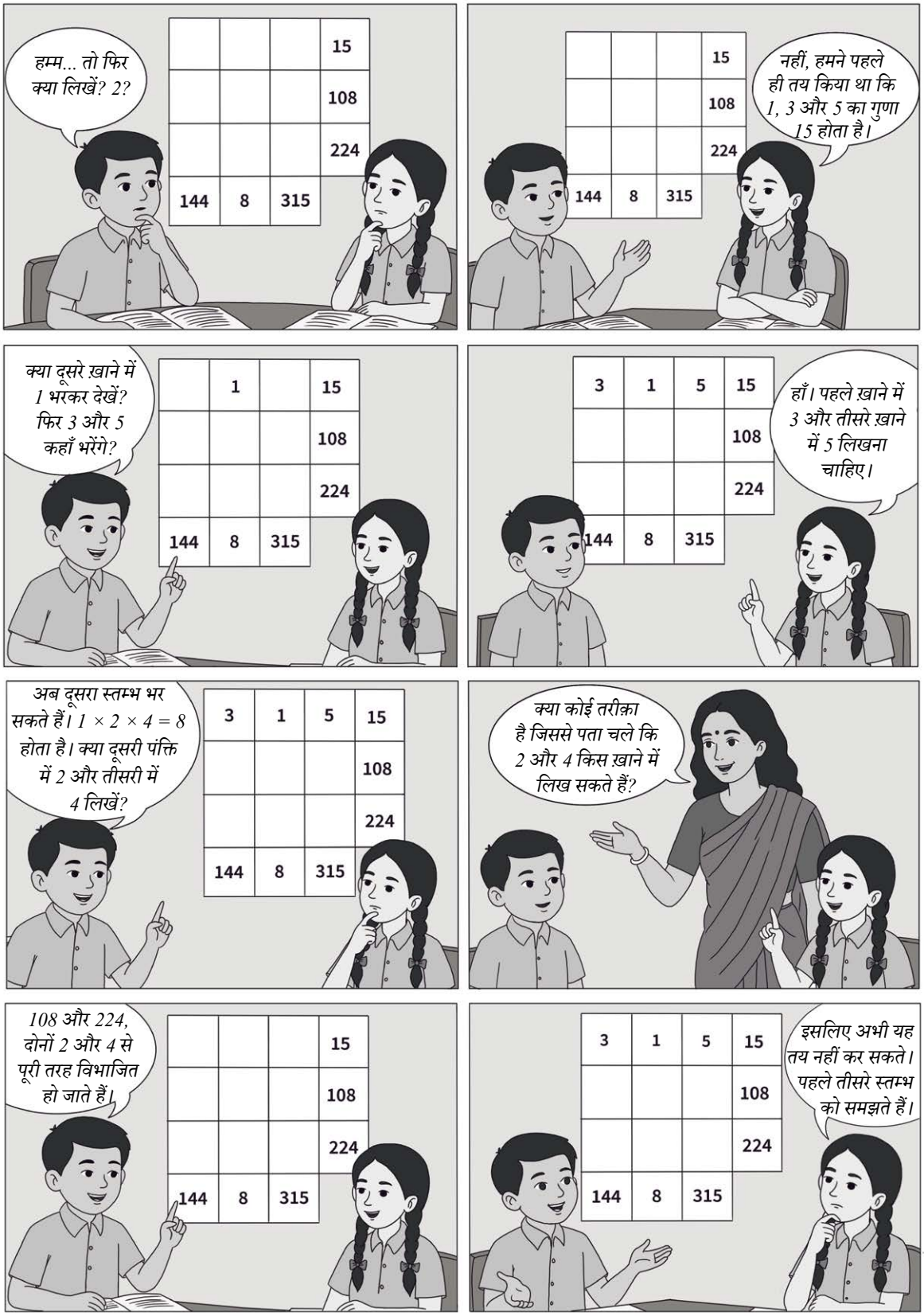
आगे दी गई चर्चाओं में कुछ अन्य रणनीतियों को समझने की कोशिश करें। शिक्षिका क्या अलग कर रही हैं? कौन-सी बातें पहले जैसी हैं? आपके अनुसार शिक्षिका के मुख्य उद्देश्य क्या हैं?

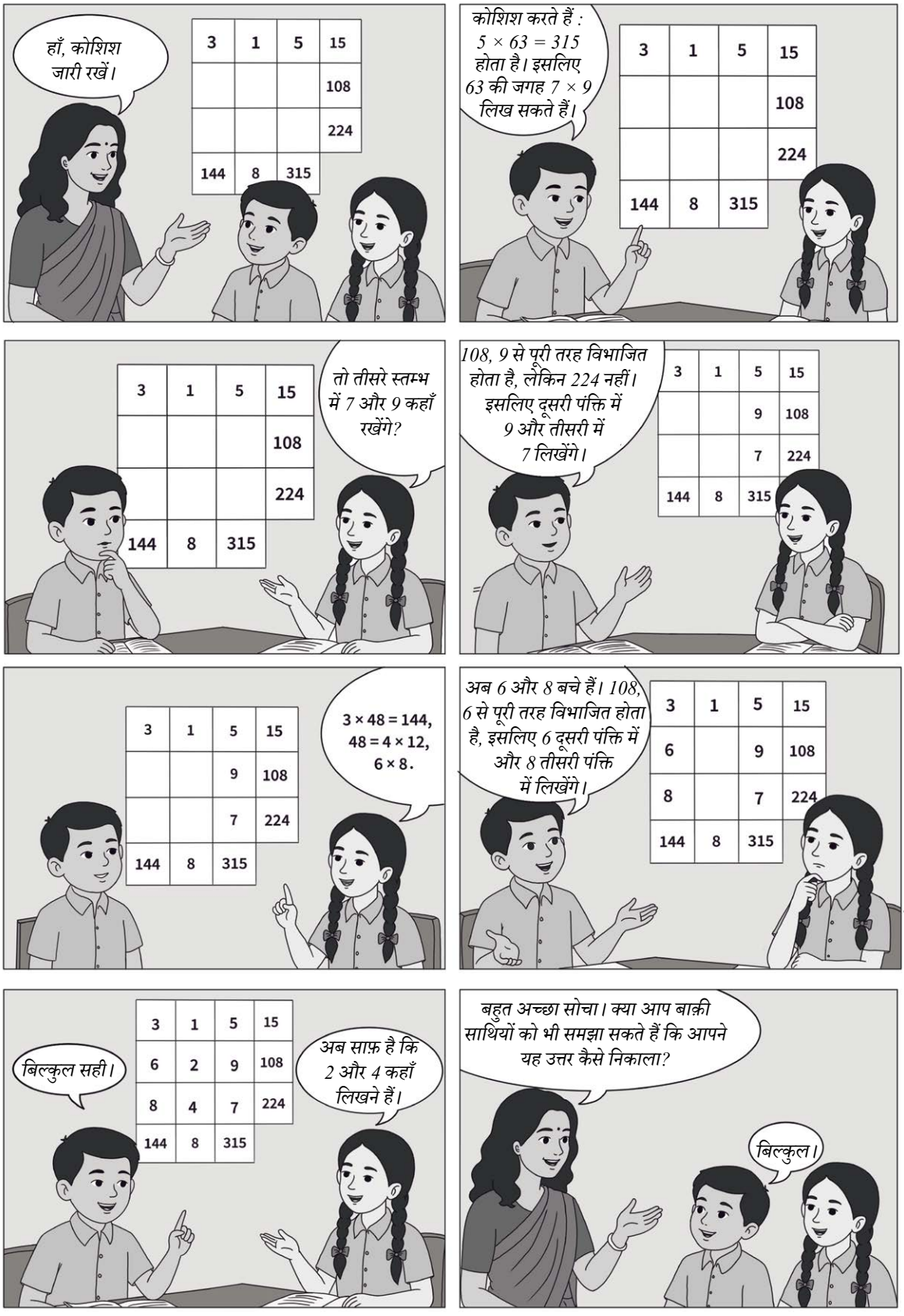
चर्चा-2

कक्षा-5 के विद्यार्थियों का जोड़ी में कार्य




1 से 9 तक की संख्याएँ क्रम से भरकर देखते हैं कि यह काम करता है या नहीं।
15
108
224
144 8 315
लेकिन अगर पहली पंक्ति में 1, 2 और 3 भरते हैं तो उसका गुणा 6 होगा। यहाँ तो 15 होना चाहिए।
तो फिर हमें कौन-सी संख्याएँ भरनी चाहिए?
किन तीन संख्याओं का गुणा 15 होगा?
3 × 5 = 15 होता, लेकिन हमें तीन संख्याएँ चाहिए।
हम 1 भी ले सकते हैं।
ठीक है। हम पहली पंक्ति में 1, 3, 5 लिखते हैं।
1 3 5
वे उसी क्रम में लिखते हैं।
अगर इस ख़ाने में 3 लिखते हैं तो हमें दूसरे स्तम्भ के अन्त में दिया गया उत्तर 8 कैसे मिलेगा?


हम्म... तो फिर क्या लिखें? 2?
15
108
224
144 8 315
नहीं, हमने पहले ही तय किया था कि 1, 3 और 5 का गुणा 15 होता है।
क्या दूसरे ख़ाने में 1 भरकर देखें? फिर 3 और 5 कहाँ भरेंगे?
1
हाँ। पहले ख़ाने में 3 और तीसरे ख़ाने में 5 लिखना चाहिए।
3 1 5
अब दूसरा स्तम्भ भर सकते हैं। 1 × 2 × 4 = 8 होता है। क्या दूसरी पंक्ति में 2 और तीसरी में 4 लिखें?
क्या कोई तरीक़ा है जिससे पता चले कि 2 और 4 किस ख़ाने में लिख सकते हैं?
108 और 224, दोनों 2 और 4 से पूरी तरह विभाजित हो जाते हैं।
इसलिए अभी यह तय नहीं कर सकते। पहले तीसरे स्तम्भ को समझते हैं।


हाँ, कोशिश जारी रखें।
3 1 5 15
108
224
144 8 315
कोशिश करते हैं : 5 × 63 = 315 होता है। इसलिए 63 की जगह 7 × 9 लिख सकते हैं।
तो तीसरे स्तम्भ में 7 और 9 कहाँ रखेंगे?
108, 9 से पूरी तरह विभाजित होता है, लेकिन 224 नहीं। इसलिए दूसरी पंक्ति में 9 और तीसरी में 7 लिखेंगे।
3 × 48 = 144, 48 = 4 × 12, 6 × 8.
अब 6 और 8 बचे हैं। 108, 6 से पूरी तरह विभाजित होता है, इसलिए 6 दूसरी पंक्ति में और 8 तीसरी पंक्ति में लिखेंगे।
बिल्कुल सही।
अब साफ़ है कि 2 और 4 कहाँ लिखने हैं।
बहुत अच्छा सोचा। क्या आप बाक़ी साथियों को भी समझा सकते हैं कि आपने यह उत्तर कैसे निकाला?
बिल्कुल।

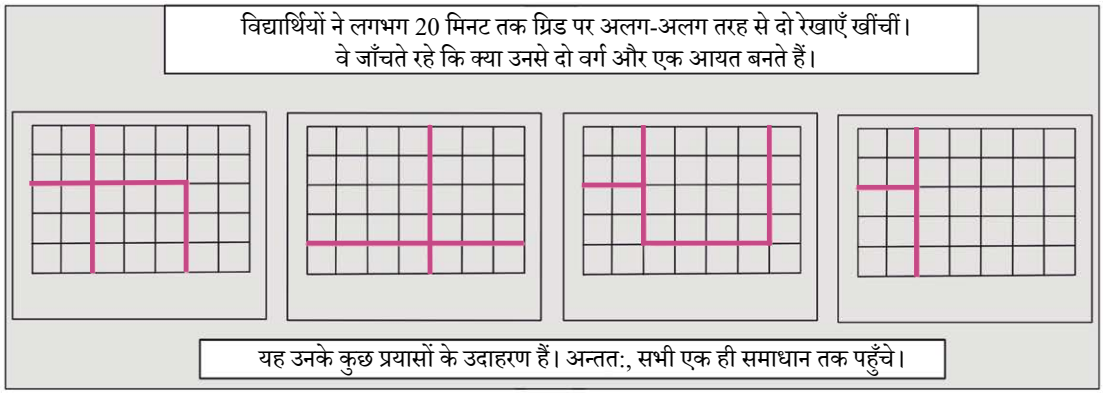
इस चर्चा में भी चर्चा-1 की तरह सीखने के कई अच्छे अवसर मिले। इसके साथ ही, विद्यार्थियों ने इस सवाल को पहले किए गए सवाल से जोड़कर समझा।

कई बार, पहले सीखी हुई बातों का उपयोग करने से नया सवाल समझना और हल करना आसान हो जाता है। शुरुआत में शिक्षिका ने विद्यार्थियों को अपने-आप चर्चा करने और सोचने का समय दिया। बाद में उन्होंने ऐसे सवाल पूछे जिनसे विद्यार्थियों को सही दिशा में सोचने और आगे बढ़ने में मदद मिली।

इस सवाल का केवल एक सही उत्तर था, लेकिन शिक्षिका ने केवल उत्तर पर ध्यान नहीं दिया। उन्होंने इस बात पर ज़्यादा ज़ोर दिया कि विद्यार्थी अलग-अलग तरीक़ों से सोचकर और तर्क देकर उस उत्तर तक कैसे पहुँचे।

चर्चा-3

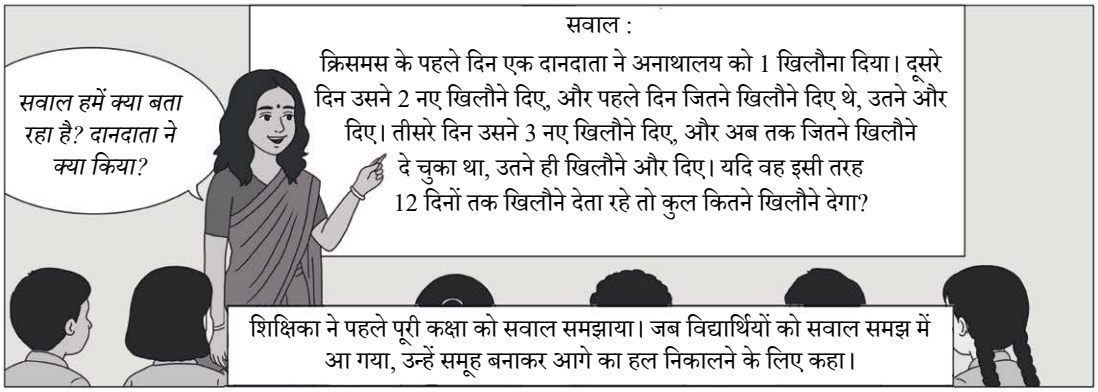
कक्षा-6 के विद्यार्थियों का दो-दो या तीन-तीन के समूहों में कार्य



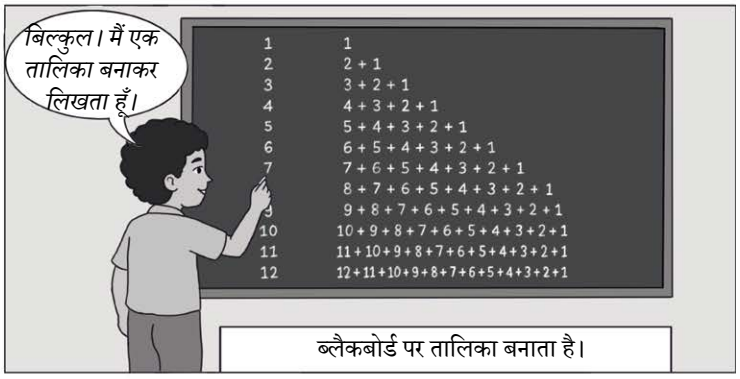
ध्यान दें कि जब कक्षा को एक उत्तर मिल गया तब भी शिक्षिका ने चर्चा नहीं रोकी। इस आगे की चर्चा से क्या लाभ हुआ? शिक्षिका ने गणितीय संवाद को बढ़ावा देने के लिए कौन-कौन-से तरीक़े अपनाए?

चर्चा-4

कक्षा-5 और 6 के विद्यार्थियों का चार-चार के समूहों में कार्य



शिक्षिका ने पहले पूरी कक्षा को सवाल समझाया। जब विद्यार्थियों को सवाल समझ में आ गया, उन्हें समूह बनाकर आगे का हल निकालने के लिए कहा।



ब्लैकबोर्ड पर तालिका बनाता है।

सवाल हल करने के लिए विद्यार्थियों को 4-4 के समूहों में बाँट दिया गया।

समूह क

क्या हम पहले हर पंक्ति का योग निकालें, और फिर उन सभी पंक्तियों के योगों को जोड़ दें?

हाँ, ऐसा ही करते हैं।

तो पहली पंक्ति का योग 1 है, दूसरी का 3 है (तालिका के तीसरे स्तम्भ में लिखना शुरू करते हैं)।

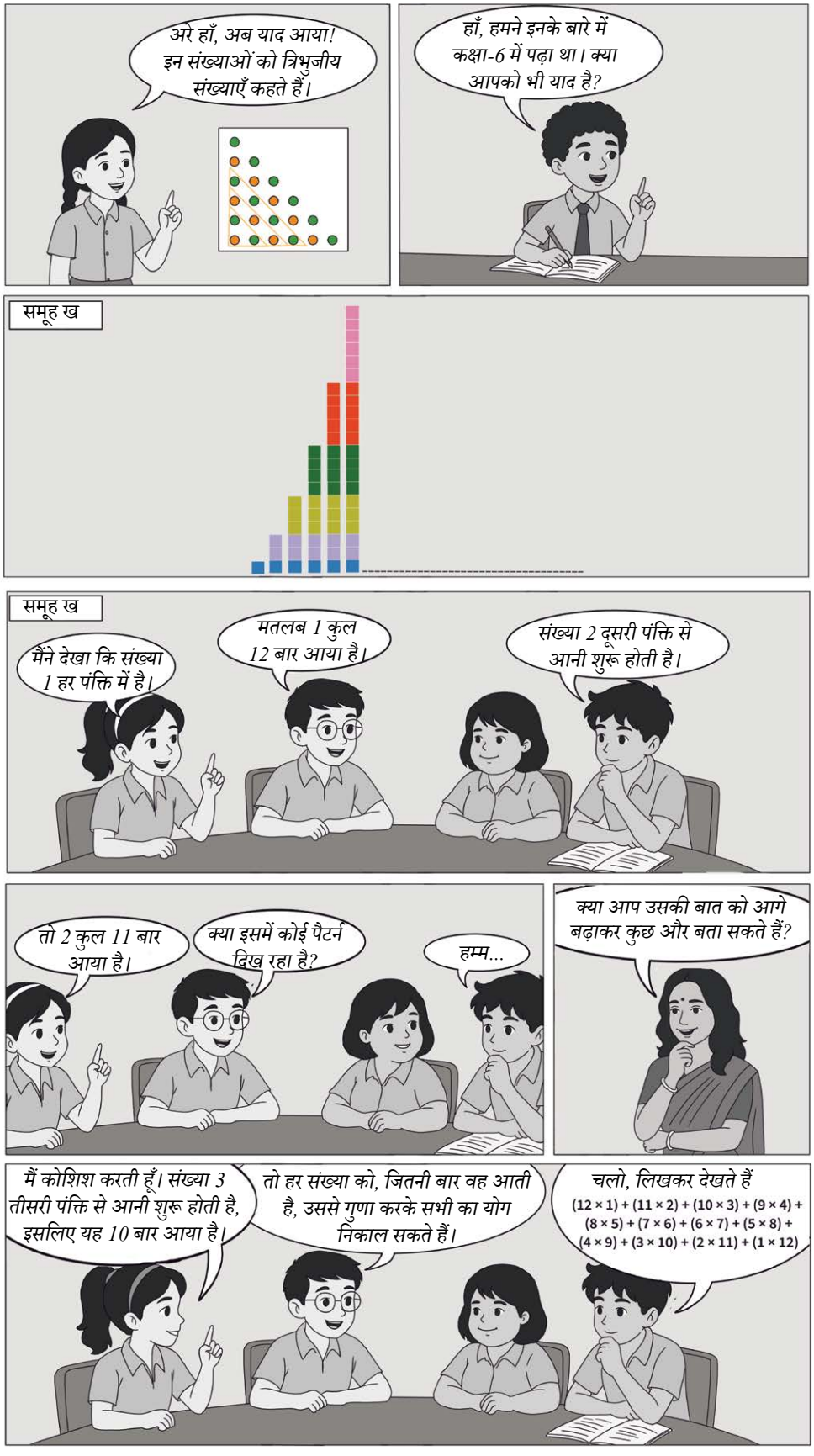
विद्यार्थियों को उत्तर मिलता है : 364

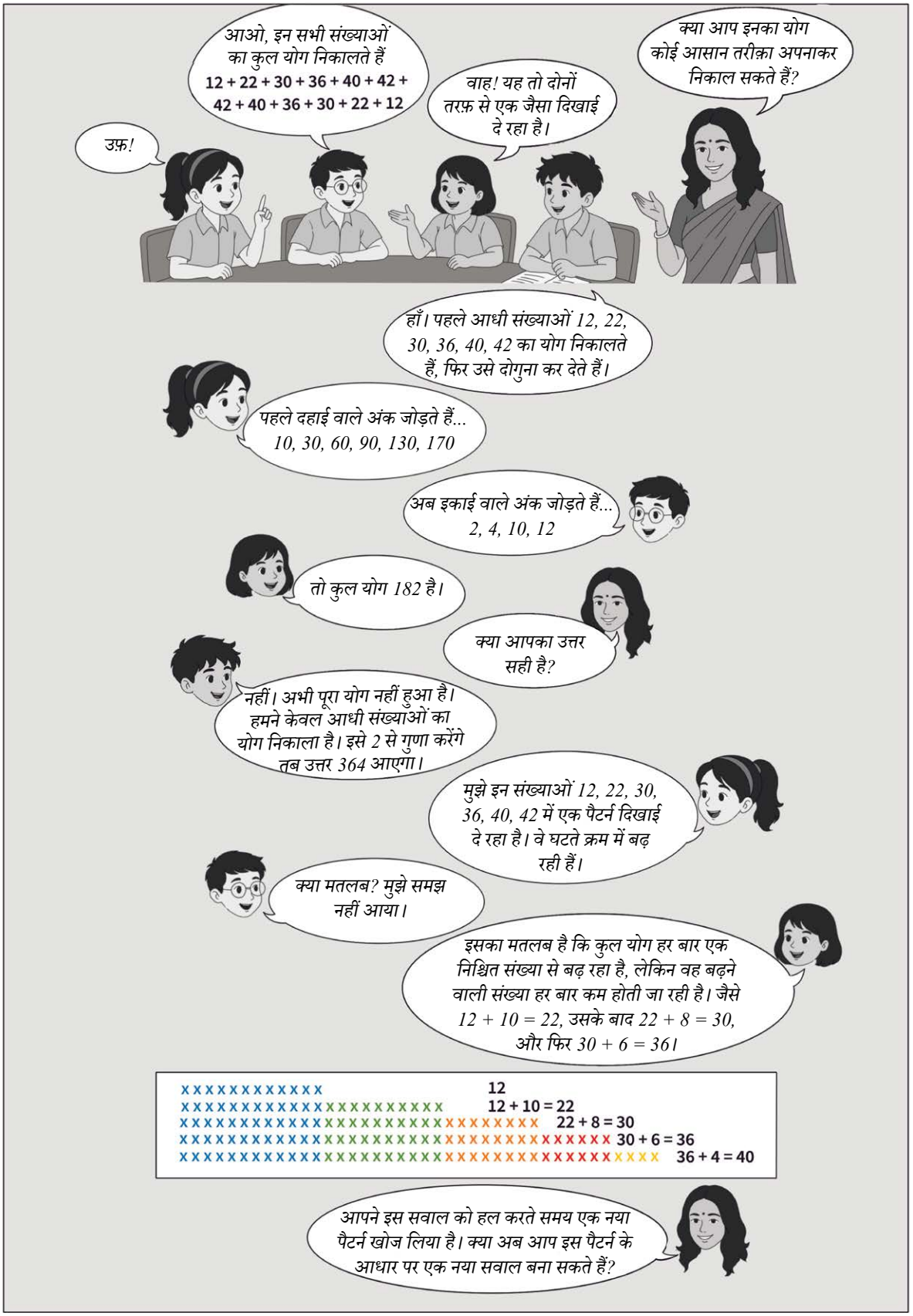
1	1	1
2	2 + 1	3
3	3 + 2 + 1	6
4	4 + 3 + 2 + 1	10
5	5 + 4 + 3 + 2 + 1	15
6	6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	21
7	7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	28
8	8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	36
9	9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	45
10	10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	55
11	11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	66
12	12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1	78

क्या आपको इन योगों में कोई ख़ास पैटर्न दिखाई दे रहा है? 1, 3, 6, 10, 15...

दूसरी संख्या पहली से 2 अधिक है, तीसरी दूसरी से 3 अधिक है, और चौथी तीसरी से 4 अधिक है।

बहुत बढ़िया। ये संख्याएँ देखकर आपको क्या याद आता है?


अरे हाँ, अब याद आया! इन संख्याओं को त्रिभुजीय संख्याएँ कहते हैं।
हाँ, हमने इनके बारे में कक्षा-6 में पढ़ा था। क्या आपको भी याद है?
समूह ख
समूह ख
मैंने देखा कि संख्या 1 हर पंक्ति में है।
मतलब 1 कुल 12 बार आया है।
संख्या 2 दूसरी पंक्ति से आनी शुरू होती है।
तो 2 कुल 11 बार आया है।
क्या इसमें कोई पैटर्न दिख रहा है?
हम्म...
क्या आप उसकी बात को आगे बढ़ाकर कुछ और बता सकते हैं?
मैं कोशिश करती हूँ। संख्या 3 तीसरी पंक्ति से आनी शुरू होती है, इसलिए यह 10 बार आया है।
तो हर संख्या को, जितनी बार वह आती है, उससे गुणा करके सभी का योग निकाल सकते हैं।
चलो, लिखकर देखते हैं
(12 × 1) + (11 × 2) + (10 × 3) + (9 × 4) + (8 × 5) + (7 × 6) + (6 × 7) + (5 × 8) + (4 × 9) + (3 × 10) + (2 × 11) + (1 × 12)


आओ, इन सभी संख्याओं का कुल योग निकालते हैं
12 + 22 + 30 + 36 + 40 + 42 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12
वाह! यह तो दोनों तरफ़ से एक जैसा दिखाई दे रहा है।
क्या आप इनका योग कोई आसान तरीक़ा अपनाकर निकाल सकते हैं?
उफ़!
हाँ। पहले आधी संख्याओं 12, 22, 30, 36, 40, 42 का योग निकालते हैं, फिर उसे दोगुना कर देते हैं।
पहले दहाई वाले अंक जोड़ते हैं... 10, 30, 60, 90, 130, 170
अब इकाई वाले अंक जोड़ते हैं... 2, 4, 10, 12
तो कुल योग 182 है।
क्या आपका उत्तर सही है?
नहीं। अभी पूरा योग नहीं हुआ है। हमने केवल आधी संख्याओं का योग निकाला है। इसे 2 से गुणा करेंगे तब उत्तर 364 आएगा।
मुझे इन संख्याओं 12, 22, 30, 36, 40, 42 में एक पैटर्न दिखाई दे रहा है। वे घटते क्रम में बढ़ रही हैं।
क्या मतलब? मुझे समझ नहीं आया।
इसका मतलब है कि कुल योग हर बार एक निश्चित संख्या से बढ़ रहा है, लेकिन वह बढ़ने वाली संख्या हर बार कम होती जा रही है। जैसे 12 + 10 = 22, उसके बाद 22 + 8 = 30, और फिर 30 + 6 = 36।
12
12 + 10 = 22
22 + 8 = 30
30 + 6 = 36
36 + 4 = 40
आपने इस सवाल को हल करते समय एक नया पैटर्न खोज लिया है। क्या अब आप इस पैटर्न के आधार पर एक नया सवाल बना सकते हैं?

समूह ग

1	1
2	2 + 1
3	3 + 2 + 1
4	4 + 3 + 2 + 1
5	5 + 4 + 3 + 2 + 1
6	6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
7	7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
8	8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
9	9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
10	10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
11	11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
12	12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1

क्यूँ न हम हर पंक्ति की संख्याओं का योग निकालने के लिए गॉस की विधि अपनाएँ जो हमने पहले सीखी थी?

मलतब?

याद है, गॉस ने 1 से 100 तक की सभी संख्याओं का योग निकालने के लिए उनके जोड़े बनाए थे। जैसे 1 और 99, 2 और 98...

यह अच्छा तरीक़ा है। इसे आज़माकर देखें।

जी बिल्कुल। सबसे पहले आख़िरी पंक्ति को देखते हैं। इसमें कौन-कौन-से जोड़े बन सकते हैं?

12 और 1 मिलाकर 13 होते हैं। 11 और 2 मिलाकर भी 13 होते हैं।

यानी 13 के 6 जोड़े बनेंगे। इसे 6 × 13 लिख सकते हैं।

अब 11वीं पंक्ति देखते हैं। 11 और 1, 10 और 2। हर जोड़े का योग 12 है।

लेकिन 6 अकेला बच जाएगा।

इसलिए 12 के 5 जोड़ों के साथ 6 भी जोड़ देंगे। यानी (5 × 12) + 6

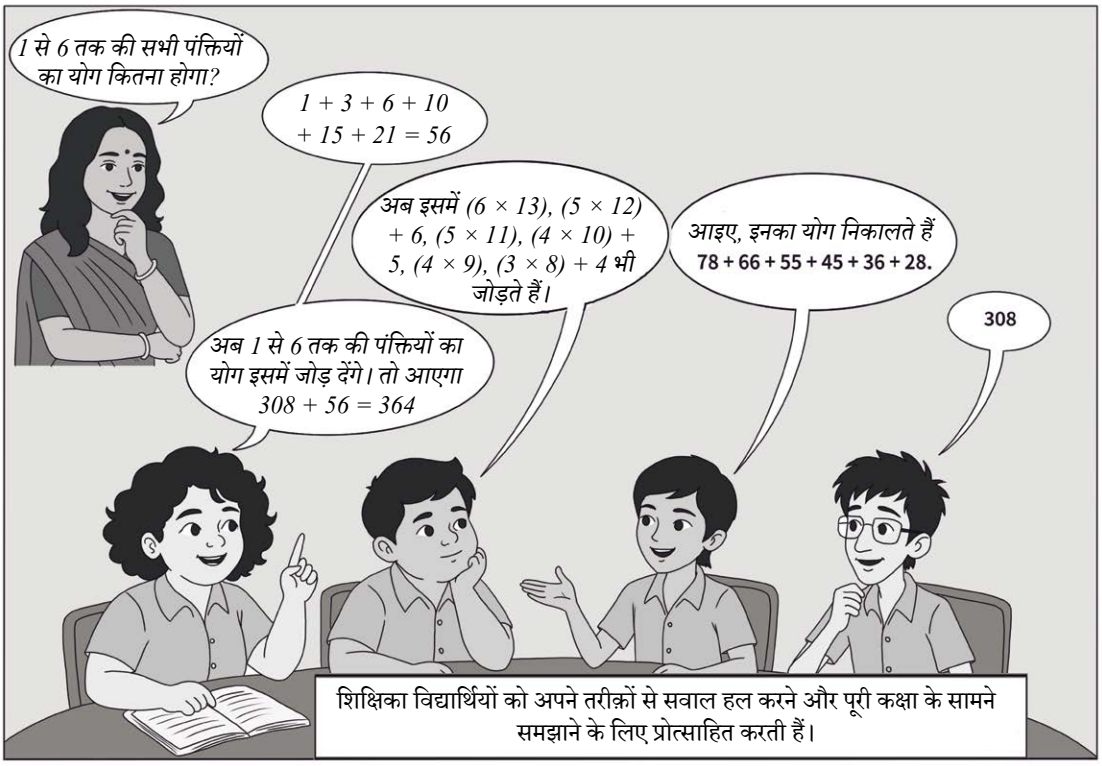
10 वीं पंक्ति में 5 जोड़े हैं। हर जोड़े का योग 11 है। इसलिए इसका योग 5 × 11 होगा।

9 वीं पंक्ति में 10 के 4 जोड़े बनते हैं और 5 वीं पंक्ति का योग (4 × 10) + 5 होगा।

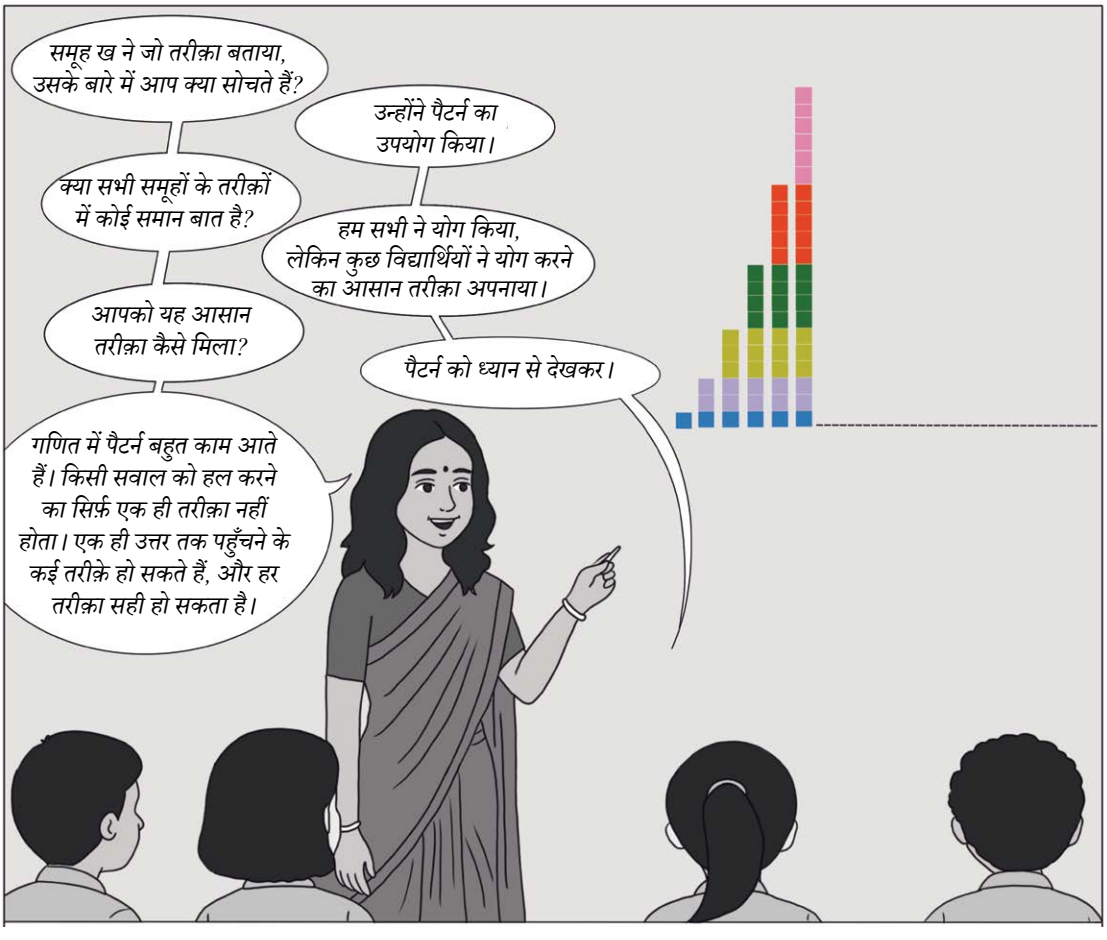
8 वीं पंक्ति में 9 के 4 जोड़े बनते हैं। यानी 4 × 9

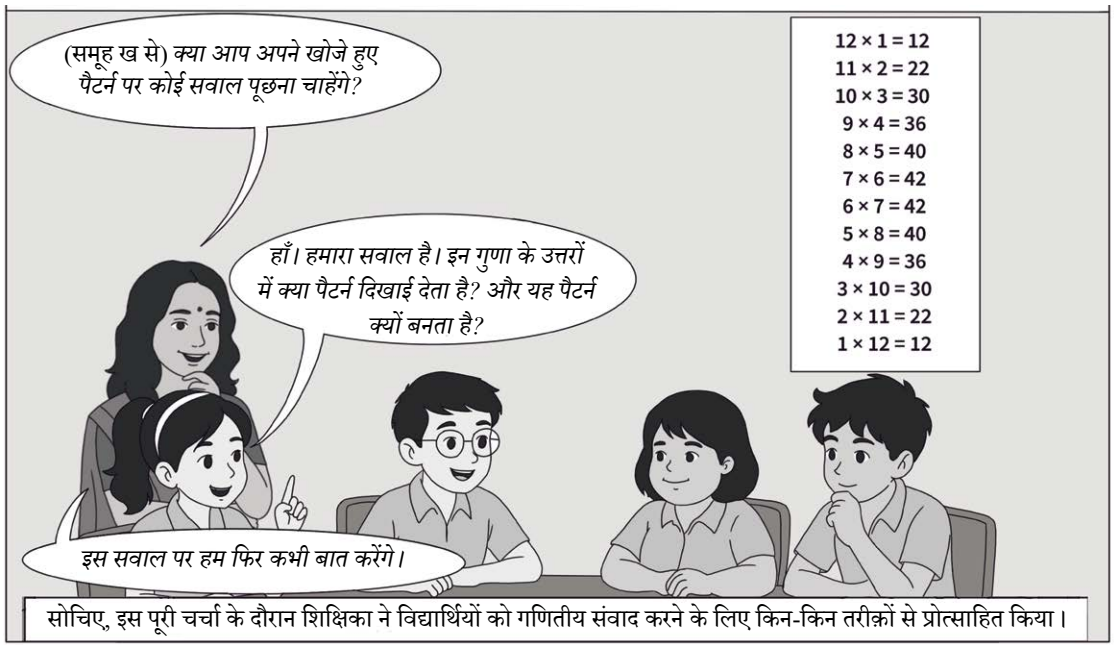
7 वीं पंक्ति में 8 के 3 जोड़े बनते हैं और 4 बच जाता है। यानी (3 × 8) + 4।

बाक़ी पंक्तियों का योग तो सीधे संख्याओं को जोड़कर निकाल सकते हैं।



शिक्षिका विद्यार्थियों को अपने तरीक़ों से सवाल हल करने और पूरी कक्षा के सामने समझाने के लिए प्रोत्साहित करती हैं।





सोचिए, इस पूरी चर्चा के दौरान शिक्षिका ने विद्यार्थियों को गणितीय संवाद करने के लिए किन-किन तरीक़ों से प्रोत्साहित किया।

यदि आपके पास गणितीय संवाद के ऐसे या अन्य उदाहरण हों तो उन्हें atrightangles.editor@apu.edu.in पर अवश्य भेजें।

यहाँ हमने कुछ रोचक सवाल और उन पर हुई उपयोगी चर्चाएँ दिखाई हैं। इनसे विद्यार्थियों को नई बातें खोजने और गणित को बेहतर ढंग से समझने का अवसर मिलता है। अब यह सवाल उठ सकता है कि क्या हर शिक्षक के लिए ऐसा करना आसान है? शिक्षक को पहले सवाल को अच्छी तरह समझना होता है। साथ ही, उन्हें समय का ध्यान रखना पड़ता है, पाठ्यक्रम पूरा करना होता है, और तय समय-सीमा का भी पालन करना होता है। इसलिए हमारा सुझाव है कि शिक्षक महीने में कम-से-कम एक बार ऐसी गणितीय गतिविधियाँ और चर्चाएँ ज़रूर कराएँ। गणितीय संवाद से विद्यार्थियों की गणितीय सोच विकसित होती है, और यही गणित शिक्षण का एक महत्त्वपूर्ण उद्देश्य है।

पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर का हिस्सा हैं, जहाँ वे 1983 से कार्यरत हैं। उन्होंने वहाँ गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषयों को पढ़ाया है। 1990 के दशक में, उन्होंने दिवंगत श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वे उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलीमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को तैयार किया था, जिसे 'स्कूल इन अ बॉक्स' (School in a Box) के नाम से जाना जाता है। वर्तमान में वे एनसीईआरटी के पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रोशन ख़ान **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल