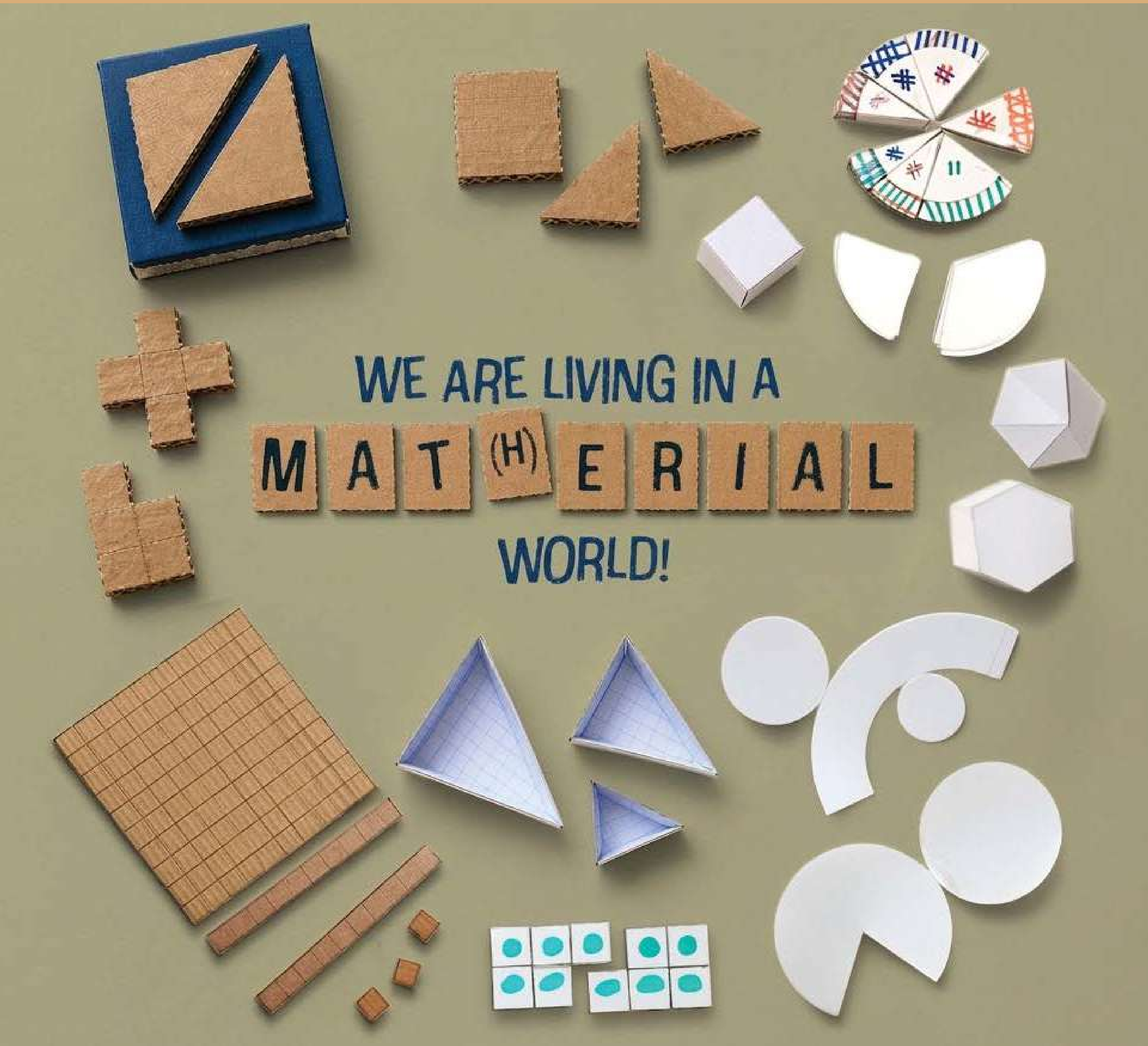
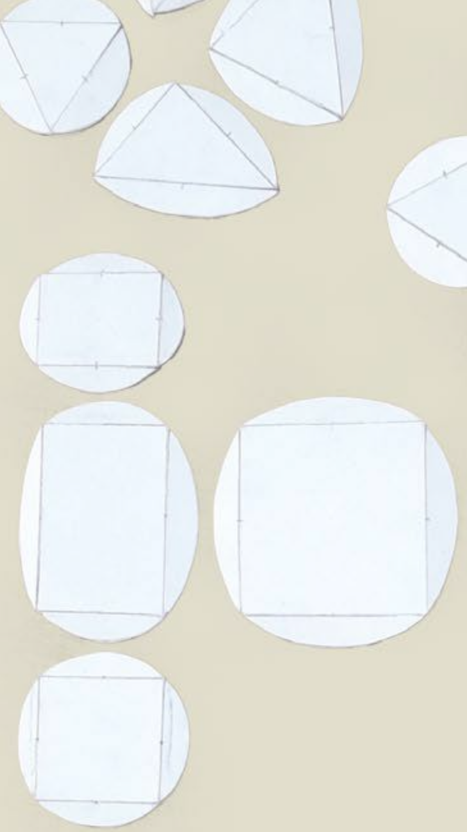
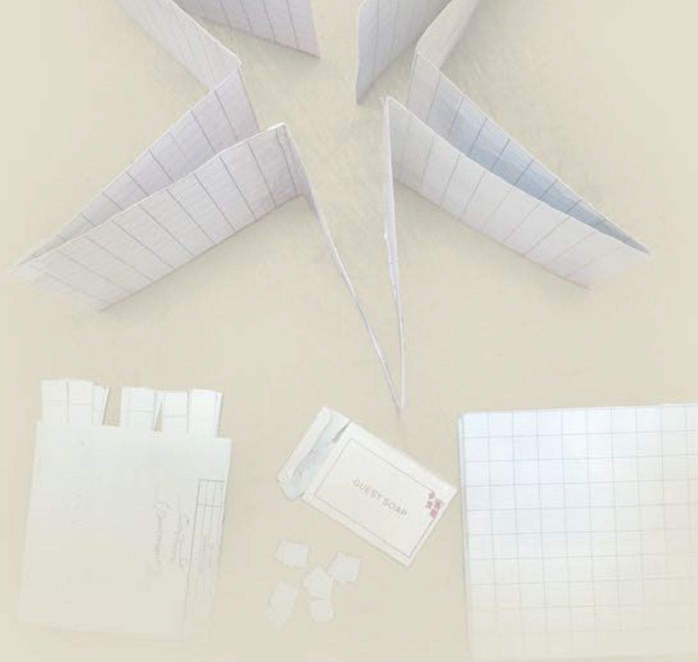
अंक 25 | जुलाई 2026
चौ-मासिक | बेंगलूरु
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

Azim Premji University

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन



Mat(h)erials स्वाती सरकार द्वारा गढ़ा गया एक शब्द है, जिसका उपयोग गणित सिखाने के लिए उपयोग की जाने वाली सामग्रियों का वर्णन करने के लिए किया जाता है। आमतौर पर बेकार पड़े सूखे कबाड़ का उपयोग करके बनाए गए ये *Mat(h)erials* क़ीमती रत्नों की तरह अपनी प्राकृतिक सुन्दरता दिखाने के लिए सही माहौल या व्यवस्था की माँग करते हैं।

ये न तो किसी अनछुई 'गणित प्रयोगशाला' में धूल चाटते हुए और न ही किसी सुनसान 'गणित के कोने' में उपेक्षित पड़े रह सकते हैं। इनके बारे में जाँच-पड़ताल करने, विचार करने और सबसे महत्त्वपूर्ण बात – इनके बारे में चर्चा करने की आवश्यकता है। ये अपने आप में गणित नहीं हैं, बल्कि गणित सीखने का एक साधन हैं। इसलिए, बच्चों की समझ का ध्यानपूर्वक आकलन करके सही योजना बनाकर इनका इस्तेमाल किया जाना चाहिए।

सम्पादक की ओर से...

प्रिय पाठको,

आधा रास्ता हमेशा रुकने और विचार करने का एक अच्छा अवसर होता है। 2026 के इस दूसरे अंक में, हमारे पास मुड़कर पीछे निहारने और आगे की ओर देखने के लिए बहुत कुछ है। *At Right Angles* का डिजिटल संस्करण (https://atrightangles.azimpremjiuniversity.edu.in/) अब हर हफ़्ते नए लेखों के साथ आपके सामने आ रहा है। प्राथमिक विद्यालय के गणित से लगाव रखने वाले सभी लोगों के लिए यह एक पसन्दीदा स्थान है।

इस अंक के कवर पर 90 के दशक के अँग्रेज़ी के एक हिट गाने *Material Girl* की एक पंक्ति का उपयोग किया गया है – जिससे शायद हमारे अधिकांश पाठक परिचित न हों। लेकिन गणित के शिक्षणशास्त्र से गहराई से जुड़े लोग *mat(h)erials* (यानी गणित शिक्षण में इस्तेमाल की जाने वाली सामग्रियों) से अच्छी तरह वाकिफ़ होंगे। निश्चित रूप से, ये हमारे चारों ओर प्रचुर मात्रा में मौजूद हैं, और कक्षा में इनके उपयोग की सिफ़ारिश नीतियों में तथा शिक्षक-प्रशिक्षकों और स्कूल प्रशासकों द्वारा जोर-शोर से की जाती है। क्या इससे गणित के सीखने में सुधार की गारंटी मिलेगी? मिंट* में प्रकाशित अनुराग बेहार के कॉलम से यहाँ कुछ बिन्दु दिए गए हैं :

> *पिछले हफ़्ते एक स्कूल में मैंने एक शिक्षक को भिन्नों पर एक 'गतिविधि' करवाते हुए देखा। लगभग बीस बच्चों ने पूरे उत्साह और आनन्द के साथ काग़ज़ को मोड़कर आधे और चौथाई हिस्से बनाए। वहाँ हलचल, रंग और उत्साह था – एक प्रगतिशील कक्षा के सभी लक्षण। कक्षा के अन्त में, मैंने कुछ बच्चों से पूछा कि भिन्न क्या होती है। उन्होंने अपने हाथों में मुड़े हुए काग़ज़ को देखा, फिर मेरी तरफ़ देखा और उनके पास कहने के लिए कुछ नहीं था। दरअसल गतिविधि हुई थी; सीखना नहीं हुआ था।*
>
> *शिक्षक की कोई ग़लती नहीं थी। वह पूरी ईमानदारी और लगन से वही कर रहे थे जो उन्हें बताया गया था कि यह अच्छा शिक्षण है। ग़लती बहुत गहरी और पहले हुई थी, उस बौद्धिक भूल में जिसने दो दशकों से धीरे-धीरे भारतीय स्कूली शिक्षा को प्रभावित किया है।*

वे आगे कहते हैं :

> *'सीखना निर्माण की एक सक्रिय प्रक्रिया है', काफ़ी हद तक यह बात सच है, लेकिन इस बात से फिसलकर हम दावों के एक बिलकुल अलग सेट पर चले गए कि 'इसलिए शिक्षण में निर्देश कम-से-कम होने चाहिए' – यानी कि शिक्षक को बच्चों को समझाना नहीं चाहिए, कि सीधे निर्देश देना एक तरह की तानाशाही है, कि बच्चों को गतिविधियों के माध्यम से ख़ुद विचारों की खोज करनी चाहिए, कि अभ्यास और याद रखना समझ के दुश्मन हैं।*

इन्हीं बातों को ध्यान में रखते हुए हम नन्दिता जयराज और स्वाती सरकार द्वारा लिखित दो **विशेष** लेख प्रस्तुत कर रहे हैं। मैनिपुलेटिव्स के उपयोग में शिक्षक का सुगमीकरण कौशल सबसे महत्त्वपूर्ण हिस्सा है। सम्प्रेषण सबसे ज़रूरी है! इस पूरे अंक में यह थीम सोनिया कुण्डु द्वारा लिखित *मूर्त से अमूर्त की ओर*, सुयश तिवारी द्वारा लिखित *काप्रेकर के स्थिरांक की खोज* और जीवेश पंचभाई द्वारा लिखित *अन्तर को मापना* में छाई हुई है।

गणित का मज़ा में, हम समस्या-समाधान पर ध्यान केन्द्रित कर रहे हैं : सुमित पाण्डे द्वारा लिखित *स्टार प्रॉब्लम*, और जयश्री व मोहन द्वारा लिखित *पेंटोमिनोज़* । यह केवल उत्तर पाने या बिना किसी उद्देश्य के खेलने के लिए नहीं हैं, बल्कि प्रक्रिया की जाँच करने और समस्या-समाधान की कला का आनन्द लेने व विकसित करने के लिए हैं। **समीक्षा** में इस बार कुछ बहुत ही अलग है! इसे ज़रूर देखें। और अंक को हम पद्माप्रिया शिराली द्वारा लिखित *गणितीय संवाद* के साथ समाप्त कर रहे हैं - जिसमें गणितीय बातचीत को दर्शाया गया है जो अच्छे शिक्षण को प्रदर्शित करती है।

हम बेहार के एक उद्धरण के साथ अपनी बात पूरी कर रहे हैं :

> *अच्छा शिक्षण किसी भी सिद्धान्त का अनुप्रयोग नहीं है, चाहे वह नया हो या पुराना। यह स्व-विवेक की बात है : यह जानना कि कब समझाना है और कब बच्चों को जूझने देना है, कब कोई गतिविधि समझ को गहरा करती है और कब वह केवल ख़ाना-पूर्ति करती है, कौन-सी चीज़ों को अभ्यास के माध्यम से स्वचालित बना लेना आवश्यक है ताकि दिमाग़ सोचने के लिए स्वतंत्र रहे।*

तो आएँ और एक ऐसी कक्षा बनाने की यात्रा में हमारे साथ जुड़ें 'जहाँ मन निडर हो और मस्तक ऊँचा हो!'

स्नेहा टाइटस
मुख्य सम्पादक, एट राइट एंगल्स
AtRightAngles.editor@apu.edu.in
* https://shorturl.at/Zxaer

सम्पादकीय टीम

स्नेहा टाइटस
मुख्य सम्पादक
sneha.titus@apu.edu.in

सुधीश वेंकटेश
प्रबन्ध सम्पादक
sudheesh.venkatesh@azimpremjifoundation.org

मोहन आर.
सह-सम्पादक
mohan.r@apu.edu.in

अजय कुमार के.
ajaykumar.k@apu.edu.in

अर्धेन्दु शेखर दाश
arddhendu@azimpremjifoundation.org

अशोक प्रसाद
ashok.prasad@azimpremjifoundation.org

देबब्रत साहा
debabrata.saha@azimpremjifoundation.org

क्षमा चक्रवर्ती
kshama.chakravarthy@azimpremjifoundation.org

पद्मप्रिया शिराली
padmapriya.shirali@gmail.com

पुनीत एस.
puneeth.s@azimpremjifoundation.org

रुद्रेश एस.
rudresh@azimpremjifoundation.org

सन्दीप दिवाकर
sandeep.diwakar@azimpremjifoundation.org

शान्ता भूषण
shantha.bhushan@apu.edu.in

स्वाती सरकार
swati.sircar@apu.edu.in

अनुवाद अंक सम्पादक
मधुकर एस.पुट्टी (कन्नड़)
राजेश उत्साही (हिन्दी)

हिन्दी अनुवाद
एकलव्य फ़ाउण्डेशन
समन्वय : प्रतिका गुप्ता

प्रकाशन टीम
मीरा प्रभु, शाहनाज़ बेगम,
लोकराम वी.जी., सम्बित महापात्र

सम्पादकीय कार्यालय
अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी,
सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड,
सरजापुरा, बेंगलूरु, कर्नाटक - 562 125
ई-मेल : publications@apu.edu.in
वेबसाइट : www.azimpremjiuniversity.edu.in

डिज़ाइन
जिंक एंड ब्रोकोली
बेंगलूरु, कर्नाटक

हिन्दी अंक लेआउट एवं मुद्रक
आदर्श प्रा.लि., भोपाल, मध्य प्रदेश

एट राइट एंगल्स अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन है, जो स्कूली शिक्षकों के लिए गुणवत्तापूर्ण गणित शिक्षण संसाधन प्रदान करता है। इसका उद्देश्य न केवल कक्षाओं के भीतर, बल्कि स्कूली प्रक्रियाओं के व्यापक सन्दर्भ में भी, अधिक अनुभवात्मक और सार्थक शिक्षण-अधिगम प्रक्रियाओं को सुगम बनाना है। उद्देश्यपूर्ण और उत्साहपूर्ण शिक्षण के लिए, एट राइट एंगल्स भारत और उसके विविध समुदायों की वास्तविकताओं पर आधारित व्यावहारिक अन्तर्दृष्टि प्रस्तुत करता है।

एट राइट एंगल्स *अंक 25, जुलाई 2026 का यह* ***हिन्दी अनुवाद*** *सितम्बर, 2026 में प्रकाशित हुआ है।*

नोट : इस अंक में व्यक्त किए गए सभी विचार और राय लेखकों के निजी हैं और अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन या अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी किसी भी रूप में इसके लिए उत्तरदायी नहीं है।

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University
A publication of Azim Premji University

विशेष

1 मैनिपुलेटिव्स जादू नहीं हैं : गणित कक्षा की ज़मीनी हक़ीक़त
नन्दिता जयराज

5 और मैं हूँ एक *Mat(h)erial* Girl!
स्वाती सरकार

कक्षा में

15 मूर्त से अमूर्त की ओर : गणित शिक्षण जो हमेशा याद रहे
सोनिया कुण्डू

20 काप्रेकर के स्थिरांक की खोज में
सुयश तिवारी

25 अन्तर को मापना
जीवेश पंचभाई

29 वर्कशीट : मापन
क्षमा चक्रवर्ती

33 स्टार प्रॉब्लम
सुमित कुमार पाण्डेय

गणित का मज़ा

39 नाचते अंक

43 संख्या तालिका पर पेंटोमिनो : एक खोज
जयश्री सुब्रमण्यन और मोहन आर.

48 वर्कशीट : संख्या तालिका पर पेंटोमिनो
जयश्री सुब्रमण्यन और मोहन आर.

समीक्षा

50 बच्चों में धन की समझ
समीक्षक : क्षमा चक्रवर्ती

हैंडबुक

कक्षा में गणितीय संवाद
पद्मप्रिया शिराली

मैनिपुलेटिव्स[1] जादू नहीं हैं : गणित कक्षा की ज़मीनी हक़ीक़त

नन्दिता जयराज

दशकों से, 'गणित प्रयोगशाला' जैसी अनेक पहलों के माध्यम से गणित शिक्षा में बदलाव का प्रयास किया जा रहा है। क्या यह प्रयास सार्थक है? इस बदलाव को कैसे मापा जाता है? और ऐसा क्यों है कि इसके बहुत कम सकारात्मक परिणाम सामने आए हैं?

भूवैज्ञानिक ज्यां डी हेंज़ेलिन 1950 के दशक में डेमोक्रेटिक रिपब्लिक ऑफ कांगो के इशांगो क्षेत्र में एडवर्ड झील के तट से चट्टानों को खुरच रहे थे। इस दौरान उन्हें बीच-बीच में मानव हड्डी या मानव निर्मित वस्तुएँ मिल रही थीं। यह कोई आश्चर्य की बात नहीं थी। क्योंकि इस क्षेत्र के बारे में मशहूर था कि यहाँ प्रागैतिहासिक मानव बस्तियाँ थीं। लेकिन उन्हें जिस चीज़ के मिलने की बिल्कुल उम्मीद नहीं थी, वह थी (सम्भवतः) अब तक ज्ञात सबसे प्राचीन गणितीय उपकरण।

हम अभी भी पक्के तौर पर नहीं जानते हैं कि हेंज़ेलिन को मिली 'इशांगो हड्डी' पर बने रहस्यमयी पैटर्न क्या दर्शाते हैं। लेकिन कुछ विशेषज्ञों को विश्वास है कि वे पैटर्न इस बात का प्रमाण हैं कि 20 हज़ार साल पहले से ही हमारे पूर्वज संख्याओं, गणितीय संक्रियाओं, क्रमों और अभाज्य संख्याओं का उपयोग कर रहे थे। इशांगो हड्डी की वास्तविकता चाहे जो भी हो, यह इस बात का एक शानदार उदाहरण है कि कैसे भौतिक वस्तुएँ गणित की हमारी शुरुआती समझ को गहराई से आकार दे सकती हैं।

भारत के 605 ग्रामीण ज़िलों के लगभग 6.5 लाख बच्चों तक पहुँचकर किए गए एक देशव्यापी ग्रामीण घरेलू सर्वेक्षण की नवीनतम असर (ASER) रिपोर्ट (2024), ने एक बार फिर इस बात पर प्रकाश डाला है कि हमारे स्कूलों में जिस तरह से गणित पढ़ाया जा रहा है और जिस तरह से उसका आकलन किया जा रहा है, उसमें गम्भीर समस्याएँ बनी हुई हैं। कक्षा-8 के 50% से भी कम विद्यार्थी बुनियादी अंकगणित करने में सक्षम पाए गए हैं। यह चिन्ताजनक है क्योंकि यह स्थापित हो चुका है कि गणित में दक्षता बच्चों को भविष्य में रोज़गार और स्वतंत्र रूप से जीने में सफलता का संकेत देती है।

शिक्षाविद और 'जोड़ो ज्ञान' की संस्थापिका ऊषा मेनन ने एक लेख में लिखा, *"आज के बच्चों को... उस तरह कैलकुलेटर बनने की ज़रूरत नहीं है जैसा कि 19वीं सदी में कुछ लोगों को बनना पड़ा था। उन्हें ऐसे व्यक्ति बनने की आवश्यकता है जो आज की चुनौतियों (चाहे वह जलवायु परिवर्तन की हो या बढ़ती असमानताओं की) का सामना करने के क्रम में हल करने हेतु नई समस्याएँ सामने रख सकें। उन्हें केवल संख्यात्मक रूप से नहीं बल्कि परिमाणात्मक रूप से सोचना सीखना होगा और केवल प्रक्रियात्मक रूप से नहीं बल्कि सम्बन्धपरक रूप से सोचना होगा।"*

गणित की तह तक पहुँचना

इसे स्वीकार करते हुए, सरकारों, ग़ैर-सरकारी संगठनों, स्कूलों और शिक्षकों ने स्थिति में सुधार के लिए पिछले कुछ दशकों में कई पहलों का नेतृत्व किया है। बुनियादी संख्यात्मक योग्यता (foundational numeracy goals) के लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए अपनाई गई हमारी रणनीतियों में से एक कक्षा में गणितीय साधनों जैसे शिक्षण-अधिगम सामग्री (TLM) को शामिल करना रहा है। गणितीय संसाधनों

1. मैनिपुलेटिव्स यानी ऐसी भौतिक वस्तुएँ जिनका उपयोग गणितीय अवधारणाओं और प्रक्रियाओं की बेहतर समझ और अमूर्त अवधारणाओं को ठोस बनाने के लिए किया जाता है। इन वस्तुओं से बने मॉडल विज़ुअलाइज़ेशन में मदद करते हैं। अधिकांश मैनिपुलेटिव्स संख्याओं से जुड़े होते हैं। इनका उपयोग परिचय, तुलना, जोड़-घटाना-गुणा-भाग करने के लिए किया जा सकता है। बीजगणित टाइलें इनमें से एक हैं। जियोबोर्ड और रबर बैंड ज्यामिति के लिए हैं। रंगोमैट्री, जोड़ो स्ट्रॉ, इंटरलॉकिंग क्यूब्स, फ्लेक्सीवायर, आकार परिवार, टैनग्राम, पॉलीओमिनो कट संख्याओं, पैटर्न और ज्यामिति के लिए काम आते हैं।

की-वर्ड : *शिक्षण-अधिगम सामग्री, खोज, खेल, दृष्टिकोण, बदलाव, शैक्षणिक लाभ*

या *mat(h)erial* (जैसा कि अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के 'मैथ स्पेस' में इन्हें जाना जाता है) के कई उदाहरण हैं। इसमें 'गणितमाला', जो पूर्ण संख्याओं को सीखने के लिए इस्तेमाल की जाने वाली मोतियों की एक शृंखला है; बुनियादी अंकगणित संक्रियाओं के लिए उपयोग किए जाने वाले 'डीन्स ब्लॉक' या 'फ्लैट्स-लॉन्स-यूनिट्स'; और स्थानीय मान को समझने के लिए उपयोग किए जाने वाले 'एरो कार्ड' शामिल हैं।

जब कक्षा में भौतिक सामग्री होती हैं, तो बच्चे उन चीज़ों को उठाने और उनके साथ खेलने के लिए आकर्षित होते हैं। इस तरह की गतिविधियाँ बच्चों में संख्या और गणितीय सम्बन्धों के बारे में सहज ज्ञान विकसित करने में मदद कर सकती हैं। उत्तराखण्ड के अज़ीम प्रेमजी स्कूल में गणित की शिक्षिका गरिमा भट्ट कभी-कभी कक्षा में अपनी सामग्री विद्यार्थियों के पास ही छोड़ देती हैं। उनका कहना है, *"कम-से-कम प्राथमिक कक्षाओं में, गणितीय सामग्री का आनन्द नहीं छीना जाना चाहिए और विद्यार्थियों को सब कुछ सीखने के लिए शिक्षक पर निर्भर नहीं रहना चाहिए।"* अकसर, वे कक्षा में प्रवेश करती हैं तो ऐसे उत्सुक बच्चे उन्हें घेर लेते हैं जो उन वस्तुओं के साथ खेल रहे होते हैं। *"मुझे एहसास हुआ कि बच्चों ने वस्तुओं के डिब्बे के पीछे दिए गए निर्देशों को देख लिया था या चित्रों के माध्यम से नियमों की व्याख्या कर ली थी।"*

यूनिवर्सिटी के 'मैथ स्पेस' की सह-निर्माता और उसे संचालित करने वाली स्वाती सरकार ने कहा, *"आपको वास्तव में उनके बारे में सिखाने की आवश्यकता नहीं पड़ती।"* उन्होंने याद करते हुए कहा, *"एक बार हमने उत्तरकाशी की एक कक्षा के फ़र्श पर 2 मीटर का स्केल स्थाई रूप से लगाकर छोड़ दिया था।"* जब वे कक्षा में दुबारा लौटीं, तो उन्होंने बच्चों को ज़मीन पर लेटकर उत्साहपूर्वक अपनी लम्बाई मापते हुए पाया। *"गणित की कक्षा न होने पर भी बच्चों की पहुँच उन वस्तुओं तक होती है। और जब कमरे में उनके साथ बड़े बच्चे होते हैं तो वे और भी तेज़ी से सीखते हैं।"* उन्होंने एक मोंटेसरी स्कूल की शिक्षिका को याद किया। शिक्षिका ने 10 अंकों की संख्याओं के साथ बच्चों की सहजता पर आश्चर्य व्यक्त करते हुए उनसे कहा था, *"हमारे बच्चे अपने माता-पिता के फ़ोन नम्बरों को जोड़ने और घटाने लगे हैं!"*

इस बात की बहुत सम्भावना है कि औपनिवेशिक काल से पहले गणितीय शिक्षण में गणितीय सामग्री (कंकड़, बीज, सीपियाँ, छड़ियाँ आदि) का उपयोग किया जाता था। लेकिन पिछली शताब्दी में गणित का शिक्षण काफ़ी हद तक ब्लैकबोर्ड और पाठ्यपुस्तकों तक ही सीमित हो गया था। शिक्षाविद मारिया मोंटेसरी के प्रभाव के परिणामस्वरूप 1900 के दशक में देश भर में मोंटेसरी स्कूल खुलने लगे। इन स्कूलों ने प्रारम्भिक शिक्षा में गणित और अन्य बुनियादी कौशल सिखाने के लिए मैनिपुलेटिव्स का उपयोग किया, लेकिन वे अपवाद थे। 20वीं सदी के उत्तरार्ध में सरकार द्वारा चलाए गए कार्यक्रमों की एक शृंखला [जैसे कि ज़िला प्राथमिक शिक्षा कार्यक्रम (DPEP)], ने गणित को अधिक स्पर्शनीय तरीक़ों (tactile ways) से पढ़ाने के विचार को फिर से प्रस्तुत किया। प्राथमिक शिक्षा के बारे में हर नई रिपोर्ट, विशेष रूप से राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2022 और राष्ट्रीय शिक्षा नीति में इसे दोहराया गया है। नतीजतन, भारत में अधिक-से-अधिक स्कूलों ने इस उम्मीद में गणित प्रयोगशालाएँ स्थापित की हैं कि इससे विद्यार्थियों के बीच 'गणित के डर' (math phobia) के प्रचलित रवैए से निपटा जा सकेगा।

यह हमेशा काम नहीं करते

असर (ASER) सर्वेक्षण में भाग लेने वाले 75% से अधिक स्कूलों को बुनियादी साक्षरता और संख्यात्मक योग्यता के लिए टीएलएम और/या टीएलएम बनाने या ख़रीदने के लिए धन प्राप्त हुआ था। हालाँकि ये उत्साहजनक संकेत हैं, पर ज़मीन पर काम करने वालों का मानना है कि केवल स्कूल में गणित प्रयोगशाला होने से काम नहीं चलेगा। यह सब इस बात पर निर्भर करता है कि अन्ततः उनका उपयोग कैसे किया जाता है। क्या विद्यार्थी किसी विशिष्ट सामग्री का उपयोग इस तरह से कर सकते हैं कि वह उनके मौजूदा ज्ञान से जुड़े और उनके लिए सार्थक हो? क्या सामग्री का उपयोग इस तरह किया जाता है कि उसमें विद्यार्थियों की ओर से चिन्तन या विचार की आवश्यकता हो?

स्वाती ज़ोर देकर कहती हैं, *"मुख्य बात यह है कि कक्षा के सभी विद्यार्थियों की पहुँच किसी-न-किसी ठोस सामग्री तक होनी चाहिए, ताकि केवल शिक्षक ही इसका प्रदर्शन न कर रहा हो।"* एक ठेठ भारतीय कक्षा में विद्यार्थियों की बड़ी संख्या को देखते हुए, प्रत्येक विद्यार्थी के लिए एक सेट का लक्ष्य रखना तो वास्तविक नहीं है, लेकिन उनके अनुसार, 30 विद्यार्थियों की कक्षा के लिए 7 से 8 सेट पर्याप्त हैं। यह लक्ष्य अधिक सम्भ्रान्त निजी स्कूलों द्वारा तो प्राप्त किया जा सकता है, लेकिन भारत में अधिकांश प्राथमिक स्कूलों के लिए, यह भी एक ख़र्चीला मामला बन जाता है।

यह समस्या इसलिए और बढ़ जाती है क्योंकि 6 से 10 साल

के बच्चे इन उपकरणों को बहुत सँभालकर इस्तेमाल करने वाले नहीं होते हैं। गरिमा ने कहा, *"कुछ विद्यार्थी इन चीज़ों के साथ खेलते समय उन्हें तोड़ देते हैं। कभी-कभी, वे बिना पूछे छोटे कार्ड या टोकन घर ले जाते हैं।"* इस तरह की घटनाओं से बचने के लिए, कई स्कूल गणित प्रयोगशालाओं तक विद्यार्थियों की पहुँच को सीमित कर देते हैं, कभी-कभी इस हद तक कि स्वाती उन्हें 'गणित के मन्दिर' कहती हैं। उन्होंने दुख जताते हुए कहा, *"विद्यार्थियों को वहाँ एक पंक्ति में ले जाया जाता है, किसी भी चीज़ को छूने की अनुमति नहीं होती है, वे बस जैसे दर्शन के लिए एक चक्कर लगाते हैं और फिर वापस कक्षा में चले जाते हैं।"*

इस समस्या से बाहर निकलने का एक तरीक़ा ऐसी सामग्री का उपयोग करना है जो आसानी से उपलब्ध हो, किफ़ायती हो और टूटने पर उसकी मरम्मत आसानी से की जा सके। कम लागत या शून्य लागत वाले गणित किट बनाना और वितरित करना स्वाती के 'मैथ स्पेस' के 12 साल के इतिहास के दौरान मुख्य गतिविधियों में से एक रहा है। यूनिवर्सिटी के विद्यार्थियों, मुख्य रूप से बीएससी-बीएड करने वालों, को कैम्पस के वातावरण से प्राप्त रीसाइकिल्ड वस्तुएँ जैसे कार्डबोर्ड, झाड़ू की तीलियाँ, फेंके गए पैकेजिंग मटीरियल आदि का उपयोग करके गणितीय सामग्री की परिकल्पना और निर्माण करने की ज़िम्मेदारी दी जाती है। स्वाती कहती हैं, *"जिस क्षण सामग्री बच्चों के पास जाती है, आपको मानकर चलना चाहिए कि उनमें टूट-फूट होगी, कुछ खो जाएँगी। उस पर चिन्ता करने की बजाय, आप उन्हें आसानी से बदल सकते हैं!"*

स्थानीय रूप से प्राप्त सामग्री का उपयोग करने का एक और लाभ है। अध्ययन बताते हैं कि किसी संसाधन से परिचित होना सीखने में मदद करता है। यह परिचय उस सामग्री का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है जिसे विद्यार्थी अपने सन्दर्भ में देखते हैं। उदाहरण के लिए, हंगरी की कोई कक्षा गिनती सीखने के लिए चेस्टनट (शाहबलूत) का उपयोग कर सकती है, लेकिन तेलंगाना के किसी शहर के विद्यार्थी के लिए चेस्टनट पूरी तरह से अपरिचित हो सकता है। ऐसी अपरिचित वस्तु छोटे विद्यार्थी का ध्यान भटका सकती है और वह शिक्षक द्वारा सुनाई जा रही कहानी से जुड़ने में कठिनाई महसूस करेगा। ऐसे में चेस्टनट की जगह मूँगफली अधिक उपयुक्त उदाहरण हो सकती है।

केम्ब्रिज विश्वविद्यालय द्वारा प्रकाशित एक लेख में शोधकर्ता जैनी बैक ने लिखा, *"यदि कोई शिक्षार्थी किसी संसाधन के विभिन्न गुणों के प्रति बहुत अधिक सजग रहता है, तो उसके लिए उस संसाधन का किसी विशिष्ट गणितीय संरचना के प्रतिनिधित्व के रूप में उपयोग करना कठिन हो जाता है। मैं ज्यामिति के शिक्षण में अकसर डोरी के फन्दों का उपयोग करती हूँ। मेरा अनुभव है कि यदि मैं किसी भी आयु के शिक्षार्थियों को गणितीय गतिविधि शुरू करने से पहले कुछ समय तक उस डोरी के साथ स्वतंत्र रूप से खेलने का अवसर नहीं देती हूँ, तो वे उसके साथ खेलने और उसके विभिन्न गुणों को जानने की अपनी इच्छा के कारण गणितीय कार्य पर ध्यान नहीं दे पाते हैं।"*

हर कोने में गणित

गणित प्रयोगशाला का एक विकल्प है 'गणितीय कोना' यानी कक्षा के भीतर ही स्थित सहभागितापूर्ण सीखने का स्थान। स्वाती का कहना है, *"देखिए, प्राथमिक स्तर पर गणित सिखाने के लिए न बिजली के कनेक्शन की ज़रूरत होती है, न पानी के इनलेट-आउटलेट की और न ही किसी तड़क-भड़क वाली व्यवस्था की। वास्तव में हर गणित की कक्षा के लिए बच्चों को प्रयोगशाला तक ले जाने की आवश्यकता नहीं है। इसकी बजाय सामग्री को ही बच्चों तक पहुँचाया जा सकता है।"* गणितीय कोने की इस व्यवस्था में सामग्री विद्यार्थियों के अधिक निकट रहती है और लगातार उनकी पहुँच में बनी रहती है। यह विकल्प सीमित संसाधनों और कम स्थान वाले विद्यालयों के लिए भी उपयुक्त है।

कर्नाटक के कलबुर्गी स्थित अज़ीम प्रेमजी विद्यालय में गणित पढ़ाने वाले शिवशरणप्पा ने बताया कि उनके विद्यार्थियों का 8 से 10 मिनट का समय उस गणित प्रयोगशाला तक आने-जाने में ही निकल जाता है, जो विद्यालय की दूसरी मंजिल पर स्थित है। दूसरी ओर, गरिमा की कक्षा में गणितीय कोने की व्यवस्था है, इसलिए उनके विद्यार्थी यह बहुमूल्य समय बचा लेते हैं।

फिर भी कभी-कभी गरिमा को लगता है कि यदि गणित प्रयोगशाला के लिए एक अलग कक्ष हो, तो विद्यार्थी गतिविधियों को अधिक गम्भीरता से लेंगे और गणितीय सामग्री भी सुरक्षित रहेगी। इसके अतिरिक्त, *"उस स्थान का अपना एक अलग वातावरण होगा, ठीक विद्यालय के पुस्तकालय या विज्ञान प्रयोगशाला की तरह।"* लेकिन साथ ही गरिमा यह भी स्वीकार करती हैं कि इसके साथ एक जोख़िम जुड़ा हुआ है। *"ऐसा नहीं होना चाहिए कि सामग्री तो सुरक्षित रखी जाए, लेकिन बच्चों की पहुँच से बाहर हो जाए।"*

आजकल गणित प्रयोगशाला की अवधारणा काफ़ी

लोकप्रिय, बल्कि एक तरह से प्रचलन का हिस्सा बन गई है। लेकिन 1990 के दशक में, जब एस. एन. गणनाथ ने बेंगलूरु में सुविद्या एजुकेशन रिसोर्स सेंटर की स्थापना की थी, तब स्थिति ऐसी नहीं थी। ऊपर से देखने पर यह परिवर्तन सुखद लगता है, लेकिन गणनाथ का मानना है कि वास्तविक प्रभाव तभी दिखाई देगा, जब शिक्षकों के साथ निरन्तर और सतत संवाद बना रहे – आमने-सामने सम्भव न हो, तो कम-से-कम ऑनलाइन। उन्होंने देखा कि जब उनके संगठन को विद्यालयों में एक-दिवसीय कार्यशालाएँ आयोजित करने के लिए आमंत्रित किया जाता था, तो प्रतिक्रिया मिली-जुली रहती थी। उन्होंने कहा, *"सब लोग ताली बजाते हैं और सभी ख़ुश होते हैं, लेकिन केवल इतना पर्याप्त नहीं है। शिक्षकों को अपने दृष्टिकोण, तरीक़े बदलने और इस पद्धति पर विश्वास विकसित करने में 3 से 4 वर्ष तक लग सकते हैं।"*

गणनाथ के अनुसार, यदि गणित प्रयोगशाला की पद्धति को प्रभावी बनाना है, तो उपयोगकर्ताओं की सोच में एक बुनियादी परिवर्तन आवश्यक है। उनका आशय यह है कि अधिकांश विद्यार्थी, शिक्षक और शिक्षक-प्रशिक्षक इस धारणा को आत्मसात कर चुके हैं कि गणित का अर्थ केवल प्रक्रियाएँ और गणनाएँ करना है। उनका कहना है, *"ऐसा नहीं है कि वे आलसी हैं। वास्तव में वे इस दर्शन (philosophy) से अवगत ही नहीं हैं कि विद्यालयों में गणित क्यों पढ़ाया जाता है। इसलिए उनके लिए नए विचारों को समझना, उन्हें स्वीकार करना और उन्हें व्यवहार में लाना कठिन हो जाता है।"*

जब शिक्षकों के साथ निरन्तर जुड़ाव बना रहता है, तो उसके परिणाम अत्यन्त प्रभावशाली होते हैं। गणनाथ ने बड़े स्नेह के साथ कर्नाटक के ग्रामीण क्षेत्रों के उन शिक्षकों को याद किया, जो 30 वर्ष पहले सुविद्या की कार्यशालाओं में आए थे, वहाँ से प्राप्त सीख को दूसरे ज़िलों तक ले गए और आज भी उसी पद्धति का अभ्यास कर रहे हैं। उन्होंने बताया, *"एक शिक्षिका लगातार तीन वर्ष तक कोलार से बेंगलूरु हर महीने कार्यशाला में भाग लेने आती थीं। दरअसल उनकी नियुक्ति अँग्रेज़ी शिक्षिका के रूप में हुई थी, लेकिन कार्यशाला में भाग लेने के बाद उन्होंने अपने प्रधानाचार्य से अनुरोध किया कि उनका विषय बदलकर गणित कर दिया जाए। कार्यशाला से गणित के प्रति उनका भय समाप्त हो गया था और उन्होंने गणित पढ़ाना शुरू कर दिया!"*

शिक्षाविदों और प्राथमिक स्तर के गणित शिक्षकों में एक बात को लेकर व्यापक सहमति दिखाई देती है कि मैनिपुलेटिव्स वास्तव में छोटे विद्यार्थियों में जिज्ञासा, खोजबीन की प्रवृत्ति और अवलोकन क्षमता विकसित करने में प्रभावी होते हैं। लेकिन ऐसा तभी सम्भव है, जब शिक्षक स्वयं पहले इन सामग्रियों के साथ खेलें, यह कहना है *एट राइट एंगल्स* की सम्पादक व मैथ स्पेस की सह-निर्माता स्नेहा टाइटस का। *"जब शिक्षक आत्मविश्वास से भरे, लेकिन खेल-भावना वाले इस दृष्टिकोण के साथ अधिगम के अवसरों और शिक्षण के उपयुक्त क्षणों को पहचानते और उनका उपयोग करते हैं, तब विद्यार्थियों में प्रलेखन, तर्क-वितर्क, अनुमान और दलील जैसी गणितीय योग्यताएँ विकसित होती हैं और यही सब अन्ततः प्रमाण तक पहुँचाता है।"*

यही वह क्षण है, जब 'जादू' घटित होता है।

References

1. Royal Belgian Institute of Natural Sciences. (2024, March). *The Ishango bone* [Brochure]. Royal Belgian Institute of Natural Sciences.
2. Baur, J. (2026). *The Ishango bone: Evidence for intentional arithmetic design in the Upper Palaeolithic?* (Version 4). arXiv. https://shorturl.at/MltnU
3. ASER Centre. (2025). *ASER 2024 national findings.* ASER Centre. https://shorturl.at/WzxIT
4. Geary, D. C. (2011). *Consequences, characteristics, and causes of mathematical learning disabilities and persistent low achievement in mathematics. Journal of Developmental & Behavioral Pediatrics, 32*(3), 250–263. https://shorturl.at/ZSW15
5. Menon, U. (2021, December 27). *What is foundational numeracy?* Jodo Gyan. https://shorturl.at/xh8cm
6. Back, J. (2013, October 8). *Manipulatives in the primary classroom* [PDF]. NRICH, University of Cambridge. https://shorturl.at/6ASwI

नन्दिता जयराज एक स्वतंत्र विज्ञान लेखिका, रचनाकार व TheLifeofScience.com की सह-संस्थापक हैं। वर्तमान में वे अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में विज्ञान संचार सलाहकार के रूप में भी कार्यरत हैं। उनसे nandita.jayaraj@apu.edu पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

और मैं हूँ एक *Mat(h)erial* Girl![1]

स्वाती सरकार

गणित की शिक्षण अधिगम सामग्री (Teaching Learning Materials–TLM) के लिए मज़ेदार शब्द *'Mat(h) erials'* गढ़ा गया है। अब ऐसे पाठक भी होंगे जो शायद इस लेख में बताए गए सभी या कुछ *mat(h)erials* से परिचित न हों, तो इन *mat(h)erials* के बारे में तालिका-1 से 4 में तस्वीरों के ज़रिए बताया गया है।

मैं लगभग दो दशकों से, स्कूल के स्तर के गणित शिक्षण से जुड़े कई व्यक्तियों (शिक्षकों एवं शिक्षक-प्रशिक्षकों) और संगठनों के साथ काम कर रही हूँ। मेरा तजुर्बा बताता है कि हम उस दौर से आगे निकल चुके हैं जब यह बहस हुआ करती थी कि वह गणित जो अपने आप में अमूर्त है उसे पढ़ाने के लिए *mat(h)erials* की ज़रूरत क्यों है। मैंने पाया है कि प्राथमिक स्तर (यानी कक्षा-5 तक) के लिए इनकी ज़रूरत पर आम सहमति बन रही है, लेकिन माध्यमिक स्कूल के स्तर (यानी कक्षा-6 से 8 के लिए) के लिए इनके इस्तेमाल को लेकर अभी भी अलग-अलग राय है।

दिलचस्प बात यह है कि एनसीईआरटी की नई पाठ्यपुस्तकों के अध्यायों में ही कई *mat(h)erials* को शामिल किया गया है और कक्षा-3 से 8 की हर पाठ्यपुस्तक के आख़िर में उदाहरणों सहित सैम्पल शीट भी दी गई हैं। 'फ़ाउण्डेशन स्टेज के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एनसीएफ़-एफ़एस, 2022) और 'शालेय शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा' (एनसीएफ़-एसई, 2023) दोनों ही *mat(h)erials* के इस्तेमाल पर ज़ोर देती हैं। असल में, एनसीएफ़-एसई में ख़ासतौर पर बीजगणित की टाइलों का ज़िक्र है (ऐसी टाइलों का सेट जिनको आमतौर पर इस्तेमाल होने वाले बीजगणितीय पदों को बताने के लिए काम में लिया जाता है)। ध्यान दें कि मिडिल स्टेज तक बीजगणित की टाइलों की ज़रूरत नहीं होती है!

यह देखना उत्साहवर्धक है कि एनसीईआरटी की नई पाठ्यपुस्तकों में इन सुझावों को गम्भीरता से लिया गया है और कई स्पष्ट बदलाव किए गए हैं। इन बदलावों के बारे में यहाँ चर्चा की जा रही है। संख्याओं और संक्रियाओं, भिन्नों और पूर्णांकों वाले अध्यायों में कई तरह के *mat(h)erials* का भरपूर इस्तेमाल किया गया है। इन *mat(h)erials* का इस्तेमाल हर तरह की संख्या से परिचय कराने के लिए ही नहीं बल्कि संक्रियाओं के लिए भी किया गया है। ज्यामिति, स्थानिक समझ, मापन और क्षेत्रमिति वाले अध्यायों में उनके लिए अनुकूल *mat(h)erials* का इस्तेमाल किया गया है और उनके इस्तेमाल के तरीक़े भी सुझाए गए हैं।

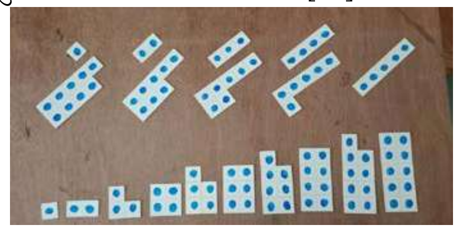
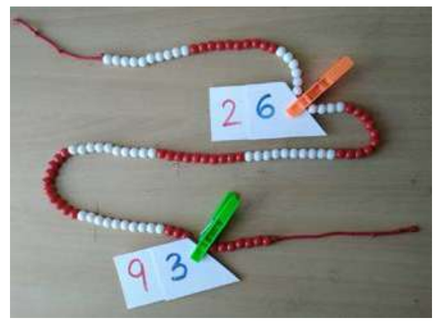
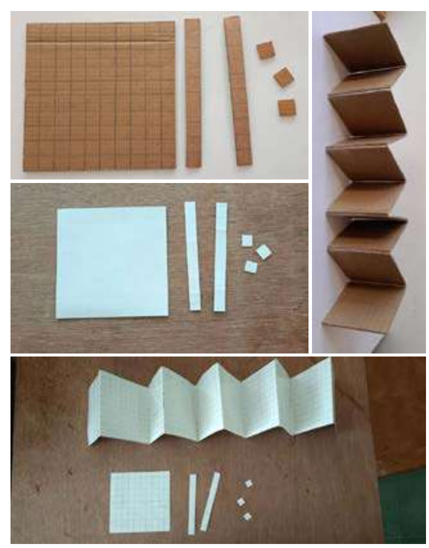
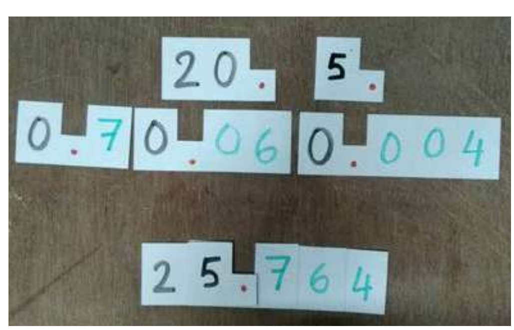
Mat(h)erials : ये कैसे दिखते हैं?

इस लेख में बताए गए *mat(h)erials* की सूची यहाँ दी गई है। लेख के अन्त में, 'सन्दर्भ' के तहत लिंक दी गई हैं, जिनमें इनको बनाना समझाया गया है। इनमें से जिन *mat(h)erials* की समीक्षा *'एट राइट एंगल्स'* के पिछले अंकों में छपी है, उनकी लिंक भी दी गई हैं।

1. Maths व material को मिलाकर बनाया गया शब्द mat(h)erial है। और मैडोना के 'मटीरियल गर्ल' गाने के साथ शीर्षक की तर्ज़ मिलाई गई है।

की-वर्ड : *टीएलएम, मैथलैब, ठोस, जाँच-पड़ताल, सटीक, अनुकूलन, आकलन, कम-लागत, मुक्त खेल, मैनिपुलेटिव्स*

पूर्ण संख्याओं और दशमलव के लिए :

काउंटर्स : कोई भी चीज़ जिसे गिना जा सके, जैसे बटन, बीज, कंकड़ आदि। – समीक्षा [11] 	**टैन-फ्रेम्स :** संख्याओं को दिखाने के लिए दो-गुणा-पाँच वाला फ्रेम। – समीक्षा [12] 
गणितमाला : पूर्ण संख्याओं और संक्रियाओं के लिए दो रंगों वाली सौ मनकों की माला। – समीक्षा [13]	
तीली-बण्डल : ऐसी चीज़ जिसका बण्डल बनाया जा सके, जैसे टहनियाँ, झाड़ू की सींकें, आइसक्रीम की डंडी, सूखे स्कैच-पैन। [14]	
फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स : 2डी बेस-10 ब्लॉक [द्वि-विमीय 10-आधार वाले पट्टे/गुटके], जिनमें एक इकाई या छोटा वर्ग होता है; एक लॉन्ग (दस) जो इकाई से 10 गुना लम्बा आयत होता है; और एक फ़्लैट (सौ) जो एक बड़ा वर्ग होता है जो छोटे वर्ग से 100 गुना बड़ा या लॉन्ग से 10 गुना चौड़ा होता है, हज़ार दिखाने के लिए दस बड़े वर्गों को जोड़ा जाता है। – समीक्षा [15] • फ़ाउण्डेशनल स्टेज के छोटे बच्चों के लिए बड़ा एफ़एलयू। यूनिट 2 सेमी × 2 सेमी की होती है। • प्रिपरेटरी एवं मिडिल स्टेज के बड़े बच्चों के लिए छोटा एफ़एलयू। ग्रिड-साइज़ ≈ 1 सेमी। [15] • दशमलव एफ़एलयू । बड़ा वर्ग (10 सेमी × 10 सेमी) 1 होता है, आयत (10 सेमी × 1 सेमी) 0.1 होता है, छोटा वर्ग (1 सेमी × 1 सेमी) 0.01 होता है। [16]	
एरो कार्ड : इन्हें दशमलव के लिए भी बढ़ाया जा सकता है। – समीक्षा [17] 	

तालिका–1

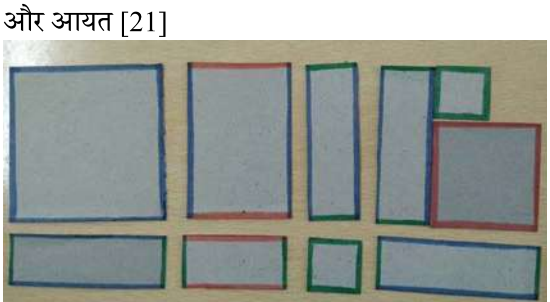
भिन्न के लिए : [18]

<table>
<tr><td colspan="2">भिन्न वाले वृत्त और त्रिज्यखण्ड : पूरा हिस्सा एक वृत्त होता है, जिसे बराबर त्रिज्यखण्डों में बाँटा जाता है। इसमें 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/8, 1/9, 1/10, 1/12, 1/15 जैसी इकाई भिन्न शामिल होती हैं।
 </td></tr>
<tr><td>भिन्न पट्टियाँ : पूरा हिस्सा 21 सेमी की पट्टी है, जिसमें 1/7 और 1/14 जैसी इकाई भिन्न होती हैं।</td><td>भिन्न वाले वर्ग : पूरा हिस्सा A4 शीट से बना 21 सेमी लम्बा वर्ग होता है। [19]</td></tr>
</table>

तालिका–2

बीजगणित के लिए :

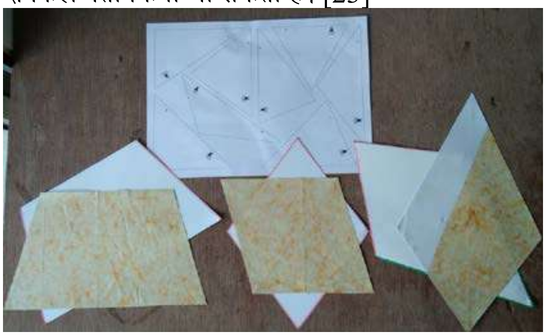
<table>
<tr><td>बीजगणित की टाइलें : एफ़एलयू का सामान्य रूप; बड़ा वर्ग x^2 होता है, जबकि आयत x होता है, छोटा वर्ग 1 होता है, और इसे xy, y और y^2 तक बढ़ाया जा सकता है। – समीक्षा [20]</td><td> </td></tr>
<tr><td>बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ : बीजगणितीय सर्वसमिकाओं को समझाने वाले मॉडल

द्विघात : $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$ जैसी सर्वसमिकाएँ – वर्ग और आयत [21]
</td><td>त्रिघात : $(a \pm b)^3$, $a3 \pm b^3$ जैसी सर्वसमिकाएँ – घनाभ [22]
 </td></tr>
</table>

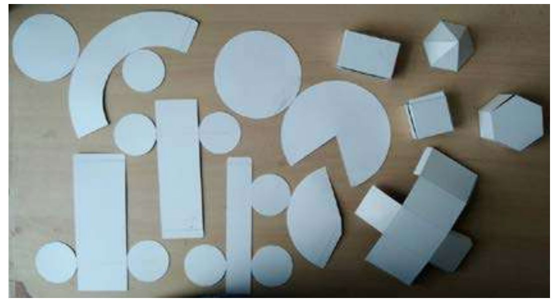
तालिका–3

ज्यामिति और क्षेत्रमिति के लिए :

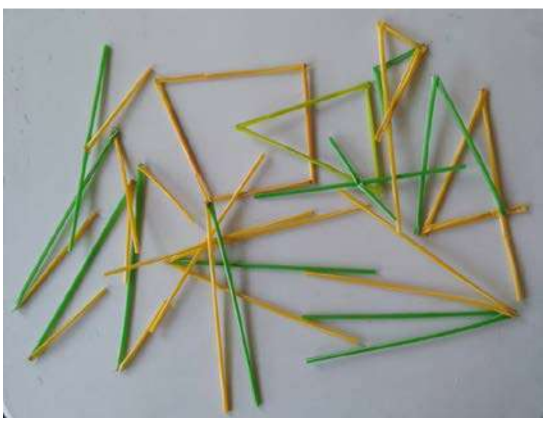
त्रिभुज और चतुर्भुज के कट-आउट : किसी बहुभुज को कई टुकड़ों में काटकर और उन्हें नई तरह से जोड़कर उसका क्षेत्रफल पता किया जा सकता है। [23]



ठोस आकारों के जाल (Nets of Solids) : जिनसे घनाभ, प्रिज़्म, पिरामिड, बेलन, शंकु आदि के पृष्ठीय क्षेत्रफल और अन्य विशिष्टताओं को समझा जा सके। [24]



स्ट्रॉ मॉडल : कोण और बहुभुज के लिए, एक से ज़्यादा स्ट्रॉ को स्टेपल करके बनाए गए मॉडल। [25]



एक-दूसरे को काटते हुए वृत्तों की मदद से कोण : अलग-अलग रंगों के दो या तीन वृत्त, जिनके ज़रिए कोण को 'घुमाव' और 'अन्तर' के रूप में समझा जा सके, और कोण के माप का अन्दाज़ा हो सके। [26]

तालिका–4

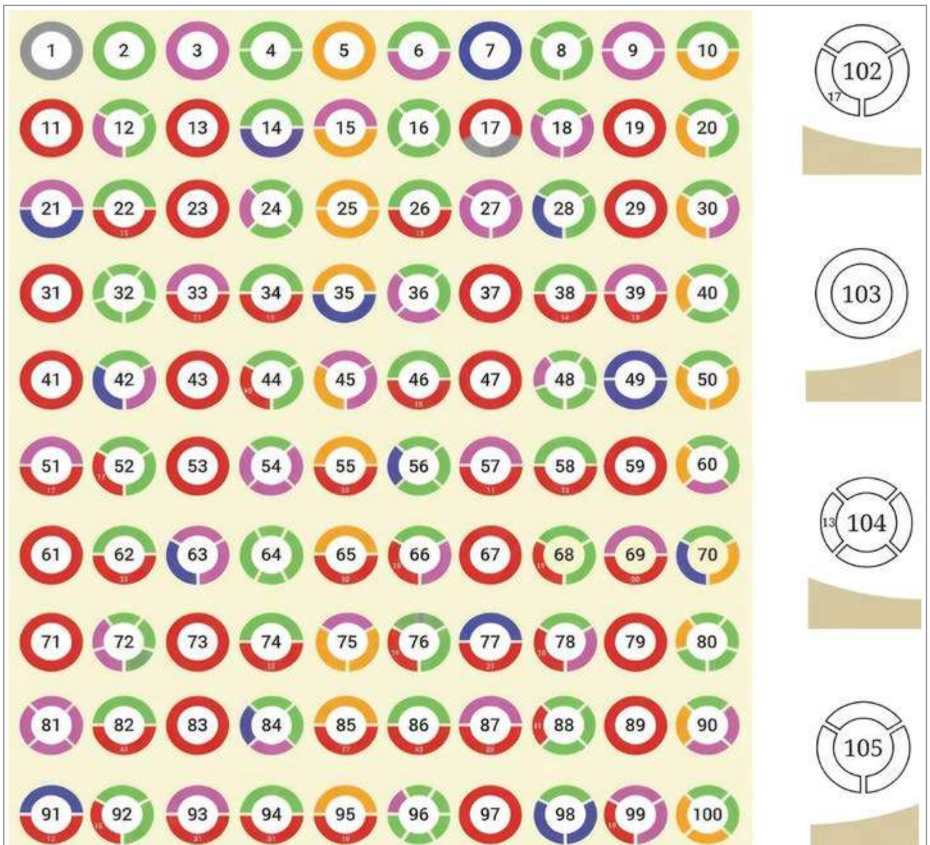
एनसीईआरटी की गणित की पाठ्यपुस्तकों में शामिल विभिन्न *mat(h)erials* और अधिगम शीट के बारे में तालिका-5 में बताया गया है।

कक्षा-3	(i) आयताकार और सममितीय डॉट शीट (ii) संख्या के नाम और अंक वाले कार्ड (iii) विभिन्न ठोस आकारों के जाल (iv) 2डी बेस-10 ब्लॉक (v) भिन्न के हिस्से और पट्टियाँ (vi) टैनग्राम ।
कक्षा-4	(i) 2डी आकृतियाँ (ii) डीन्स ब्लॉक (iii) कुछ और जाल (iv) एरो कार्ड (v) भिन्न के त्रिज्यखण्ड (vi) सेंटीमीटर स्केल (vii) संख्या के टोकन (1, 10, 100, 1000)।
कक्षा-5	(i) 2 तरह की वर्गाकार ग्रिड और सममितीय डॉट शीट (ii) भिन्न के त्रिज्यखण्ड (iii) टैनग्राम (iv) नियमित बहुभुज और अन्य (v) संख्या के टोकन (vi) 2 प्लेटोनिक ठोस आकारों के जाल।
कक्षा-6	(i) पूर्णांक वाला साँप-सीढ़ी का खेल (ii) आयताकार डॉट शीट और वर्गाकार ग्रिड (iii) टैनग्राम (iv) भिन्नों की दीवार (v) विकर्ण से कटी हुई वर्गाकार टाइलें।
कक्षा-7	(i) टैनग्राम (ii) वर्गाकार डॉट शीट आदि।
कक्षा-8	(i) बिनाइरो (Binairo) खेल (ii) वर्गाकार डॉट शीट (iii) सममितीय ग्रिड।

तालिका–5

हो सकता है कि सीखने में मददगार इन 'मैनिपुलेटिव्स' में से कुछ आपके लिए नए हों, लेकिन तालिका-5 से पता चलता है कि *mat(h)erials* को अब कक्षा-8 तक गणित के शिक्षणशास्त्र का अनिवार्य हिस्सा माना जाता है!

एक मज़ेदार बात और है! कक्षा-7 की पाठ्यपुस्तक में पृष्ठ संख्याओं को ख़ास ढंग से दर्शाया गया है, जो 'मैथिगॉन पॉलीपैड' (Mathigon Polypad) में वर्चुअल मैनिपुलेटिव्स के रूप में उपलब्ध है (इस पर आगे बात करेंगे)! पाठ्यपुस्तक 'गणित प्रकाश' भाग-2 के अध्याय-3 'साझा आधार खोजें' के आख़िर में इन संख्याओं को संकलित करके एक पहेली के रूप में दिया गया है। और विद्यार्थियों से इन पृष्ठ संख्याओं के ख़ास ढंग को ख़ुद कोशिश करके समझने के लिए कहा गया है (**चित्र-1**)। इस तरह, इन पाठ्यपुस्तकों का मक़सद विद्यार्थियों को सीधे सब बताने के बजाय उन्हें ख़ुद खोजने का मौक़ा देना है। पाठ्यपुस्तकें इस तरह रची गई हैं कि विद्यार्थी अपने आस-पास मौजूद गणित को देखें-समझें – यहाँ तक कि अपनी पाठ्यपुस्तकों की पृष्ठ संख्याओं को भी!



हर संख्या के लिए रंगों की व्यवस्था को समझने की कोशिश करें।
यहाँ कई दिलचस्प पैटर्न हैं।
अपने अवलोकनों को सहपाठियों के साथ साझा करें।
रंगों की इसी व्यवस्था को आगे बढ़ाते हुए, पृष्ठ संख्या 101 से 110 तक में रंग भरें।

चित्र-1

Mat(h)erials को आधिकारिक मान्यता मिल गई है! अब हमें इस बात पर चर्चा करनी है कि इन्हें किस तरह समझदारी से और सार्थक रूप में हासिल किया जाए और इस्तेमाल में लाया जाए।

यह लेख ग्यारह स्कूलों को इन *mat(h)erials* से लैस करने के अनुभवों पर आधारित है। इनमें से आठ अज़ीम प्रेमजी स्कूल (एपीएस) हैं ('सन्दर्भ' देखें)। बाक़ी तीन में से एक बिहार के पोखरामा में स्वयंसेवी संस्था का स्कूल है जो गाँव के बच्चों के लिए है। दूसरा उत्तरी बेंगलूरु में वैकल्पिक स्कूल है जो समाज के सभी वर्गों के बच्चों के लिए है, और तीसरा पूर्वी बेंगलूरु का उच्च-वर्गीय महँगा स्कूल है।

इनमें से ज़्यादातर स्कूलों में गणित की प्रयोगशाला, 'मैथ लैब' (math lab), के लिए कोई अलग कमरा नहीं है। लेकिन हर कक्षा के शिक्षकों ने उपयुक्त *mat(h)erials* की ज़िम्मेदारी ली और वे नियमित रूप से उनका इस्तेमाल कर रहे हैं। वे ज़रूरत पड़ने पर इन्हें कक्षा में लाते हैं। कुछ शिक्षक इन्हें कक्षा की अलमारी में ही रखते हैं। विद्यार्थी, ख़ासकर कक्षा 1-2 के बच्चे, कक्षा ख़त्म होने पर *mat(h)erials* को ठीक से समेटने और रखने में पुरजोश भागीदारी निभाते हैं।

Mat(h)erials : ये किसे मिलते हैं?

आमतौर पर, अगर स्कूल में कोई *mat(h)erial* होता है, तो शिक्षक ही उसे लाते हैं और पूरी कक्षा को उसका इस्तेमाल करके दिखाने में उनका ही पूरा नियंत्रण रहता है। इससे कुछ बेहतर स्थिति वह होती है जिसमें शिक्षक कुछ विद्यार्थियों को कक्षा में आगे बुलाकर *mat(h)erials* का इस्तेमाल करने और दिखाने की अनुमति देते हैं। अब, ज़रा सोचिए कि कक्षा-3 के उस विद्यार्थी के मन में क्या चलता होगा जिसे *mat(h)erials* को आज़माने और करके दिखाने का मौक़ा कभी मिला ही नहीं? क्या वह बच्चा सीखने पर ध्यान देगा या नज़रअन्दाज़ किए जाने के एहसास से भरा होगा? और ऐसा जान-बूझकर नहीं बल्कि व्यावहारिक मजबूरियों की वजह से हो रहा होगा। कैसा रहे कि अगर हम हर चार विद्यार्थियों के लिए *mat(h)erials* का एक सेट दें? तब कक्षा में सबके पास *mat(h)erials* होंगे और वे सब ख़ुद इनसे जुड़ सकेंगे। लेकिन क्या ऐसा करना बहुत महँगा नहीं होगा? ग्यारह में से एक स्कूल को छोड़कर, बाक़ी सभी में *mat(h)erials* वहीं स्कूल में ही बनाए गए। आठ स्कूलों में दो साल तक, हर साल एक हफ़्ते तक सघन काम किया गया, साथ ही दूरस्थ संसाधन साझा किए गए और ऑनलाइन निगरानी की गई।

Mat(h)erials : इन्हें कौन बनाता है?

ज़्यादातर चीज़ें शिक्षक, मिडिल और हाई स्कूल के विद्यार्थियों की मदद से, स्कूल में ही बना सकते हैं। जब कक्षा-6 से 8 के विद्यार्थी *mat(h)erials* को बनाने में शामिल होते हैं, तो उन्हें गणित के लिए ज़रूरी सटीकता का अनुभव होता है, साथ ही काम में आने वाली सामग्री और मेहनत के उचित इस्तेमाल का भी एहसास होता है। इस दौरान कई बातें अवधारणात्मक रूप से समझ में आ जाती हैं। इससे माप का आकलन करने के साथ-साथ ऐसे अलग-अलग कौशलों और रवैयों को भी आँका जा सकता है जो विद्यार्थियों में विकसित होने चाहिए। मसलन, बताई गई लम्बाई की रेखा खींचना, बताई गई रेखाओं के समान्तर या लम्बवत रेखाएँ खींचना, बताया गया कोण बनाना। *mat(h)erials* को बनाने के कुछ नियम हैं, और उनके पीछे कुछ कारण भी हैं। मैंने देखा है कि जब विद्यार्थियों को पता चलता है कि इन *mat(h)erials* का इस्तेमाल उनके जूनियर विद्यार्थी (फ़ाउण्डेशनल और प्रिपरेटरी – कक्षा-1 से 5) या उनके साथी विद्यार्थी भी करेंगे, तो वे ज़्यादा प्रेरित और ज़िम्मेदार महसूस करते हैं! कला शिक्षक इसमें बहुत मदद कर सकते हैं। (और बदले में उन्हें कुछ ऐसी चीज़ें भी मिल सकती हैं जिनका इस्तेमाल वे बाद में कला की कक्षाओं में कर सकते हैं!)

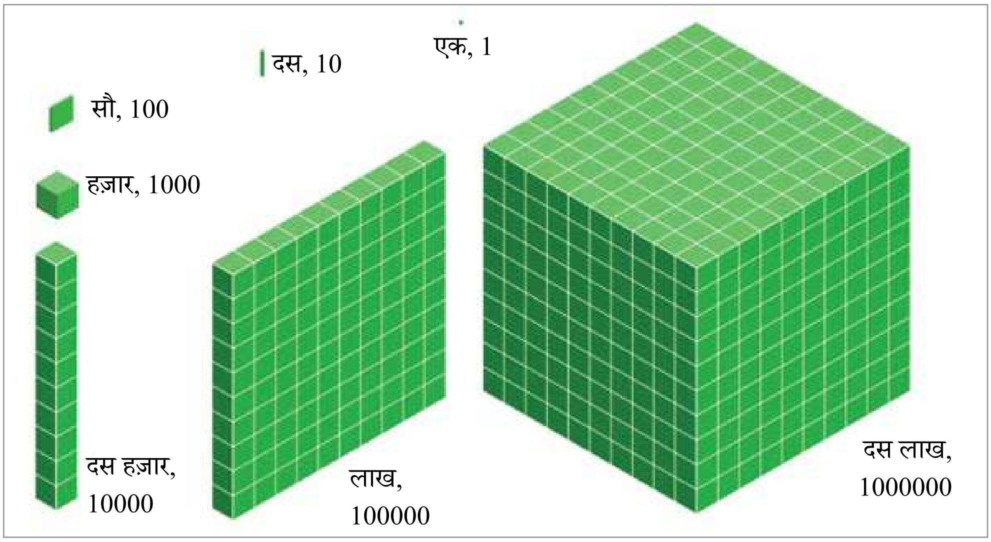
आमतौर पर, हम हर *mat(h)erial* के लिए उनके उपयुक्त डिब्बे बनाते हैं ताकि उनका इस्तेमाल करना और फिर वापस रखना आसान हो। ये चीज़ें स्थानीय स्तर पर मिलने वाली सामग्री से बनाई जाती हैं और सस्ती होती हैं।

कुछ मैनिपुलेटिव्स को बनाने के लिए कुछ कौशल और बारीकियों पर ध्यान देने की ज़रूरत है, लेकिन इन्हें बनाने में ऐसा कुछ नहीं है जिसे कक्षा-8 या 9 के विद्यार्थी न कर पाएँ। अगर आप चाहें तो हर चीज़ या उसे सहेजने के पैकेट को बनाने के बारे में चरणबद्ध मार्गदर्शन प्रदान किया जा सकता है [10]।

Mat(h)erials : मैथ लैब या कॉर्नर या अलमारी?

ज़्यादातर *mat(h)erials* बड़े नहीं होते और उन्हें आसानी से लाया-ले जाया जा सकता है। यह तब और आसान हो जाता है जब उन्हें अलग-अलग करके ऐसे पैकेटों में रखा जाए जो इस्तेमाल में सुविधाजनक हों। विज्ञान/ईवीएस या शारीरिक शिक्षा की कक्षा के लिए प्रयोगशाला या खुली जगह की ज़रूरत होती है, जबकि इन टीएलएम पर काम करने के लिए कक्षा-1 से 5 के विद्यार्थियों को किसी अलग कमरे में ले जाने की कोई ज़रूरत नहीं है। असल में तो एक से दूसरी कक्षा में जाने-आने में बेवजह क़ीमती समय बर्बाद होता है और इसका ख़ास फ़ायदा भी नहीं मिलता है। इसलिए, मेरी राय में फ़ाउण्डेशनल और प्रिपरेटरी स्टेज पर मैथ लैब की ज़रूरत नहीं है।

हालाँकि, कुछ मॉडल ऐसे हो सकते हैं जिनकी ज़रूरत कभी-कभी ही पड़ती है और वे काफ़ी बड़े या नाज़ुक हो सकते हैं। माध्यमिक या उच्च स्तरों की कक्षाओं में प्रदर्शन के लिए उन्हें लाना-ले जाना मुश्किल हो सकता है। उदाहरण के लिए, मुझे व्यक्तिगत रूप से लगता है कि यह अच्छा होगा कि दस लाख (या एक मिलियन) को दिखाने के लिए 100 सेमी लम्बी भुजाओं वाला एक बड़ा घन रखा जाए, जिसके साथ तुलना में हज़ार के लिए 10 सेमी भुजाओं वाला छोटा घन और एक या इकाई के लिए 1 सेमी भुजाओं वाला नन्हा-सा घन इस्तेमाल किया जाए। इसे घनाभों के सेट तक बढ़ाकर, दस की घातों : एक, दस, सौ... दस लाख को भी देखा जा सकता है। **चित्र–2** यह अन्दाज़ा देता है कि एक लाख कितना बड़ा होता है, और कक्षा-6 की शुरुआत में यह तरीक़ा कितना उपयोगी हो सकता है। लेकिन इन्हें कक्षा में लाना आसान नहीं होगा। ऐसे मामलों में, एक अलग कमरा होना मददगार हो सकता है, जहाँ विद्यार्थी जब-तब आ सकें।



चित्र-2

अगर ऐसा कमरा हो, तो इसका इस्तेमाल न सिर्फ़ *mat(h)erials* को रखने और प्रदर्शित करने के लिए किया जा सकता है, बल्कि ज़रूरत पड़ने पर यहाँ उनकी मरम्मत भी की जा सकती है या नए *mat(h)erials* बनाए जा सकते हैं। यह मानकर चलना चाहिए (यूँ कहें कि ऐसी ही उम्मीद करनी चाहिए!) कि जब किसी चीज़ का नियमित रूप से इस्तेमाल होगा तो उसमें थोड़ी-बहुत टूट-फूट भी होगी। जब विद्यार्थी ऐसी चीज़ों को नियमित रूप से परखते हैं और उनके साथ खेलते हैं तो ऐसा होना सकारात्मक संकेत देता है! जब शिक्षक ख़ुद अपने *mat(h)erials* बनाते हैं, तो उन्हें पता होता है कि उसकी प्रतिकृति कैसे बनानी है या मरम्मत कैसे करनी है। हालाँकि, यही मरम्मत या प्रतिकृति कला कक्ष, शिक्षकों के कक्ष या किसी अन्य उपयुक्त जगह पर भी की जा सकती है।

Mat(h)erials : ये किस चीज़ से बने होते हैं?

ज़्यादातर चीज़ें (i) मोटे चार्ट-पेपर (ii) नालीदार गत्ते (iii) गत्ते की मोटाई वाले डिब्बों, जैसे कि कॉर्नफ़्लेक्स या डिटर्जेण्ट के डिब्बों से बनी होती हैं। कुछ खास *mat(h)erials* के लिए मोतियों, रस्सी, फ़्लैक्स (लैमिनेट किए हुए बैनर या साइनेज मटीरियल), प्लास्टिक की स्ट्रॉ जैसी कुछ अन्य चीज़ों का भी इस्तेमाल किया जाता है।

अलग-अलग सेट अलग-अलग पैकेट में रखे जाते हैं। साधारणतः, ये पैकेट इस्तेमाल की गई A4-शीट या अख़बारों, तरह-तरह के प्लास्टिक के पैकेट और अन्य पैकेजिंग मटीरियल से बने होते हैं, जो आमतौर पर स्कूल में मिल जाते हैं या विद्यार्थी अपने घर से ले आते हैं – यह रीसाइक्लिंग की और उसकी मिसाल पेश करने की व्यावहारिक रणनीति है।

Mat(h)erials : हम योजना कैसे बनाएँ और व्यवस्था करें?

ये हर स्टेज के लिए ज़रूरी *mat(h)erials* हैं।

(कलर कोड : नीला = अलग-अलग सेट, गुलाबी = पूरी कक्षा के लिए एक सेट, या कई सेट)

Mat(h)erials	फ़ाउण्डेशनल स्टेज (प्री-प्राइमरी, कक्षा 1-2)	प्रिपरेटरी स्टेज (कक्षा 3-5)	मिडिल स्टेज (कक्षा 6-8)
संख्याएँ और स्थानीय मान	1. काउंटर्स – गोल और चौकोर 2. टैन-फ्रेम 3. गणितमाला 4. एरो कार्ड 5. तीली-बण्डल 6. फ़्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स (एफ़एलयू) – बड़े	1, 2, 4 और 7. फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स (एफ़एलयू) हज़ार तक – छोटे	8. एरो कार्ड (करोड़ तक) 9. एफ़एलयू – छोटे
भिन्न और संक्रियाएँ	लागू नहीं	10. भिन्न के त्रिज्यखण्ड 11. भिन्न पट्टी 12. भिन्न वर्ग	
दशमलव और संक्रियाएँ	लागू नहीं	13. दशमलव एफ़एलयू 14. दशमलव एरो कार्ड 15. सेंटीमीटर ग्राफ़ पेपर	
माप और क्षेत्रमिति	16. टूथपिक/माचिस की तीलियाँ/ पेपर क्लिप 17. तराज़ू	18. टूथपिक/माचिस की तीलियों/पेपर क्लिप के आकार के वर्ग 19. मापने वाले टेप 20. बाट के साथ तराज़ू 21. बोतलें/जार जिन पर मापन के अंश अंकित हों	22. परिमाप के लिए स्ट्रॉ मॉडल 23. क्षेत्रफल के लिए कट-आउट मॉडल 24. पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए ठोस आकारों के जाल
पैटर्न और बीजगणित	25. कम-से-कम दो रंगों के काउंटर्स 26. टूथपिक/माचिस की तीलियाँ (आदर्श रूप से दो रंगों में)		27. बीजगणित की टाइलें 28. बीजीय सर्वसमिकाएँ– द्विघात और त्रिघात
ज्यामिति और स्थानिक समझ	29. 2डी आकृतियों के कट-आउट 30. 3डी ठोस आकार 31. जियोबोर्ड	23. क्षेत्रफल के लिए कट-आउट मॉडल; 24. पृष्ठीय क्षेत्रफल के लिए ठोस आकारों के जाल; 25. कम-से-कम दो रंगों में काउंटर्स ; और 32. टैनग्राम 33. बहु-वर्ग वाली आकृतियाँ [polyominoes]	34. ठोस आकारों के जाल 35. स्ट्रॉ मॉडल 36. एक-दूसरे को काटते [प्रतिच्छेदी] वृत्तों के साथ कोण
कौन बना सकता है	शिक्षक, उच्च कक्षाओं (कक्षा 8-9) के विद्यार्थी	मुख्य रूप से शिक्षक और वरिष्ठ विद्यार्थी; प्रिपरेटरी स्टेज वाले विद्यार्थी कुछ चीज़ों को काटने में मदद कर सकते हैं	मुख्य रूप से ख़ुद विद्यार्थियों के द्वारा; समूह परियोजनाओं के रूप में किया जा सकता है

Mat(h)erials : क्या इनके डिजिटल रूप होते हैं?

यह लेख तब तक अधूरा रहेगा जब तक हम वर्चुअल या डिजिटल मैनिपुलेटिव्स के बारे में बात नहीं करेंगे। ख़ासकर महामारी के दौर के बाद ऐसा करना ज़रूरी है। ऐसे मैनिपुलेटिव्स कई वैबसाइटों पर उपलब्ध हैं। भौतिक मैनिपुलेटिव्स के मुक़ाबले इनके कुछ फ़ायदे हैं, क्योंकि ऑफ़लाइन के बजाय यहाँ ज़्यादा तेज़ी से चीज़ों के साथ काम किया जा सकता है। मेरी पसन्दीदा वैबसाइट 'मैथिगॉन पॉलीपैड' (Mathigon Polypad) है : यह गणित के खेलों की बेहतरीन जगह है। यहाँ पैटर्न को खोजकर और उनका अवलोकन करके सीखने के कई मौक़े हैं। लेकिन विद्यार्थियों को कुछ मार्गदर्शन की ज़रूरत हो सकती है, ख़ासकर तब जब कि वे अपने अवलोकनों को दर्ज करते हैं और फिर उसके आधार पर नतीजे निकालते हैं। 'मैथ लर्निंग सेंटर' (Math Learning Centre), 'टॉय थिएटर' (Toy Theatre) और कुछ अन्य वैबसाइटों पर भी डिजिटल मैनिपुलेटिव्स का अच्छा संग्रह है। हम बाद के अंकों में उनकी समीक्षा कर सकते हैं।

कुछ स्कूलों में कम्प्यूटर लैब्स हैं। ऐसे स्कूलों के लिए, भौतिक मैनिपुलेटिव्स के बजाय ऑनलाइन मैनिपुलेटिव्स का इस्तेमाल करना सही है। मेरी व्यक्तिगत राय है कि ऐसा सिर्फ़ मिडिल स्टेज से किया जाना चाहिए। फ़ाउण्डेशनल स्टेज (प्री-प्राइमरी और कक्षा-1 व 2) के बच्चों को सिर्फ़ भौतिक मैनिपुलेटिव्स का इस्तेमाल करना चाहिए। प्रिपरेटरी स्टेज (कक्षा-3 से 5) में, उन्हें ज़्यादातर भौतिक मैनिपुलेटिव्स का इस्तेमाल करना चाहिए – हालाँकि विद्यार्थियों को लगभग कक्षा-4 या 5 से ऑनलाइन मैनिपुलेटिव्स भी सिखाए जा सकते हैं। मुख्य रूप से, स्क्रीन की लत से बचने के लिए ऐसा करने का मशविरा दिया गया है। यह सही है कि विद्यार्थियों को ऐसे उन्नत संसाधनों के साथ काम करने से फ़ायदा होता है, लेकिन बड़ों को यह तय करना होगा कि ऐसे संसाधनों का इस्तेमाल कब, कितने वक़्त के लिए और कैसे किया जाना चाहिए। बड़ों की देख-रेख में इन संसाधनों का इस्तेमाल करना बेहतर होता है क्योंकि विद्यार्थी इनका इस्तेमाल करते हुए इनमें ज़रूरत से ज़्यादा तल्लीन हो सकते हैं।

Mat(h)erials : आप क्या कर सकते हैं?

इस लेख का मक़सद पढ़ने वालों को यह बताना है कि कक्षा में और स्कूल में क्या मौजूद है और क्या सम्भावनाएँ हैं। हम एक शृंखला प्रकाशित करने की कोशिश करेंगे, जिसमें आप जान पाएँ कि अपने स्कूल में *mat(h)erials* कैसे बना सकते हैं, और इनमें से कुछ आप बच्चों के साथ मिलकर बना पाएँ। हम आपके साथ 'कैसे बनाएँ', (ख़ासकर कई सेट), और 'कैसे इस्तेमाल करें' साझा करेंगे। इस बीच, *mat(h)erials* के साथ अपने शिक्षण को बेहतर बनाने की चाह रखने वाले शिक्षकों को विचार करने के लिए यहाँ कुछ सवाल दिए गए हैं :

1. आप *mat(h)erials* क्यों बनाना चाहते हैं?
2. आपकी व्यक्तिगत राय में, क्या इन्हें मैथ लैब में रखने की ज़रूरत है? क्यों?
3. आप जो *mat(h)erials* बनाना चाह रहे हैं, उनमें से आपको हर *mat(h)erial* के कितने सेट की ज़रूरत होगी? (इसे समझने के लिए आप यह सोचें कि हर कक्षा में विद्यार्थियों की कितनी संख्या है और क्या एक ही सेट को अलग-अलग कक्षाओं में साझा किया जा सकता है?)
4. ये *mat(h)erials* बनाने में आपकी मदद कौन करेगा?

   [अपने साथी शिक्षकों, जिनमें कला शिक्षक भी हैं, तथा मिडिल से हाई स्कूल (कक्षा-6 से 10) के हस्त-कौशल में अच्छे विद्यार्थियों के बारे में सोचें।]
5. ये *mat(h)erials* हासिल करने के बाद आपकी कक्षा भौतिक रूप से कैसे बदल जाएगी? (मेज़-कुर्सी, बैंच की व्यवस्था पर विचार करें।)
6. क्या आपकी शिक्षण-पद्धति और आकलन बदलेगा? कैसे?

References:

1. Why mat(h)erials?
   http://publications.azimpremjiuniversity.edu.in/1852/1/18_Why%20TLM%20%E2%80%93%20Its%20Aims%20and%20Uses.pdf
2. Mat(h)erials: https://sites.google.com/apu.edu.in/mathspace/matherials
3. NCERT textbooks: https://ncert.nic.in/textbook.php
4. NCF-FS:
   https://ncert.nic.in/flipbook/NCF/National_Curriculum_Framework_for_Foundational_Stage_2022/mobile/index.html
5. NCF-SE: https://www.ncert.nic.in/pdf/NCFSE-2023-August_2023.pdf
6. Mathigon polypad: https://polypad.amplify.com/p
7. Math Learning Center: https://www.mathlearningcenter.org/apps
8. Toy Theater: https://toytheater.com/
9. Azim Premji Schools: https://azimpremjifoundation.org/what-we-do/education/azim-premji-schools/
10. Contact Math Space at mathspace@apu.edu.in
11. Counters: https://shorturl.at/70xz9 Review https://shorturl.at/7EI9l
12. Ten-Frame: https://shorturl.at/mviMk Review https://shorturl.at/Aiz2r
13. Ganitmala: https://shorturl.at/LHDyW Review https://tinyurl.com/38rcjbcf
14. Bundles-Sticks https://shorturl.at/HISoe
15. Flats-Longs-Units https://shorturl.at/2GFli Review https://tinyurl.com/2wehbacv
16. Decimal Flats-Longs-Units https://shorturl.at/unslv
17. Arrow Cards https://shorturl.at/QSXxn Review: https://shorturl.at/okMQS
18. Fraction kit: https://tinyurl.com/hffpn6bh
19. Fraction Squares: https://tinyurl.com/4wt7kmeh
20. Algebra Tiles: https://shorturl.at/3wirZ Review https://shorturl.at/lj6DH
21. Algebra Identities: Quadratic https://shorturl.at/8is1e
22. Algebra Identities: Cubic https://shorturl.at/8dvJc
23. Cutouts: https://tinyurl.com/2bb65cvt
24. Nets of Solids https://shorturl.at/V9ac4
25. Straw Models: https://tinyurl.com/h9t7hc7a
26. Angles with Intersecting Circles: https://shorturl.at/3fbU4

स्वाती सरकार अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी में सलाहकार के रूप में सेवाएँ प्रदान करती हैं। गणित उनके जीवन का दूसरा प्यार है (उनका पहला प्यार चित्रकला है)। उन्होंने भारतीय सांख्यिकी संस्थान से सांख्यिकी में स्नातक और स्नातकोत्तर उपाधि तथा वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सीएटल से गणित में एमएस की उपाधि हासिल की हैं। वे 15 से अधिक वर्षों से विद्यार्थियों और शिक्षकों के साथ गणित पर काम कर रही हैं, और उनकी हर प्रकार की हैंडस-ऑन गतिविधियों में गहरी रुचि है – ख़ासकर ओरिगामी में। उन्होंने अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के बेंगलूरु परिसर में गणित की प्रयोगशाला 'मैथ स्पेस' की शुरुआत की है। यह प्रयोगशाला विद्यालयों, शिक्षकों, अभिभावकों, विद्यार्थियों, विद्यालयी शिक्षा में कार्यरत ग़ैर-सरकारी संगठनों और शिक्षक प्रशिक्षकों को सेवाएँ प्रदान करती है। उनसे swati.sircar@apu.edu.in पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : हिमालय तहसीन **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता

मूर्त से अमूर्त की ओर : गणित शिक्षण जो हमेशा याद रहे

सोनिया कुण्डू

शुरुआत एक सरल, लेकिन महत्त्वपूर्ण सवाल से करते हैं : *क्या हम शिक्षक के रूप में एक सार्थक राह बना सकते हैं? बच्चे वस्तुओं की गिनती करने से लेकर लिखित एल्गोरिदम को समझने की दिशा में आगे कैसे बढ़ सकते हैं?*

'एल्गोरिदम' शब्द सुनते ही दिमाग़ में अकसर रटकर सीखने और तय चरणों को करने या दोहराने की छवि उभरती है। लेकिन ज़रा किसी ऐसे बच्चे की कल्पना कीजिए, जो न केवल एल्गोरिदम के पीछे छिपी अवधारणा को समझता है, बल्कि उसकी पड़ताल करने की प्रक्रिया का आनन्द भी उठाता है। और यही गहरी वैचारिक समझ आगे चलकर उसे एल्गोरिदम का स्वतंत्र और प्रभावी ढंग से उपयोग करने में समर्थ बनाती है। मैंने महसूस किया है कि यह राह हमेशा सीधी या आसान क़तई नहीं होती। इस सफ़र में वास्तव में कौन-सी चीज़ें मददगार होती हैं? क्या केवल शिक्षण अधिगम सामग्री (टीएलएम) के साथ काम करना ही काफ़ी होता है या हमें उससे भी ज़्यादा की ज़रूरत है? मैं इस आलेख में अपनी शिक्षण यात्रा के अनुभवों को साझा कर रही हूँ, जो निम्नलिखित सिद्धान्तों पर आधारित हैं :

- मानक गणितीय चिह्नों या संकेतों से परिचय कराने से पहले बच्चों के परिचित सन्दर्भों से शुरुआत करना।
- ठोस सामग्रियों का उपयोग केवल सहायक सामग्री के रूप में नहीं, बल्कि स्थानीय मान के निरूपण के रूप में करना।
- मानक एल्गोरिदम से परिचय कराने से पूर्व बच्चों को उनके अपने अनौपचारिक तरीक़ों का इस्तेमाल करने का अवसर देना।
- ठोस सामग्रियों से चित्रात्मक साधनों और फिर प्रतीकात्मक संकेतों की ओर धीरे-धीरे बढ़ना।
- 'हासिल लेना' को रटे-रटाए नियम की तरह नहीं, बल्कि इस समझ के साथ पढ़ाना कि जब 10 इकाइयाँ आपस में मिलती हैं, तो वे मिलकर एक नई दहाई बनाती हैं।

इन्हीं सिद्धान्तों के आधार पर मैंने अपनी कार्य-योजना बनाई। इनसे मुझे पाठ में सोच-समझकर तैयार की गई सामग्रियों व असल जीवन के उदाहरणों को शामिल करने में मदद मिली। मेरा उद्देश्य बच्चों के साथ रोचक चर्चा के ज़रिए उनमें ऐसी गहरी समझ विकसित करना था, ताकि वे अवधारणाओं को यांत्रिक तरीक़े से सीखने की बजाय अर्थपूर्ण ढंग से समझ सकें।

आइए, अब मैं आपको अपने विद्यार्थियों की सीखने की उस यात्रा पर ले चलती हूँ, जहाँ उन्होंने कक्षा-1 में संख्याओं की बुनियादी समझ से आगे बढ़ते हुए कक्षा-2 में 'हासिल के साथ' दो अंकों की संख्याओं को जोड़ने के एल्गोरिदम को अमल में लाना सीखा।

कक्षा-1 ख़त्म करते-करते मेरे विद्यार्थियों में संख्याओं को लेकर एक मज़बूत बुनियादी समझ विकसित हो चुकी थी। वे दहाइयों के बण्डलों और इकाइयों की सहायता से 99 तक की संख्याएँ गिन सकते थे। वे बड़ी संख्या से आगे गिनना (counting-on strategies) में भी कुशल हो गए थे। जैसे कि जब उनसे 16 + 3 जैसे सवालों को हल करने को कहा जाता तो वे बड़ी संख्या (16) को दिमाग़ में रखते और वहाँ से आगे की गिनती गिनते। इस स्टेज में बच्चों का लक्ष्य केवल 20 तक की संख्याओं का जोड़ सीखना था। इसके लिए उन्होंने

की-वर्ड : *जोड़, रीग्रुपिंग, बच्चे का सन्दर्भ, समझ, प्रयोग*

सोच-समझकर चुने गए संख्या-युग्मों के माध्यम से जोड़ का अभ्यास किया।

मैं जानती थी कि कक्षा-2 में आने पर हमें 10 से 99 के बीच की संख्याओं के जोड़ के एल्गोरिदम के बारे में उनकी अवधारणात्मक समझ को और गहरा करना होगा (इसलिए संख्याएँ इस तरह चुनी गई थीं कि उनका जोड़ हमेशा 100 से कम रहे)। लेकिन यह काम इस तरह करना था कि यह सीख उनके लिए अर्थपूर्ण बनी रहे और उनके अपने जीवन के अनुभवों से जुड़ी भी हो। इसलिए मैंने असल ज़िन्दगी की परिस्थितियों की एक ऐसी क्रमबद्ध शृंखला डिज़ाइन की, जो पूरी तरह से उनके अपने परिवेश से जुड़ी थी।

परिचित सन्दर्भों से जोड़ना : दुकान पर एक सुबह

सुबह की चर्चा के दौरान मैंने बच्चों को एक कहानी सुनाई :

"मुझे नूडल्स और बटर जैसी कुछ चीज़ें ख़रीदनी थीं, इसलिए कल मैंने अपनी गुल्लक तोड़ दी। मैं बटर लेने चौहान जी की दुकान पर गई। वहाँ मेरे अलावा तीन ग्राहक और थे। चौहान जी मेरी तरफ़ ध्यान ही नहीं दे रहे थे!"

फिर मैंने अपने विद्यार्थियों से पूछा, "तुम्हें क्या लगता है, वे मुझे अनदेखा क्यों कर रहे थे?"

बच्चों के जवाब समझदारी से भरे और मज़ेदार थे :

- "शायद वे चाहते थे कि आपको स्कूल पहुँचने में देरी हो जाए।"
- "शायद बाक़ी लोग उनके रिश्तेदार होंगे।"
- "शायद आपके पास पैसे ही नहीं थे।"
- "हो सकता है आपके पास बहुत सारे सिक्के रहे हों!"

यहाँ पर मैंने उन्हें बताया : "हाँ! मेरे पास सिर्फ़ एक-एक रुपए के सिक्के ही थे।"

इससे अकस्मात सिक्कों, विलम्ब और दुकानदारों से जुड़े अनुभवों को लेकर बातचीत शुरू हो गई।

मूर्त सामग्रियों के उपयोग पर आधारित एक गतिविधि

इस विचार को बच्चों के लिए जीवन्त बनाने के उद्देश्य से मैंने एक गतिविधि तैयार की। मैं कक्षा में बटर, बिस्कुट और नूडल्स के ख़ाली पैकेट लेकर आई और उन्हें छोटे-छोटे समूहों में बाँट दिया। मैंने इन चीज़ों का चयन इसलिए किया था, क्योंकि बच्चे उनसे अच्छी तरह परिचित थे। प्रत्येक पैकेट पर उसकी क़ीमत लिखी हुई थी, जो कि 10 से 99 ₹ के बीच थी। (नूडल्स की 10 ₹, बटर की 57 ₹ और बिस्कुट की 5 ₹)।

नमूने के तौर पर मैं कक्षा में एक रुपए वाले 75 सिक्के भी साथ लाई थी। मैंने पाँच विद्यार्थियों को दुकानदार और ग्राहकों का एक ऐसा दृश्य प्रस्तुत करने के लिए कहा, जिसमें उन्हें सामान बेचना था और बिल बनाकर उसका पूरा हिसाब जोड़ना था। विद्यार्थियों ने पूरे उत्साह के साथ इस गतिविधि में हिस्सा लिया। इसमें उन्होंने अपनी ओर से भी कई छोटे-छोटे प्रसंग और संवाद जोड़ दिए, जिससे यह गतिविधि और भी रोचक बन गई। इससे यह भी स्पष्ट हुआ कि उनमें पैसों की समझ और गिनती करने के तरीक़े परिपक्व हो रहे थे।

फिर मैंने बच्चों को समूहों में बाँट दिया और उनसे तीनों वस्तुओं की कुल क़ीमत निकालने को कहा। मैंने देखा कि बच्चों के बीच बेहद जीवन्त चर्चाएँ हुईं और उन्होंने जोड़ने के अलग-अलग तरीक़े अपनाए। कुछ समूहों ने बटर की क़ीमत से शुरुआत करते हुए 'काउंटिंग-ऑन स्ट्रेटेजी' का इस्तेमाल किया। कुछ समूहों ने गणना को आपस में बाँट लिया। एक बच्चे ने दहाई के अंकों का जोड़ किया तो दूसरे ने इकाई के अंक जोड़े। वहीं कुछ समूहों ने राउंड-अप का सहारा लिया, जैसे बटर की क़ीमत ₹ 57 को 60 मानकर बिस्कुट की क़ीमत के 5 ₹ जोड़ने के लिए उन्होंने केवल 2 और जोड़े (यानी उन्होंने 57 में 5 को दो चरणों में जोड़ा : $57 + 3 + 2$)। कुछ बच्चों ने दूसरे समूहों के अपने साथियों के साथ उत्तरों का मिलान किया, जिससे उनके बीच आपस में हल्की-फुल्की बहस भी छिड़ गई, "अरे नहीं, तुम नूडल्स के पैसे जोड़ना तो भूल ही गए!" या "चलो, एक बार फिर से धीरे-धीरे जोड़ते हैं।" इस तरह आपस में चर्चा और संवाद करने से उन्हें शिक्षक के दख़ल के बिना ख़ुद से ही अपनी ग़लतियों को सुधारने में मदद मिली।

अधिक दक्ष रणनीतियों की ओर

इस गतिविधि ने हमें विचार-मन्थन के एक अहम पड़ाव पर पहुँचा दिया। मैंने उनसे पूछा, "अगली बार दुकान पर अपना समय बचाने के लिए मुझे क्या करना चाहिए?" उन्होंने तुरन्त जवाब दिया, "सिक्कों की जगह नोट लेकर जाइए।"

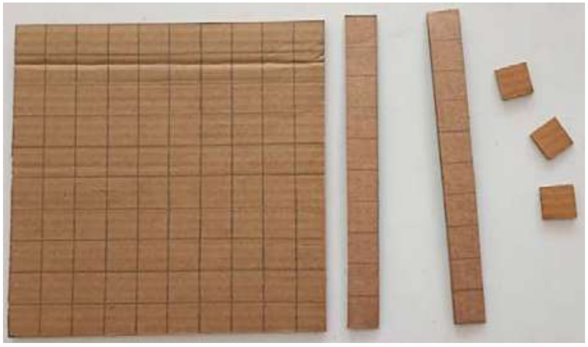
मैंने पूछा, "अगर मेरे पास केवल दस रुपए के नोट हों, तो एक-एक रुपए के 75 सिक्कों की जगह मुझे कितने नोट और कितने सिक्के ले जाने चाहिए?" अधिकांश बच्चों ने सही जवाब दिए, " दस रुपए के 7 नोट और एक-एक रुपए के 5 सिक्के।" मगर एक बच्चे ने थोड़ा अलग ढंग से जवाब दिया : "या फिर 50 + 20 + 5!" यानी उसने 50 को पाँच दहाई और 20 को दो दहाई के रूप में सोचा। बच्चों की सोच में एक लचीलापन दिखाई दे रहा था। इस लचीलेपन और संख्याओं को अलग-अलग हिस्सों में बाँटकर समझने की उनकी क्षमता को देखते हुए मैंने उन्हें इसी दिशा में और सोचने के लिए प्रेरित किया। इकाइयों को गिनने और जोड़ने के ढर्रे से बाहर निकलकर संख्याओं को दहाई और इकाई के समूहों में रीग्रुपिंग करने का यह बदलाव किसी बने-बनाए नियम के तहत नहीं, बल्कि खोजपरक और साझा चिन्तन का परिणाम था। जब विद्यार्थी रोज़मर्रा की वस्तुओं की वास्तविक क़ीमतों पर काम कर रहे थे तो उन्होंने स्वाभाविक रूप से प्रत्येक संख्या को दहाइयों और इकाइयों में बाँटना शुरू किया। उन्होंने पहले दहाइयों को एक साथ जोड़कर क़ीमत निकाली, फिर इकाइयों को एक साथ जोड़ा। अन्त में दोनों से प्राप्त क़ीमत को मिलाकर उत्तर निकाला। इस प्रत्यक्ष अनुभव से उन्हें स्थानीय मान की अवधारणा को अर्थपूर्ण ढंग से समझने में मदद मिली और यही समझ आगे चलकर बड़ी संख्याओं के स्तम्भ जोड़ (column addition) का आधार बनी।

भौतिक मुद्रा के साथ काम करने से बच्चों को ठोस अनुभव से अमूर्त चिन्तन की ओर बढ़ने में मदद मिली। कक्षा में हुई चर्चाओं ने उन्हें अपनी सोच को अभिव्यक्त करने और आवश्यकतानुसार उसमें संशोधन करने का अवसर दिया। और सबसे महत्त्वपूर्ण बात यह रही कि सीखने का यह सिलसिला कक्षा ख़त्म होने के बाद भी जारी रहा, जो यह दिखाता है कि आनन्ददायक और अर्थपूर्ण पढ़ाई किस तरह दिलो-दिमाग़ में हमेशा के लिए बस जाती है।

अगले दिन मैंने सुनियोजित तरीक़े से तैयार की गई शिक्षण सामग्री के ज़रिए स्थानीय मान के बारे में बच्चों की समझ को और गहरा करने का प्रयास किया। इसके लिए मैंने द्वि-आयामी बेस-10 ब्लॉक्स (2D Base-10 Blocks) का उपयोग किया, जिन्हें सामान्यतः FLU (फ्लैट्स, लॉन्ग्स और यूनिट्स) कहा जाता है।

इनमें 10 छोटे वर्गों से बनी एक लम्बी पट्टी एक दहाई (लॉन्ग) को निरूपित करती है, जबकि प्रत्येक छोटा वर्ग एक इकाई (यूनिट) को दर्शाता है। मैंने सबसे पहले बच्चों को केवल वह लम्बी पट्टी दी और उसे ध्यान से देखने के लिए कहा। फिर उनसे पूछा, "तुम्हें इसमें क्या दिखाई दे रहा है?" कई बच्चों ने तुरन्त जवाब दिया, "इस एक लम्बी पट्टी में 10 छोटे-छोटे वर्ग हैं!" यह मूर्त अनुभव से अमूर्त समझ की ओर ले जाने वाला एक उचित सेतु साबित हुआ।

इस जुड़ाव को और अधिक व्यावहारिक बनाने के लिए मैंने प्रत्येक विद्यार्थी को अलग-अलग संख्या में इकाई वाले कुछ छोटे वर्ग दिए और उन्हें गिनने को कहा। उन्होंने सहज रूप से उन छोटे-छोटे वर्गों को 10-10 के समूहों में व्यवस्थित करना शुरू कर दिया। जैसे ही 10 वर्गों का कोई समूह पूरा होता, मैं उन्हें उसके बदले (दहाई की) एक लम्बी पट्टी थमा देती। अनेक इकाइयों को दहाइयों में बदलने की इस सहज प्रक्रिया ने बच्चों को बड़ी आसानी से समझा दिया कि *दस अलग-अलग इकाइयों का मतलब एक दहाई* ही होता है।



चित्र-1 : फ्लैट्स-लॉन्ग्स-यूनिट्स (FLU)
एक लॉन्ग = 10 यूनिट, एक यूनिट वर्ग = 1 इकाई

इन ब्लॉक्स की वजह से अनेक विद्यार्थी दहाई और इकाई के ढाँचे को देख सके। अपने सामने संख्याओं को इस तरह रखा देखकर वे संख्याओं की बनावट और उनकी रीग्रुपिंग के गणितीय तर्क को आसानी से समझ पा रहे थे। इसके बाद मैंने उनसे इन्हीं ब्लॉक्स के ज़रिए प्रत्येक वस्तु की क़ीमत को दर्शाने के लिए कहा। इससे वे मूर्त वस्तुओं (सिक्कों एवं ख़रीददारी) से निकलकर प्रतीकात्मक सामग्री (ब्लॉक्स) की ओर बढ़ सके। दरअसल, मैं उन्हें आगे आने वाली अमूर्त गणितीय अवधारणाओं के लिए तैयार कर रही थी, जहाँ वे

अपनी ख़ुद की खोज-पड़ताल के ज़रिए 'स्थानीय मान' को समझ रहे थे। शुरुआत में यह गतिविधि केवल गिनती करने और दहाई व इकाइयों के रीग्रुपिंग तक सीमित थी। उस दिन इन ब्लॉक्स की सहायता से कुल योग निकाले जाने की कोई अपेक्षा नहीं थी।

FLU सामग्री ही क्यों? मैंने डीन्स ब्लॉक्स के स्थान पर FLU सामग्री इसलिए चुनी, क्योंकि मैं चाहती थी कि विद्यार्थी ऐसी चीज़ों के साथ काम करें जो हमारी कक्षाओं में आसानी से सुलभ रहें और व्यावहारिक भी हों। हालाँकि स्थानीय मान सिखाने में डीन्स ब्लॉक्स अधिक असरदार होते हैं, लेकिन पूरी कक्षा के लिए मेरे पास गिने-चुने सेट ही उपलब्ध थे। हैंडमेड FLU सामग्री से यह सुनिश्चित हो सका कि कक्षा का हर बच्चा इसमें सक्रिय रूप से भाग ले सके और ख़ुद इसका अभ्यास कर सके। इसके अलावा, इन्हें तैयार करना न केवल किफ़ायती होता है, बल्कि आसान भी। कोई भी शिक्षक कक्षा में उपलब्ध साधारण संसाधनों से इन्हें बेहद आसानी से बना सकता है।

अगले दिन, हमने दो अंकों की संख्याओं के जोड़ के लिए FLU किट का उपयोग किया। मैंने जान-बूझकर ऐसी संख्याओं का चयन किया था, जिनमें इकाइयों का योग नौ से अधिक न हो (जैसे 31 + 13 या 47 + 21)। इससे बच्चे 'हासिल' की जटिलताओं में फँसे बिना इकाइयों और दहाइयों के आपसी सम्बन्ध पर अपना ध्यान केन्द्रित कर सके। जब विद्यार्थियों ने अपने उत्तर लिखे तो उन्हें ख़ुद यह पैटर्न समझ में आ गया कि इकाइयाँ इकाइयों के साथ जुड़ती हैं और दहाइयाँ दहाइयों के साथ। इस तरह स्तम्भ जोड़ का तरीक़ा ख़ुद-ब-ख़ुद आकार ले रहा था। यह गणितीय विधि मैंने नहीं सिखाई थी, बल्कि उनके अपने अवलोकनों से स्वयं उपजी थी।

चित्र-2 : फ्लैट्स-लॉन्स-यूनिट्स सामग्री का उपयोग करते हुए विद्यार्थी। (बच्चों ने टेबल पर व्हाइटबोर्ड मार्कर से लिखा था, जिसे आसानी से मिटाया जा सकता था। इससे टेबल की सतह पर कोई स्थायी निशान नहीं पड़ा।)

जब बच्चों को यह सब कुछ अच्छे से समझ में आ गया, उसके बाद हम उन गणनाओं की ओर बढ़े जिनमें इकाइयों का योग नौ से अधिक हो। उदाहरण के तौर पर, 32 और 29 को जोड़ते समय विद्यार्थी 11 इकाइयों तक पहुँचे। इस मौक़े पर एक बच्चे ने 'भोला' की उस सुपरिचित कहानी का उल्लेख किया (https://bit.ly/4f2cODg), जिसमें वस्तुओं को 10-10 के समूहों में बाँटकर फिर से रीग्रुपिंग करने की बात कही गई है। इसे सुनकर कुछ देर के लिए कक्षा में सन्नाटा छा गया। फिर अचानक बड़े उत्साह के साथ एक बच्चा खड़ा हुआ और बोला, "हाँ, सही कहा! इन 10 इकाइयों को मिलाकर हम एक दहाई बना सकते हैं, बिल्कुल वैसे ही जैसे हमने पहले स्ट्रिप्स और इकाइयों को गिनते समय किया था।"

उस पल दहाई को 'हासिल' देने का विचार केवल एक रटा-रटाया या यांत्रिक नियम न रहकर एक बेहद सहज और असरदार एल्गोरिदम बन गया, जो पूरी कक्षा को समझ में आ रहा था। 32 और 29 को FLU किट के ज़रिए देखने पर बच्चों का ध्यान एक ख़ास बात की ओर आकर्षित हुआ : जब इकाइयाँ नौ से ज़्यादा हो जाती हैं तो वे केवल बढ़ती ही नहीं हैं, बल्कि ख़ुद को नए सिरे से समूहबद्ध करके एक नई दहाई का रूप ले लेती हैं। पारम्परिक गणित जिसे 'हासिल' कहता है, वह अब बच्चों के लिए कोई गूढ़ रहस्य नहीं रह गया था, बल्कि समूहबद्ध होने का एक स्वाभाविक और तार्किक परिणाम बन चुका था।

विद्यार्थियों को एहसास हुआ कि जब भी इकाइयों का योग नौ से अधिक होता है, वे ख़ुद-ब-ख़ुद समूहबद्ध होकर एक दहाई का रूप ग्रहण कर लेती हैं और अपना स्थान दहाई की ओर बदल लेती हैं। इस तरह, लिखा जाने वाला यह एल्गोरिदम अब थोपी गई कोई मजबूरी नहीं रहा, बल्कि उनकी अपनी सोच व समझ का एक अर्थपूर्ण दस्तावेज़ बन गया। समूह बनाना तो वे यूकेजी की कक्षा से ही सीखते आ रहे थे, लेकिन इस अनुभव ने उन्हें उस पुरानी जानी-पहचानी क्रिया को गणितीय प्रतीकों और अंकों से सम्बद्ध कर दिया। इस पूरी प्रक्रिया में उन्होंने केवल यह नहीं सीखा कि जोड़ 'कैसे' होता है, बल्कि यह भी समझा कि यह 'क्यों' होता है। इस तरह, चरण-दर-चरण अपनाई जाने वाली विधि एक जीवन्त गणितीय समझ में बदल गई।

निष्कर्ष

जैसा कि इस लेख में बताया गया, यह पूरा पाठ पैसों और

ख़रीददारी के रोज़मर्रा के अनुभवों से शुरू होकर संख्याओं को दहाई और इकाई के रूप में प्रस्तुत करने तक आगे बढ़ा। FLU जैसी शिक्षण सामग्रियों के ज़रिए 10 इकाइयों की जगह एक दहाई को रखने की इस प्रक्रिया को समझने के लिए पर्याप्त समय दिया गया। इस गतिविधि के समापन के बाद हम लिखित जोड़ नियम तक पहुँचे, जो वास्तव में बच्चों द्वारा लिखित रूप में दर्ज करने की प्रक्रिया थी।

शिक्षण का मेरा यह सफ़र बच्चों के जाने-पहचाने सन्दर्भों से शुरू हुआ। इसमें ठोस एवं मूर्त सामग्रियों का सोच-समझकर प्रयोग किया गया, बच्चों के अनौपचारिक तरीक़ों को सुना एवं सराहा गया और फिर धीरे-धीरे उन्हें प्रतीकात्मक साधनों व गणितीय संकेतों की ओर ले जाया गया। इस पूरे अनुभव ने मेरे भीतर यह संकल्प जगाया कि मैं घटा के गणितीय नियम सिखाने के लिए भी इसी तरीक़े का इस्तेमाल करूँगी!

सोनिया कुण्डू 2018 से फ़ाउण्डेशनल स्टेज की शिक्षिका हैं और बच्चों में बुनियादी साक्षरता एवं संख्यात्मक ज्ञान को मज़बूत करने के लिए प्रतिबद्ध रही हैं। अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन के साथ काम करते हुए उन्होंने ज़मीनी स्तर पर शिक्षा की व्यावहारिक हक़ीक़तों को गहराई से समझा है। वर्तमान में वे नोएडा स्थित हेरिटेज एक्सपेरिएंशियल लर्निंग स्कूल में कार्यरत हैं, जहाँ वे छोटे बच्चों के लिए आनन्ददायक, अर्थपूर्ण और बाल-केन्द्रित शिक्षण अनुभव को बढ़ावा दे रही हैं। उनसे soniakundu1911@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

काप्रेकर के स्थिरांक की खोज में

सुयश तिवारी

आज मुझे कक्षा में एक अतिरिक्त पीरियड मिल गया। यह दिन का आख़िरी पीरियड भी था, इसलिए मैंने नियमित कक्षा चर्चा को आगे न बढ़ाने का फैसला किया। मैं 'अपने हाथ गणित' पुस्तक में किसी ऐसी गतिविधि को खोज रहा था जिसे बच्चे एक-पीरियड में पूरी कर लें। इसी दौरान मेरी नज़र 'काप्रेकर का स्थिरांक' (Kaprekar's constant) नाम के टॉपिक पर पड़ी। नाम से तो यह हाई स्कूल का कोई टॉपिक लग रहा था, लेकिन जब मैंने कुछ संख्याओं के साथ काप्रेकर स्थिरांक की प्रक्रिया को जाँचा, तो यह मज़ेदार लगा! यह हिस्सा वास्तव में इतना सरल था कि कक्षा-3 के विद्यार्थियों के लिए एक खोज-आधारित गतिविधि (exploration) तैयार की जा सकती थी, और जैसे मैं इसी की तलाश में था।

पूर्व-अपेक्षाएँ

- बच्चों को 3-अंकीय संख्याओं को जोड़ना और घटाना आना चाहिए।
- उन्हें किसी संख्या के अंकों को बढ़ते (आरोही) और घटते (अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करना आना चाहिए।

कक्षा में चर्चा

मैंने कक्षा में प्रवेश किया। विद्यार्थी दिन भर की पढ़ाई के बाद थके हुए थे और इस अतिरिक्त पीरियड में खेलने के लिए समय या कम्प्यूटर क्लास चाहते थे। मैंने उनके हल्ले-गुल्ले और अनुरोधों को अनदेखा किया और ब्लैकबोर्ड पर 'काप्रेकर का स्थिरांक' लिखना शुरू कर दिया। बच्चे इसका उच्चारण करने लगे और पूछने लगे कि यह क्या है।

सुयश तिवारी

मैंने कहा, "आओ पहले सब दो मिनट शान्त बैठते हैं, और फिर मैं आपको इसके बारे में बताऊँगा।"

सभी बच्चे शान्त होकर बैठ गए। मैंने शुरुआत की : "जिस तरह विज्ञान में बेहतरीन काम करने वाले व्यक्ति को वैज्ञानिक (scientist) कहा जाता है, वैसे ही गणित में बेहतरीन काम करने वाले व्यक्ति को हम क्या कहेंगे?"

विद्यार्थियों ने अन्दाज़ा लगाना शुरू कर दिया – 'मैथिस्ट', 'मैथिनटिस्ट' और उच्चारण में मुश्किल लगने वाले अन्य शब्द।

विद्यार्थी

मैंने जवाब दिया, "हम उन्हें गणितज्ञ कहते हैं, और आज हम भारत के एक महान गणितज्ञ – काप्रेकर जी – और उनके जादुई स्थिरांक अंक (magical constant number) के बारे में बात करने जा रहे हैं।"

> ***"डी.आर. काप्रेकर महाराष्ट्र के देवलाली में एक सरकारी स्कूल में गणित के शिक्षक थे। उन्हें संख्याओं के साथ खेलना बहुत पसन्द था और उन्होंने संख्याओं में कई ऐसे सुन्दर पैटर्न खोजे जो पहले अज्ञात थे।"***
>
> *(स्रोत : एनसीईआरटी गणित प्रकाश, कक्षा-6)*

की-वर्ड : *काप्रेकर का स्थिरांक, जाँच (पड़ताल), खोज, बार-बार दोहराई जाने वाली संक्रिया (पुनरावृत्ति), जोड़, घटाव*

सभी धीरे से बुदबुदाए, "जादुई स्थिरांक अंक क्या है?"

मैंने बात आगे बढ़ाई, "आओ हम भी वही काम करते हैं जो काप्रेकर जी ने किया था। अपनी कॉपियाँ निकालो, हम सब मिलकर उस जादुई स्थिरांक अंक को खोजेंगे।"

वे सभी उत्सुकता से तैयार हो गए और अपनी 'तलवारें' यानी अपने पेन हाथ में ले लिए।

"आप सभी 3-अंकीय संख्याओं से तो परिचित हैं ही। लेकिन आज हम किसी भी 4-अंकीय संख्या से शुरुआत करते हैं। हाँ तो मायरा, मुझे कोई ऐसी 4-अंकीय संख्या बताओ, जिसके चारों अंक एक जैसे न हों।"

मायरा

"1762 "

"बढ़िया, यहाँ सभी अंक अलग-अलग हैं। अब मैं आपको बताता हूँ कि क्या करना है और आप सभी अपनी कॉपियों में अपने उत्तर लिखें।"

4-अंकीय संख्या से शुरुआत करें।		1	7	6	2
अंकों को घटते (अवरोही) क्रम में व्यवस्थित करें। यह पहली संख्या है :		7	6	2	1
अब इन्हीं अंकों को बढ़ते (आरोही) क्रम में व्यवस्थित करें। यह दूसरी संख्या है :	–	1	2	6	7
पहली और दूसरी संख्या के बीच का अन्तर ज्ञात करें :		6	3	5	4
अब नई संख्या के साथ यही प्रक्रिया दोहराएँ :					
घटते क्रम में		6	5	4	3
बढ़ते क्रम में	–	3	4	5	6
अन्तर		3	0	8	7
घटते क्रम में		8	7	3	0
बढ़ते क्रम में	–	0	3	7	8
अन्तर		8	3	5	2
घटते क्रम में		8	5	3	2
बढ़ते क्रम में	–	2	3	5	8
अन्तर		6	1	7	4

तालिका-1 : काप्रेकर के स्थिरांक तक पहुँचने के लिए संक्रियाओं की पुनरावृत्ति का क्रम

"आओ, इन चरणों को एक बार फिर से दोहराने की कोशिश करते हैं। आप क्या देखते हैं?"

"हमें फिर से 6174 ही मिलेगा, सर!" बच्चों ने जवाब दिया।

"क्या अन्तर 4716 होने पर भी आपको फिर से 6174 मिलेगा?"

"हाँ, क्योंकि इसमें भी वही अंक हैं : 7, 6, 4, और 1; इसलिए हम उन्हीं संख्याओं के बीच का अन्तर निकाल रहे हैं।"

"ठीक है, बहुत बढ़िया! अब, यही प्रक्रिया किसी दूसरी 4-अंकीय संख्या के साथ आज़माएँ। आओ देखें कि क्या हम वैसी ही स्थिति पर पहुँचते हैं। इस बार, आप में से हर कोई अपनी ख़ुद की कोई संख्या ले और इस प्रक्रिया को दोहराए।"

एक मिनट के भीतर ही, सभी छोटे गणितज्ञों की तरह काम करने लगे – घटते क्रम, बढ़ते क्रम और घटाव की इस पूरी प्रक्रिया का पालन करते हुए। दस से पन्द्रह मिनट के बाद, कई विद्यार्थी उत्साहित होकर आगे आए :

"हमें फिर से वही संख्या 6174 मिली!"

"हाँ, आप सभी को वही संख्या मिली होगी। हम इसे काप्रेकर का स्थिरांक 6174 कहते हैं। हम इसे स्थिरांक इसलिए कहते हैं क्योंकि यह बदलता नहीं है।"

तब तक पीरियड समाप्त हो चुका था।

मैंने उन्हें घर पर कोशिश करने के लिए दो संख्याएँ दीं। कुछ आगे बढ़ चुके विद्यार्थियों के लिए, मैंने एक चुनौती जोड़ी : "क्या 3-अंकीय या 5-अंकीय संख्याओं के लिए भी ऐसा ही कोई स्थिरांक है? अगर आपको ऐसा कोई अंक मिलता है, तो हम उसका नामकरण आपके नाम पर करेंगे।"

अगले दिन

"मुझे 3 अंकों का स्थिरांक मिल गया – 495!"

"मुझे भी मिल गया!"

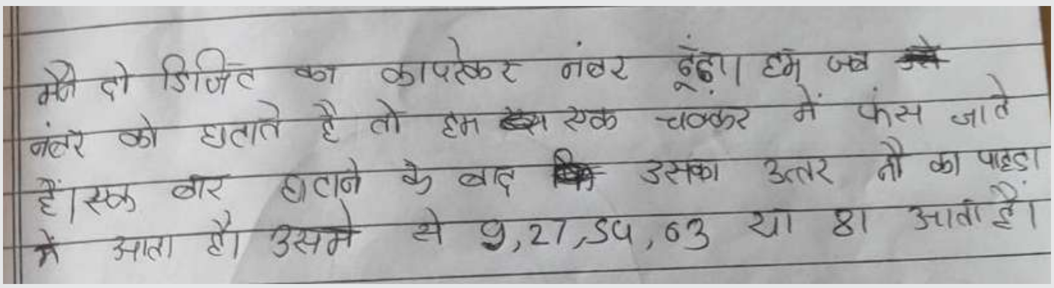
मुझे कक्षा-3 के विद्यार्थियों से इस स्तर की खोज की उम्मीद नहीं थी। तृप्ति, मायरा और जिज्ञासु ने 3-अंकीय संख्या खोज निकाली थी। उन्होंने स्वतंत्र रूप से कई संख्याओं पर इस प्रक्रिया को आज़माया और स्थिरांक ढूँढ़ लिया। यहाँ तक कि मुझे भी 3 अंकों के इस स्थिरांक के बारे में पता नहीं था। मैंने उनके काम की सराहना की।

"लेकिन मुझे 5-अंकीय संख्याओं का कोई स्थिरांक नहीं मिला। यह किसी एक संख्या पर जाकर नहीं रुकता, लेकिन मैंने यह ज़रूर देखा कि संख्याओं का एक ही सेट बार-बार रिपीट होता है।"

जिज्ञासु

मैंने समस्या को समझा और खुद भी करके देखा। हाँ, यह कोई एक संख्या नहीं थी, बल्कि कुछ चरणों के बाद संख्याओं का एक सेट चक्र (cycles) के रूप में दिखाई देने लगता है। हमने इस पर आगे और काम करने का फ़ैसला किया। हमें इंटरनेट पर पता चला कि 2-अंकीय और 5-अंकीय संख्याओं के लिए कोई एक निश्चित संख्या (स्थिरांक) नहीं होती, बल्कि कुछ निश्चित चक्र होते हैं। मैंने जिज्ञासु को 2-अंकीय संख्याओं पर काम करने के लिए कहा और मैंने खुद 5-अंकीय संख्याएँ ले लीं।

2-अंकीय संख्या के लिए जिज्ञासु के अवलोकन निम्नलिखित थे :


मैंने दो डिजिट का काप्रेकर नंबर ढूंढा। हम जब नंबर को घटाते है तो हम एक चक्कर में फंस जाते हैं। एक बार घटाने के बाद उसका उत्तर नौ का पहाड़ा मे आता हैं। उसमे से 9,27,54,63 या 81 आता हैं।

"मैंने यह पता लगाने की कोशिश की कि क्या 2-अंकीय काप्रेकर संख्या होती है या नहीं। जब हमने एक 2-अंकीय संख्या को उसके उल्टे क्रम वाले अंकों की संख्या से घटाया, तो हम एक चक्र के जाल में फँस गए। घटाव के पहले चरण के बाद, जो संख्याएँ सामने आती हैं वे 9 के पहाड़े (गुणांक) में होती हैं। उनमें से भी विशेष रूप से 9, 27, 54, 63 और 81 सामने आती हैं।"

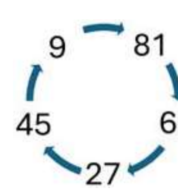
चित्र-1 : जिज्ञासु का अवलोकन

जब मैंने 5-अंकीय संख्याओं पर काम करना शुरू किया, तो मुझे जिज्ञासु के अवलोकन जैसा ही परिणाम मिला। दो से पाँच चरणों के बाद, संख्या एक चक्र के भीतर आने लगती हैं। लेकिन यहाँ, एक से अधिक प्रकार के चक्र थे। मैंने लगभग 25 अलग-अलग 5-अंकीय संख्याओं पर इसे आज़माने के लिए एक प्रोग्राम (कम्प्यूटर कोड) का उपयोग किया और पाया कि मेरे द्वारा जाँची गई सभी संख्याएँ निम्नलिखित तीन चक्रों में से किसी एक पर जाकर समाप्त होती हैं।

चित्र-2 : 5-अंकीय काप्रेकर अनुक्रम के तीन चक्र

मुख्य निष्कर्ष

- 4-अंकीय संख्याओं के लिए काप्रेकर के स्थिरांक 6174 की ही तरह, 3-अंकीय संख्याओं को भी जब इसी प्रक्रिया से गुज़ारा जाता है, तो वे एक स्थिरांक 495 पर पहुँचती हैं।
- 2-अंकीय और 5-अंकीय संख्याओं के लिए यह प्रक्रिया किसी एक एकल स्थिरांक पर नहीं, बल्कि एक चक्र पर जाकर समाप्त होती है।
- ये सभी संख्याएँ (चाहे वे स्थिरांक हों या चक्र में आने वाली संख्याएँ) 9 से विभाज्य होती हैं।
- स्थिरांक और दोहराव वाले चक्र, दोनों पर ही अधिकतम 7 चरणों में पहुँचा जा सकता है।



चित्र-3 : 2-अंकीय काप्रेकर अनुक्रम का चक्र

शुरु करने के लिए ली जाने वाली संख्या में कम-से-कम दो अंक अलग-अलग होने चाहिए। (उदाहरण के लिए 3222 जैसी संख्या का पहला अन्तर 3-अंकीय संख्या 999 आता है, लेकिन इस संख्या को 0999 के रूप में लेने पर, हम चौथे चरण में काप्रेकर के स्थिरांक तक पहुँच सकते हैं।)

शिक्षकों के लिए मुख्य बातें

- **संख्याओं के प्रति प्रेम बढ़ाना :** आमतौर पर, विद्यार्थी गणित के और अधिक सवाल नहीं माँगते हैं, लेकिन इस कक्षा में विद्यार्थी खुद कह रहे थे : "हमें एक और संख्या दीजिए, हम स्थिरांक ढूँढ़ेंगे।" इस तरह मैं बिना किसी बाहरी दबाव या ज़बरदस्ती के, उन्हें उधार लेने (regrouping) वाले 4-अंकीय संख्याओं के घटाव के नए कौशल का अभ्यास कराने में सफल रहा।
- **लगातार प्रयास करने और समस्या-समाधान के कौशल का विकास :** विद्यार्थियों को बार-बार एक ही काम करना उबाऊ लगता है, लेकिन उन सभी ने लगातार प्रयास करके सवालों को हल किया और स्थिरांक खोज निकाला। कुछ विद्यार्थियों को स्थिरांक तक पहुँचने के लिए 7 चरणों तक जाना पड़ा, जो कक्षा-3 के विद्यार्थियों के लिए काफ़ी चुनौतीपूर्ण काम है।
- **गणितज्ञों का परिचय – सैद्धान्तिक नहीं बल्कि व्यावहारिक :** 'गणितज्ञ' जैसे नए शब्द से शुरुआत करके, उन्हें काप्रेकर जी के जीवन के बारे में जानने का मौक़ा मिला – जो कि एक साधारण ग्रामीण शिक्षक थे और जिन्होंने गणित के प्रति अपने अनन्य प्रेम के कारण अपनी खोजों को जारी रखा। मैंने बच्चों को एक अन्य गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन के बारे में भी सीधे-सीधे नहीं बताया, बल्कि श्रीनिवास रामानुजन के प्रसिद्ध जादुई वर्गों (Srinivasa Ramanujan's famous magic squares - https://bit.ly/4dxCEhg) से शुरुआत करने का फ़ैसला किया।
- **करके सीखने से बढ़ा आत्मविश्वास :** एक दिन बाद, जब मैंने पूछा, "कौन आगे आकर काप्रेकर स्थिरांक के बारे में बात कर सकता है?" तो कई हाथ खड़े हो गए, क्योंकि उन्होंने ख़ुद इसका अभ्यास किया था और उन्हें पूरा भरोसा था कि वे इस प्रक्रिया को समझा सकते हैं। साथ ही, मैंने इच्छुक विद्यार्थियों को अपनी ओर से अन्य स्थिरांक संख्याओं को खोजने का मौक़ा भी दिया।

सम्पादक की टिप्पणी

जो काम खाली पीरियड के दौरान विद्यार्थियों को व्यस्त रखने के लिए एक गतिविधि के द्वारा साधारण सी खोज के रूप में शुरू हुआ था, वह आगे चलकर विद्यार्थियों और शिक्षक दोनों के लिए सीखने का एक शानदार अनुभव बन गया। यह शिक्षक अपने विद्यार्थियों के साथ खुद भी एक खोजकर्ता (explorer) बन गए और अलग-अलग क्षमताओं वाले विद्यार्थियों को अपनी सीमाओं से आगे बढ़ने और एक-दूसरे से सीखने की चुनौती देने में सफल रहे। वास्तव में, यह खाली समय का एक बेहद मूल्यवान उपयोग है!

सुयश तिवारी 2023 से अज़ीम प्रेमजी फ़ाउण्डेशन के साथ काम कर रहे हैं और अज़ीम प्रेमजी स्कूल, धमतरी में प्रिपेरेटरी स्टेज के शिक्षक हैं। वे अपने विद्यार्थियों के लिए गणित को अधिक अर्थपूर्ण बनाने के लिए कक्षा में कला और व्यावहारिक गतिविधियों को शामिल करने का प्रयास करते हैं। उनसे suyash.tiwari@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : गूगल जेमिनी **पुनरीक्षण :** देबब्रत साहा **सम्पादन :** राजेश उत्साही

अन्तर को मापना

जीवेश पंचभाई

मापन एक बुनियादी कौशल है। मापन के आधार पर दैनिक जीवन के कार्यों में बहुत से निर्णय लिए जाते हैं। राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 ने प्राथमिक स्कूल में भी इसे महत्त्व दिया है। विद्यार्थियों के रूप में, हमें मानक मानों (जैसे 1 मीटर = 100 सेंटीमीटर) को रटाकर लम्बाई का मापन सिखाया गया है। लेकिन वर्तमान शिक्षाशास्त्र बच्चे के दृष्टिकोण से शुरू होता है – ग़ैर-मानक इकाइयों जैसे कि बित्ता (हथेली की लम्बाई) और पंजे की लम्बाई का उपयोग करना और फिर मानक इकाइयों और उससे जुड़ी शब्दावली, प्रतीकों और परम्पराओं की आवश्यकता पर तर्क करना। यह लेख कक्षा-3 के विद्यार्थियों को लम्बाई के मापन की अवधारणा से परिचित कराने के जीवेश के अनुभवों पर आधारित है।

जब मैंने पढ़ाना शुरू किया, तो मुझे पूरा विश्वास था कि मापन के इतिहास से जुड़ी एक कहानी मेरे सीखने के उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए मंच तैयार कर देगी। ग़ैर-मानक इकाइयों के लिए, मैं यह समझाऊँगा कि प्राचीन काल में लोगों के पास मापने के उपकरण नहीं थे और वे 'पाथा' (लगभग 2 किलोग्राम वज़न मापने के लिए पहाड़ी क्षेत्रों में इस्तेमाल की जाने वाली एक इकाई) जैसी इकाइयों का उपयोग करते थे। मैंने इस बात पर ज़ोर दिया कि बाद में प्रौद्योगिकी के कारण सटीक, मानक उपकरण बने। समय के साथ, मुझे एहसास हुआ कि यह ऐतिहासिक सन्दर्भ कक्षा-6 के विद्यार्थियों की मदद तो कर सकता है, लेकिन यह अकसर कक्षा-3 के विद्यार्थियों को भ्रमित कर देता है। इससे भी महत्त्वपूर्ण बात मैंने सीखी कि ग़ैर-मानक इकाइयाँ केवल अतीत के अवशेष नहीं हैं; वे आज भी प्रासंगिक हैं। हम हमेशा अपने साथ पैमाने लेकर नहीं चलते हैं, लेकिन हम अकसर बित्ते, क़दम की लम्बाई, हाथ आदि का उपयोग करके अनुमान लगाते हैं।

अधिगम प्रतिफलों पर आधारित योजना

एनसीएफ़ 2023 के अनुसार प्रिपरेटरी स्टेज के लिए लम्बाई के मापन से सम्बन्धित कुछ शुरुआती पाठ्यचर्या लक्ष्य और दक्षताएँ इस तरह हैं :

पाठ्यचर्या के लक्ष्य	दक्षता	अधिगम प्रतिफल
ग़ैर-मानक और मानक इकाइयों का उपयोग करके दूरी, लम्बाई, वज़न, क्षेत्रफल, आयतन और समय से सम्बन्धित वस्तुओं के मापने योग्य गुणों और ऐसी मापन की इकाइयों, प्रणालियों और प्रक्रियाओं को समझना।	**C-3.1 :** "[विद्यार्थी] ग़ैर-मानक और मानक इकाइयों में मापन करता है और मानक इकाइयों की आवश्यकता का मूल्यांकन करता है।" **C-3.2 :** "[विद्यार्थी] मापे जा रहे गुण (जैसे लम्बाई, परिमाप, समय, वज़न, आयतन) के लिए उचित इकाई और उपकरण का उपयोग करता है।"	ग़ैर-मानक इकाइयों की तुलना में मानक इकाइयों के महत्त्व को समझते हैं; (जैसे लम्बाई मापन के मामले में, उन स्थितियों को बता सकते हैं जहाँ उन्हें ग़ैर-मानक इकाइयों का उपयोग करने में कठिनाई का सामना करना पड़ेगा।) लम्बाई मापने के लिए उचित मानक इकाइयों (सेंटीमीटर और मीटर) और उपकरणों को जानते हैं और उनका उपयोग करते हैं।

तालिका-1 : स्रोत https://ncert.nic.in/pdf/focus-group/NCF-SE_2023EN.pdf

नोट : तालिका में दिए गए अधिगम प्रतिफल एलिमेंट्री स्कूल लर्निंग आउटकम्स (2017) से लिए गए हैं, जो https://www.ncert.nic.in/learning-outcome.php?ln=en पर उपलब्ध हैं।

पाठ की शुरुआत में, मैंने विद्यार्थियों के पूर्व ज्ञान की जाँच की। मैंने पाया कि कक्षा के 95% विद्यार्थी लम्बाइयों की तुलना कर सकते थे, वस्तुओं को सबसे छोटी से सबसे लम्बी/ऊँची तक छाँट सकते थे और वस्तुओं को लम्बाई के बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित कर सकते थे।

की-वर्ड : *मापन, लम्बाई, मानक और ग़ैर-मानक इकाइयाँ, सामान्य त्रुटियाँ, उपचारात्मक शिक्षण*

हमने एक हैंड्स-ऑन गतिविधि से शुरुआत की। विद्यार्थियों के प्रत्येक जोड़े को एक गतिविधि शीट (**चित्र-1** देखें) और सेफ्टी पिन का एक डिब्बा दिया गया। उन्हें पहले अपने बित्ते का उपयोग करके अपनी मेज़ की लम्बाई मापनी थी और अपने निष्कर्षों को **चित्र-1** की **तालिका-I** में दर्ज करना था। फिर उन्हें सेफ्टी पिनों का उपयोग करके उसी लम्बाई को मापना था और अपने निष्कर्षों को **तालिका-II** में दर्ज करना था। मैंने ऊँचे कद वाले विद्यार्थियों को छोटे कद वाले विद्यार्थियों के साथ रखने का प्रयास किया, क्योंकि इस गतिविधि में ग़ैर-मानक इकाइयों का उपयोग किया गया था।

विद्यार्थी/ शिक्षक	**मेज़ की लम्बाई**
सीमा	____ बित्ते
अहोम	____ बित्ते
शिक्षक	8 बित्ते

तालिका-I : बित्ते में मेज़ की लम्बाई

विद्यार्थी/ शिक्षक	**मेज़ की लम्बाई**
सीमा	____ सेफ्टी पिन
अहोम	____ सेफ्टी पिन
शिक्षक	22 सेफ्टी पिन

तालिका-II : सेफ्टी पिन में मेज़ की लम्बाई

चित्र-1 : गतिविधि शीट

विद्यार्थी यह देख पाए कि भले ही वे एक ही मेज़ को माप रहे थे, लेकिन उनके और उनके साथी के बित्ते की संख्या में अन्तर था। हालाँकि, सेफ्टी पिनों की संख्या में कोई अन्तर नहीं था, बशर्ते मापन सही ढंग से किया गया हो। (इस गतिविधि में कुछ ग़लतियाँ भी हुईं, मैंने इनका उपयोग यह दिखाने के लिए कर लिया कि ग़लतियाँ कैसे हो सकती हैं।)

गतिविधि के दोनों भागों में, हमने ग़ैर-मानक इकाइयों [non-standard units (NSU)] का उपयोग किया। लेकिन अन्तर यह था कि सेफ्टी पिनों के रूप में ग़ैर-मानक इकाई समान थी और बित्ते के रूप में असमान थी। कक्षा समान इकाइयों के माध्यम से ग़ैर-मानक इकाइयों से मानक इकाइयों [standard units (NSU)] की ओर बढ़ रही थी।

विद्यार्थी/ शिक्षक	**मेज़ की लम्बाई**
सीमा	11 बित्ते
अहोम	10 बित्ते
शिक्षक	8 बित्ते

तालिका-I : बित्ते में मेज़ की लम्बाई

विद्यार्थी/ शिक्षक	**मेज़ की लम्बाई**
सीमा	22 सेफ्टी पिन
अहोम	22 सेफ्टी पिन
शिक्षक	22 सेफ्टी पिन

तालिका-II : सेफ्टी पिन में मेज़ की लम्बाई

चित्र-2 : विद्यार्थियों/ शिक्षक द्वारा भरी गई गतिविधि शीट

दोनों गतिविधियों में, मापने के बाद, यदि वस्तु की लम्बाई का सिरा एक बित्ते या एक पूरी सेफ्टी पिन की लम्बाई से कम रहा, तो अधिकांश विद्यार्थी भ्रमित हो गए। उन्होंने 'साढ़े पाँच सेफ्टी पिन' जैसे माप लिखे।

चित्र-3 पर विचार करें। पेन **क** और **ख** दोनों की लम्बाइयों को 'साढ़े तीन सेफ्टी पिन' के रूप में मापा गया था, लेकिन जब दोनों पेन को साथ में रखकर उनकी लम्बाई की तुलना की गई, तो दोनों की लम्बाई वास्तव में बराबर नहीं थी।

चित्र-3 : क और ख की तुलना।

उस समय, मुझे इस बात को विद्यार्थियों के सामने प्रश्न के रूप में ही छोड़ना पड़ा। सेफ्टी पिन में उप-इकाइयाँ नहीं होती हैं और इसलिए माप में सटीकता नहीं आ सकती है, लेकिन इस बात को मैं मानक इकाइयों से परिचय के बाद ही समझा सकता था।

मानक इकाइयाँ

अब मानक इकाइयों की बारी थी। हमने **चित्र-4** में दिखाए गए एक 'लॉन्ग' (Long) से शुरुआत की।

चित्र-4 : एफएलयू (स्वाती सरकार का फ्लैट्स लॉन्स यूनिट्स) से फ्लैट या लॉन्ग

मेरे पास ठीक 1 सेंटीमीटर माप की वर्गाकार-ग्रिड वाली कॉपियाँ थीं। आमतौर पर, ऐसी कॉपियों में ग्रिड का आकार बड़ा होता है। मैंने इसके खाली पन्नों की शीट से 'लॉन्ग' बनाए। वैकल्पिक रूप से, डीन्स ब्लॉक्स (Dienes' Blocks) का उपयोग किया जा सकता है क्योंकि वह डिज़ाइन से ही एक आदर्श 1 सेंटीमीटर ग्रिड है। यदि ऐसे ब्लॉक उपलब्ध नहीं हैं, तो कार्ड/बॉक्स/सख़्त काग़ज़ से 10 सेमी × 1 सेमी की पट्टियाँ आसानी से बनाई सकती हैं। प्रत्येक खाने के लिए 1 सेमी × 1 सेमी वर्ग का उपयोग करने से मानक इकाइयों को अच्छी तरह से दिखाया जा सकता है।

हमने विद्यार्थियों से कहा कि वे इस टीएलएम का उपयोग करके क्रेयॉन, शार्पनर, रबर और पेंसिल जैसी विभिन्न वस्तुओं को मापें। उन्हें लाइनों के बीच के अन्तर को गिनकर मापना था।

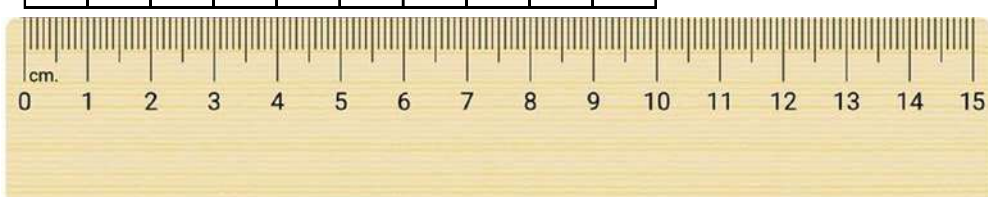
इसके बाद लॉन्ग पर संख्याएँ (1 से 10) अंकित की गईं और विद्यार्थियों से लॉन्ग और पैमाना दोनों से वस्तुओं को मापने के लिए कहा गया।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

चित्र-5 : संशोधित लॉन्ग या टेन (दस)

बाद में, एक पैमाने को लॉन्ग से जोड़ा गया है **(चित्र-6)**।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

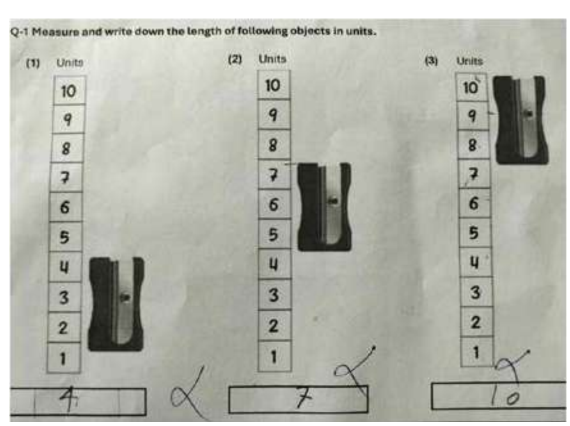


स्रोत : https://shutr.bz/49BNGjf

चित्र-6 : लॉन्ग 10 सेंटीमीटर का पैमाना बन जाता है

चुनौतियाँ जिनका मुझे सामना करना पड़ा

1. विद्यार्थियों ने ग़ैर-मानक इकाइयों के साथ कठिनाई महसूस की। गतिविधि के इस हिस्से में अपेक्षा से अधिक समय लगा।
2. जब पैमाना या स्केल दिया गया तो विद्यार्थी भ्रमित थे, विशेष रूप से इस बात को लेकर कि मापन 1 सेंटीमीटर से शुरू होना चाहिए या 0 सेंटीमीटर के निशान से।
3. विद्यार्थी यह नहीं समझ पाए कि वस्तु को खिसकाने पर उसकी लम्बाई नहीं बढ़ती है, जैसा कि **चित्र-7** में दिखाया गया है।



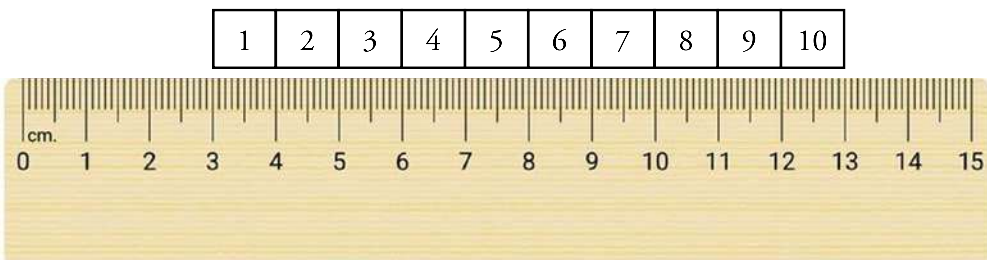
चित्र-7 : किसी वस्तु की लम्बाई के बारे में भ्रम

मुझे एहसास हुआ कि लॉन्ग पर बने वर्गों को नम्बर देने के तरीक़े की वजह से एक गलती हो गई थी।

सम्पादक की टिप्पणी : इस बिन्दु पर निम्नलिखित स्पष्टीकरण की आवश्यकता थी :

- वर्ग 1 पैमाने पर 0 से शुरू होता है और 1 पर समाप्त होता है। इसलिए, इस वर्ग की एक भुजा की लम्बाई पैमाने पर 0 और 1 के बीच के अन्तर के बराबर है।
- वर्ग 2 पैमाने पर 1 से शुरू होता है और 2 पर समाप्त होता है। इसलिए, इन 2 वर्गों की लम्बाई पैमाने पर 0 और 2 के बीच के अन्तर के बराबर है।
- इसी प्रकार, 1-5 वर्गों की लम्बाई पैमाने पर 0 और 5 के बीच के अन्तर के बराबर है।
- और सभी 10 वर्गों की लम्बाई पैमाने पर 0 और 10 के बीच के अन्तर के बराबर है।
- इसलिए, हमें पैमाने पर 0 से शुरू करना होगा।

इस बात पर चर्चा करना भी महत्त्वपूर्ण था कि यदि हम किसी वस्तु को पैमाने पर खिसकाते हैं तो उसकी लम्बाई क्यों नहीं बदलती है। उदाहरण के लिए, **चित्र-8** देखें।



चित्र-8

यह 10 वर्गों की वही पट्टी है। इसलिए, लम्बाई समान होनी चाहिए। लेकिन अब यह पैमाने पर 3 और 13 के बीच के अन्तर से मेल खाती है। ध्यान दें कि पैमाने पर 0 और 13 के बीच ऐसे 13 अन्तराल (0 से 1, 1 से 2... 12 से 13) हैं और 0 और 3 के बीच ऐसे 3 अन्तराल हैं। अब, 3 और 13 के बीच के 10 अन्तराल बिल्कुल पट्टी के साथ चलते हैं। इसलिए, हम 13 अन्तरालों में से पहले 3 अन्तरालों को छोड़ देते हैं (या उन्हें बाहर निकाल देते हैं)। इसलिए, हमें पट्टी की लम्बाई प्राप्त करने के लिए 13 में से 3 को घटाना होगा, अर्थात, पट्टी की लम्बाई 13 सेमी - 3 सेमी = 10 सेमी है।

निष्कर्ष

एक वयस्क के नाते, जो सालों से लम्बाइयों को मापने का आदी है, मेरे लिए यह अनुमान लगाना एक चुनौती थी कि विद्यार्थियों को इस कौशल के साथ क्या कठिनाइयाँ होती हैं। यही कारण था कि मैंने इस पाठ को पूरा करने के लिए कम समय का अनुमान लगाया था। लेकिन मुझे ख़ुशी है कि मैं इन ख़ास कठिनाइयों को पहचान पाया और विद्यार्थियों को व्यावहारिक व पेन और पेपर वाले, दोनों तरह के अभ्यास दिए, जिन्होंने कक्षा में सामने आई कठिनाइयों का समाधान किया। अकसर, ऐसी वर्कशीट खोजना मुश्किल होता है जो विद्यार्थियों के एक ख़ास समूह में देखी गई कठिनाइयों का समाधान करती हो। लेख के बाद आगे दी गई वर्कशीट क्षमा चक्रवर्ती द्वारा इसी उद्देश्य से डिज़ाइन की गई है। प्रश्नों के नीचे दिए गए नोट्स उनके पीछे की सोच को स्पष्ट करते हैं। ऐसे और प्रश्न बनाने के लिए उपयोगी सुझाव भी दिए गए हैं।

जीवेश पंचभाई अज़ीम प्रेमजी स्कूल, उत्तरकाशी में काम करते हैं। उन्होंने 2018 में एमएससी करने के बाद 2022 में एचएनबी गढ़वाल विश्वविद्यालय से बीएड किया है। उनका उद्देश्य अपनी कक्षा-3 के विद्यार्थियों के लिए आनन्ददायक संसाधन और गतिविधियाँ बनाना और उन्हें इबारती सवालों को हल करने की कला में महारत हासिल करने में मदद करना है। उनसे jivesh.panchbhai@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

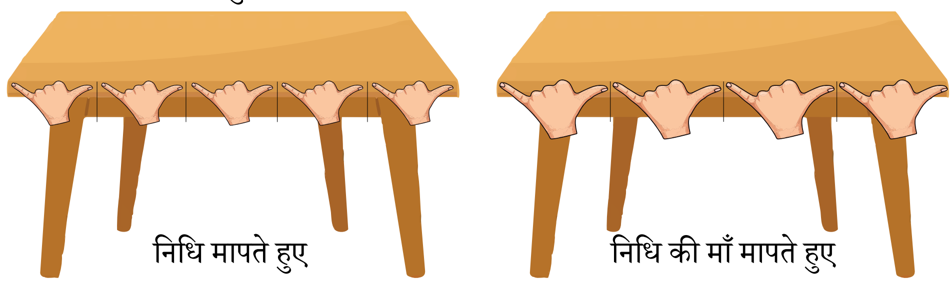
अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

वर्कशीट

मापन

क्षमा चक्रवर्ती

1. निधि और उसकी माँ बित्ते से एक ही मेज़ की लम्बाई मापने की कोशिश कर रही हैं **चित्र-1** । उन दोनों की माप अलग-अलग आई, ऐसा क्यों हुआ होगा?



चित्र-1

(क) वे सही मापन नहीं कर रही हैं

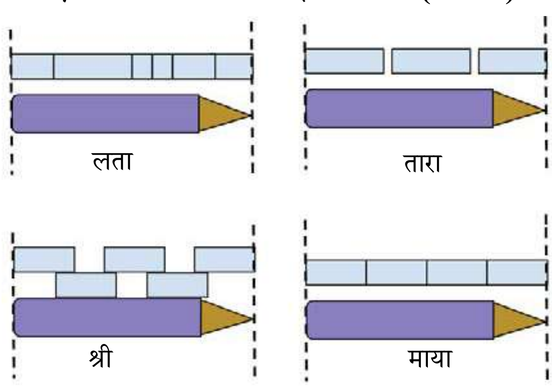
(ख) निधि का बित्ता उसकी माँ के बित्ते से छोटा है

(ग) निधि का बित्ता उसकी माँ के बित्ते से बड़ा है

(घ) उनमें से किसी एक ने गिनने में ग़लती की है

नोट : यह प्रश्न ग़ैर-मानक इकाइयों पर आधारित है। इसके विकल्प उन शंकाओं पर आधारित हैं जो आमतौर पर कक्षा में देखी जाती हैं। यह इस बात को पुख़्ता करता है कि एक बित्ता (या इसी तरह की ग़ैर-मानक असमान इकाइयाँ) विश्वसनीय या 'सार्वभौमिक' नहीं होती हैं। रोज़मर्रा के जीवन का सन्दर्भ विद्यार्थियों को स्वयं यह जाँचने का मौक़ा देता है कि कैसे एक ही लम्बाई को (सटीक रूप से) मापने पर अलग-अलग उत्तर भी मिल सकते हैं।

2. चार मित्र रबर का उपयोग करके एक ही पेंसिल की लम्बाई माप रहे हैं **(चित्र-2)**। किसने इसे सही ढंग से मापा?



चित्र-2

(क) केवल माया

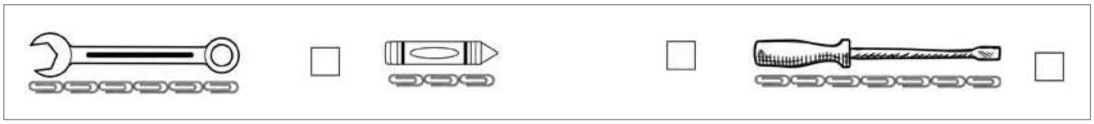
(ख) लता और माया

(ग) केवल तारा

(घ) सभी ने

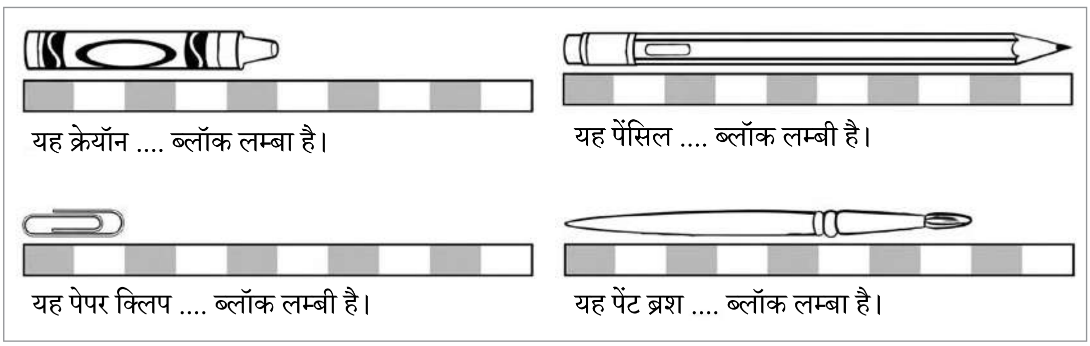
नोट : यह प्रश्न ग़ैर-मानक इकाइयों (यहाँ रबर) का उपयोग करके लम्बाई मापने की समझ की जाँच करता है। यह बात महत्त्वहीन है कि अलग-अलग आकारों की रबर का उपयोग किया गया है, क्योंकि प्रश्न में पेंसिल की लम्बाई नहीं पूछी गई है। प्रश्न ग़ैर-मानक इकाइयों से मापन पर ध्यान केन्द्रित करता है। ग़ैर-मानक इकाइयों से मापने के लिए तीन प्रमुख बिन्दुओं को ध्यान में रखना आवश्यक है – (1) दोहराई जाने वाली इकाई समान लम्बाई की होनी चाहिए, (2) इकाइयों को एक-दूसरे के ऊपर नहीं चढ़ना चाहिए, (3) उनके बीच कोई अन्तर नहीं होने चाहिए। और ज़ाहिर है, वस्तु (पेंसिल) और इकाई (रबर) दोनों के शुरुआती और अन्तिम बिन्दु एक सीध में होने चाहिए। इन सामान्य सावधानियों को ध्यान में रखते हुए कई प्रश्न तैयार किए जा सकते हैं।

3. प्रत्येक वस्तु कितने पेपर क्लिप लम्बी है? अपना उत्तर प्रत्येक वस्तु के आगे बने खाने में लिखें।



चित्र-3

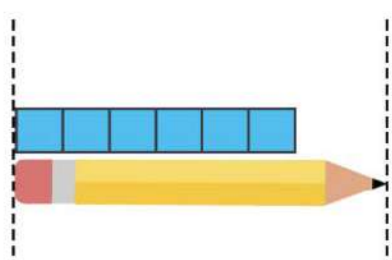
4. प्रत्येक वस्तु कितने ब्लॉक लम्बी है?



चित्र-4

नोट : प्रश्न-3 और 4 सामान्य अभ्यास प्रश्न हैं जिनमें मापन की एक ग़ैर-मानक समान इकाई (यहाँ एक पेपर क्लिप या ब्लॉक) का उपयोग करके मापन किया जाना है। प्रश्न-3 में अलग-अलग वस्तुओं से प्रश्न-4 में एक निरन्तरता की ओर बढ़ने के क्रम पर ध्यान दें जो एक पैमाने की ओर ले जाता है। यह एनसीईआरटी कक्षा-3 की पुरानी पाठ्यपुस्तक (अँग्रेज़ी) के अध्याय-4 के पृष्ठ-48 से प्रेरित है।

5. सुनील ने एक पेंसिल की लम्बाई मापने के लिए उसके साथ 6 ब्लॉक रखे। इसे पूरी तरह मापने के लिए उसे कितने और ब्लॉकों की आवश्यकता है?



चित्र-5

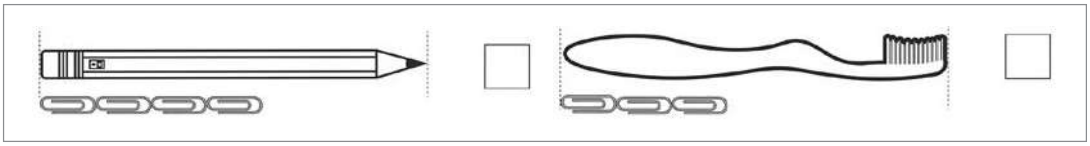
(क) 2 (ग) 4

(ख) 6 (घ) 8

नोट : एनसीईआरटी कक्षा-3 की पुरानी पाठ्यपुस्तक (अँग्रेज़ी) के अध्याय-4, पृष्ठ-47 से प्रेरित, इस प्रश्न के लिए अनुमान लगाने के कौशल की आवश्यकता होती है। विकल्प **ख** चुनने वाले विद्यार्थियों ने शायद प्रश्न को सही ढंग से न समझा हो और उन ब्लॉकों की संख्या को गिन लिया जो वे चित्र में देख रहे हैं, जबकि विकल्प **घ** चुनने वाले विद्यार्थियों ने पेंसिल की लम्बाई मापने वाले ब्लॉकों की कुल संख्या को गिन लिया होगा और वे यह समझने में असफल रहे कि प्रश्न में क्या पूछा गया था।

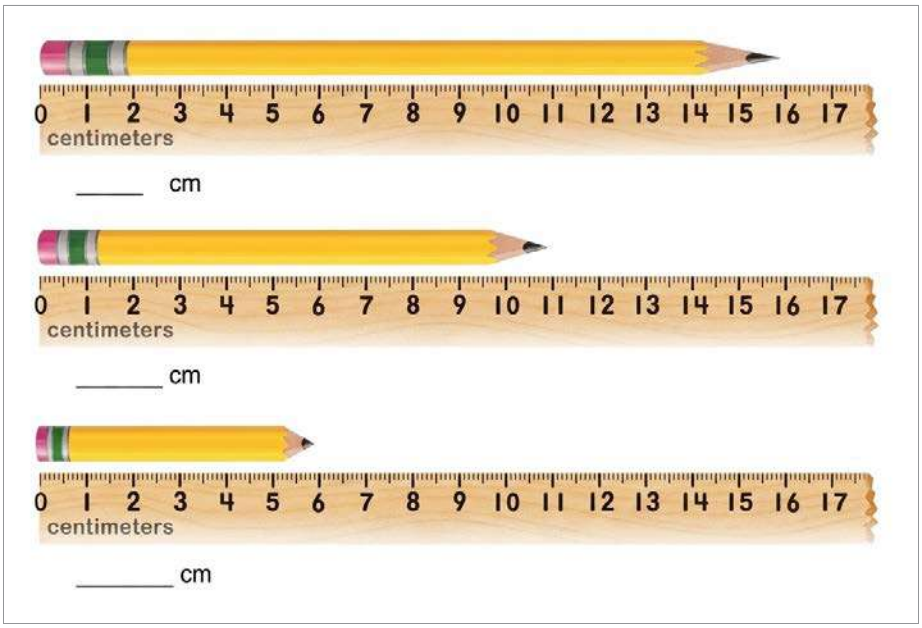
प्रश्न-6 में फिर से अनुमान लगाने की आवश्यकता है।

6. पेपर क्लिपों को ध्यान में रखते हुए प्रत्येक वस्तु की लम्बाई का अनुमान लगाएँ। अनुमान लगाने में आपकी सहायता के लिए कुछ क्लिपें रखी गई हैं।



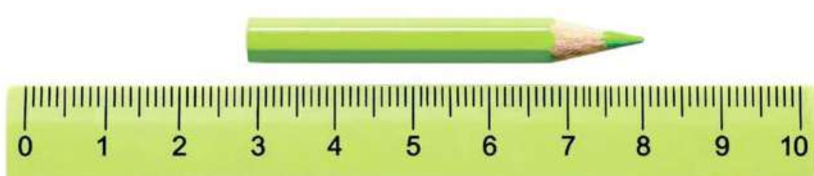
चित्र-6

7. प्रत्येक पेंसिल की लम्बाई कितनी है?



चित्र-7

8. कौन-सा विकल्प रंगीन पेंसिल की लम्बाई के सबसे क़रीब है?



चित्र-8

(क) 8 सेमी (ग) 5 सेमी

(ख) 6 सेमी (घ) 3 सेमी

नोट : प्रश्न-7 और 8 पैमाने का उपयोग करके मापन करने की विद्यार्थी की वास्तविक समझ का परीक्षण करते हैं। पैमाने का उपयोग करके लम्बाई मापने वाले प्रश्न प्रायः वस्तु को 0 के निशान पर रखते हैं। इससे विद्यार्थियों के मन में वैकल्पिक धारणाएँ विकसित हो सकती हैं और वे वस्तु को मापने के तरीक़े के बारे में ग़लत सामान्यीकरण कर सकते हैं। प्रश्न-8 का सबसे आम उत्तर विकल्प **क** है, जहाँ वे लम्बाई निर्धारित करने के लिए महत्त्वपूर्ण शुरुआती बिन्दु पर ध्यान दिए बिना आँखें मूँदकर पेंसिल के अन्तिम बिन्दु को देखते हैं। विकल्प **ख** चुनने वाले विद्यार्थी शुरुआती और अन्तिम बिन्दु के बीच की रेखाओं की संख्या गिनते हैं, जबकि विकल्प **घ** चुनने वाले केवल शुरुआती बिन्दु को देखते हैं।

9. आयरा के पास एक टूटा हुआ पैमाना है, जिससे वह अपनी पेंसिल की लम्बाई मापना चाहती है। वह इसे नीचे दिखाए अनुसार रखती है। पेंसिल की लम्बाई कितनी है?

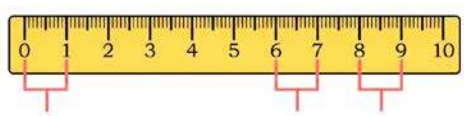
चित्र-9

(क) 4 सेमी (ख) 5 सेमी (ग) 7 सेमी (घ) लम्बाई मापी नहीं जा सकती

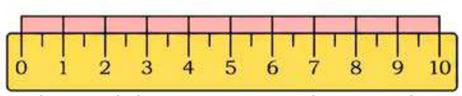
नोट : प्रश्न-9 पिछले प्रश्न के समान है, लेकिन यहाँ पैमाना टूटा हुआ है, जिसका अर्थ है कि शुरुआत के कुछ अंक ग़ायब हैं। विकल्प **ख** चुनने वाले विद्यार्थी सम्भवतः शुरुआती बिन्दु से अन्तिम बिन्दु तक की रेखाओं की संख्या गिन रहे हैं और वे स्पष्ट रूप से इस बात को समझने से चूक रहे हैं कि 2 रेखाओं के बीच की दूरी एक इकाई के रूप में गिनी जाती है। विकल्प **ग** चुनने वाला विद्यार्थी केवल अन्तिम बिन्दु को देख रहा है, क्योंकि जब हम वस्तु को 0 पर रखते हैं, तो उसकी लम्बाई अन्तिम बिन्दु के समान होती है। विद्यार्थी इस बात को समझे बिना इसका सामान्यीकरण कर लेता है कि क्रेयॉन को 'खिसकाया' गया है। विकल्प **घ** चुनने वाले विद्यार्थियों का मानना है कि लम्बाई को बीच के किसी बिन्दु से नहीं मापा जा सकता है और इसे हमेशा 0 से ही मापा जाना चाहिए (या यह कि एक टूटा हुआ पैमाना सही माप नहीं दिखा सकता है!)।

सम्पादक की टिप्पणी : वर्तमान एनसीईआरटी पाठ्यपुस्तकों में क्रम में थोड़ा बदलाव किया गया है। कक्षा-3, अध्याय-10 ग़ैर-मानक इकाइयों के साथ मापने के बहुत सारे उदाहरण देता है और केवल मीटर से परिचित कराता है। इसलिए, कक्षा-4 तक पैमाने की आवश्यकता नहीं पड़ती है, जहाँ सेंटीमीटर से परिचित कराया जाता है। कक्षा-4 के अध्याय-6 के पृष्ठ-84 पर सेंटीमीटर (सेमी) और सेमी पैमाने से मापन की शुरुआत भी इसी प्रकार की गई है। वहाँ 10 वर्गों वाली पट्टी के स्थान पर लाल पट्टियों का (**चित्र-10**) उपयोग किया गया है। विद्यार्थियों को पृष्ठ-88 पर टूटे हुए पैमाने से मापने (अर्थात, 0 से शुरू न करने) का अनुभव भी मिलता है।

इस मापक फ़ीते (मेज़रिंग टेप) को ध्यान से देखें। आप क्या देखते हैं?



चर्चा करें कि ये निशान हमें स्पष्ट रूप से मापने में कैसे मदद करते हैं।



हर लाल पट्टी की लम्बाई 1 सेमी है।

10 सेमी बनाने के लिए लाल पट्टी को 10 बार दोहराया जाता है। जब हम लाल पट्टी की लम्बाई को 100 बार दोहराते हैं, तो हमें 1 मीटर का पैमाना/फ़ीता प्राप्त होगा।

1 मीटर = 100 सेंटीमीटर

चित्र-10

References

1. NCF 2023 - https://ncert.nic.in/nep.php?ln=en
2. Math Space: FLU - https://bit.ly/3QfYDQX

क्षमा चक्रवर्ती एक शिक्षक-प्रशिक्षक हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त की है। गणित शिक्षा में 15 से अधिक वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने सामग्री विकास, शिक्षण और शिक्षक प्रशिक्षण जैसे क्षेत्रों में काम किया है, साथ ही विद्यार्थियों के साक्षात्कार आयोजित किए हैं और आकलन तैयार किए हैं। नन्हें दिमाग़ों को सँवारने के लिए उत्साहित, क्षमा को छोटे बच्चों के साथ समय बिताना और प्रकृति का आनन्द लेना पसन्द है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : भरत त्रिपाठी **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अनुज उपाध्याय

स्टार प्रॉब्लम

सुमित कुमार पाण्डेय

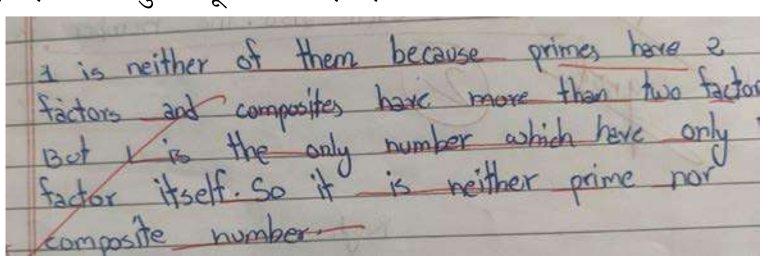
हाल ही में, मैं और मेरे विद्यार्थी एनसीईआरटी की कक्षा-6 की गणित की नई पाठ्यपुस्तक *गणित प्रकाश* का अध्याय ‘अभाज्य समय (प्राइम टाइम)’ पढ़ रहे थे। इस अध्याय में संख्याओं के विभिन्न समूहों (जैसे अभाज्य संख्याएँ, भाज्य संख्याएँ, सह-अभाज्य संख्याएँ आदि) की अवधारणाओं को समझाया गया है।

पाठ्यपुस्तक में दिए गए निर्देशों के अनुसार हमने सबसे पहले ‘इडली-वड़ा’ नामक खेल के ज़रिए गुणज पर काम किया। इसके बाद गुणनखण्ड को समझने के लिए हमने जम्प जैकपॉट संख्या रेखा गतिविधि का सहारा लिया। चूँकि विद्यार्थी कक्षा-5 में ही गुणज और गुणनखण्ड की अवधारणाओं के बारे में पढ़ चुके थे, इसलिए इन गतिविधियों के ज़रिए उन्हें इनका पुनरावलोकन और अभ्यास करने में मदद मिली। इसके बाद हमने अभाज्य संख्याओं का अध्ययन शुरू किया। इसके लिए 10×10 की संख्या तालिका का उपयोग करते हुए अध्याय में बताई गई ‘इराटोस्थेनीस की छलनी’ (Sieve of Eratosthenes) विधि से अभाज्य संख्याओं की पहचान की।

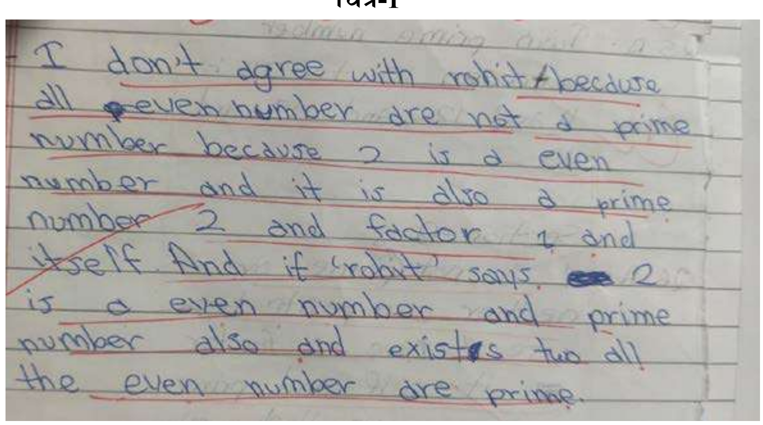
आकलन के लिए मैंने अपनी कक्षा में एक टेस्ट लिया। उसके परिणाम काफ़ी सन्तोषजनक रहे। इससे स्पष्ट हुआ कि विद्यार्थी अभाज्य संख्याओं की अवधारणा को बेहतर तरीक़े से समझ चुके थे। उन्होंने इस तरह के सवालों के जवाब बहुत अच्छी तरह से दिए –

- 1 अभाज्य संख्या है या भाज्य अथवा दोनों में से कुछ भी नहीं? कारण सहित स्पष्ट करें।
- रोहित कहता है, *“सभी सम संख्याएँ भाज्य होती हैं।”* यह कथन सही है या ग़लत? उदाहरण देकर अपने उत्तर की व्याख्या करें।

विद्यार्थियों द्वारा दिए गए उत्तरों के कुछ नमूने आगे दिए गए हैं –


1 is neither of them because primes have 2 factors and composites have more than two factor But 1 is the only number which have only factor itself. So it is neither prime nor composite number.

चित्र-1


I don't agree with rohit because all even number are not a prime number because 2 is a even number and it is also a prime number 2 and factor 1 and itself And if 'rohit' says 2 is a even number and prime number also and exists two all the even number are prime.

चित्र-2

की-वर्ड : *अभाज्य संख्याएँ, भाज्य संख्याएँ, उभयनिष्ठ गुणनखण्ड, प्रक्रियात्मक समझ, वैचारिक समझ, कला*

सह-अभाज्य (Co-prime) संख्याओं की पड़ताल

अभाज्य संख्याओं की अवधारणा को समझने के बाद हम सह-अभाज्य संख्याओं की तरफ़ बढ़े। एनसीईआरटी सुझाती है कि विद्यार्थियों को पाठ्यपुस्तक स्वयं पढ़ने के लिए प्रोत्साहित किया जाना चाहिए। यह सुनिश्चित करने के लिए मैंने विद्यार्थियों से पृष्ठ संख्या 115 पढ़ने को कहा, जहाँ जम्प जैकपॉट खेल का संशोधित स्वरूप दिया गया है।

इस गतिविधि में दो संख्याओं पर ख़ज़ाना रखा गया है। जम्पी को यह ख़ज़ाना केवल तभी मिल सकता है, जब वह एक ही साइज़ का जम्प लगाकर दोनों संख्याओं तक पहुँच सके। हालाँकि '1 साइज़' का जम्प लगाने की अनुमति नहीं है। विद्यार्थियों से पूछा गया था कि ग्रम्पी को ख़ज़ाना कहाँ रखना चाहिए, ताकि जम्पी अधिकतम किसी एक ख़ज़ाने तक ही पहुँच सके। दिए गए उदाहरण में ख़ज़ाने 12 एवं 36 के बजाय 4 एवं 9 पर रखे गए हैं, और यह मान लिया गया है कि ग्रम्पी इस तरह जीत जाएगा।

इस खेल के कुछ राउंड होने के बाद विद्यार्थियों को सह-अभाज्य संख्याओं की अवधारणा समझाई गई। इसके अनुसार, *"वे दो संख्याएँ जिनका 1 के अलावा कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड (common factor) नहीं होता, सह-अभाज्य होती हैं।"* कई विद्यार्थियों ने ग्रम्पी की जीत की रणनीति को इस परिभाषा से तुरन्त जोड़ लिया, लेकिन कुछ अब भी इसे लेकर आश्वस्त नहीं थे।

अगले दिन हमने एक अलग तरह की गतिविधि पर काम किया। इसके लिए पाठ्यपुस्तक में 'सह-अभाज्य कला' शीर्षक के तहत कुछ दिशा-निर्देश दिए गए थे। यह गतिविधि स्टार प्रॉब्लम शीटों पर आधारित थी। इन शीटों में एक निश्चित संख्या वाले बिन्दुओं के साथ एक वृत्ताकार संख्या रेखा बनी होती है। गतिविधि शुरू करने से पहले मैंने विद्यार्थियों को और भी विस्तार से निम्नलिखित निर्देश दिए –

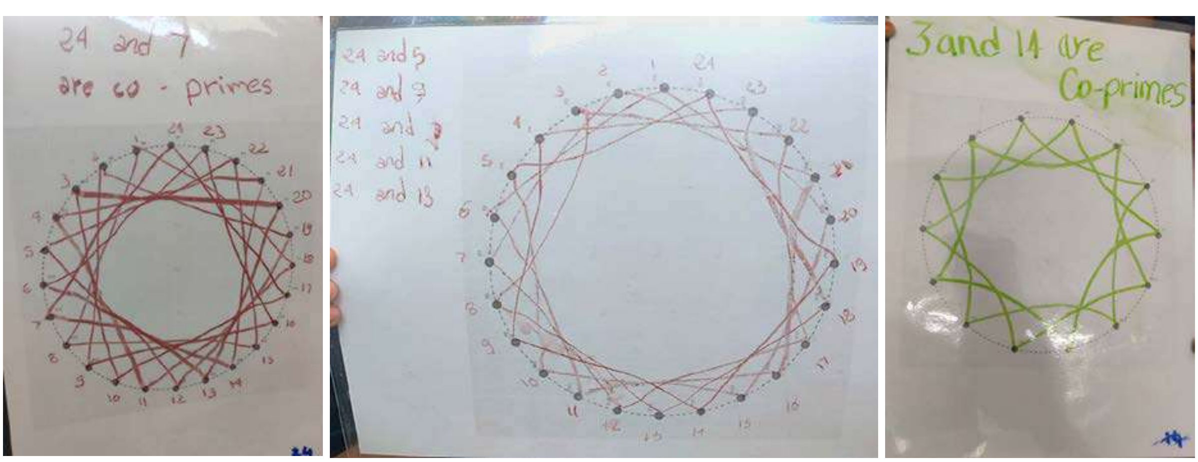
- वृत्त पर बने बिन्दुओं की कुल संख्या को अपनी पहली संख्या मानें।
- अब पहली संख्या से छोटी कोई भी दूसरी संख्या चुनें (इसे 'm' मान लेते हैं)।
- पहली संख्या से शुरुआत करते हुए 'm' के बराबर समान दूरी के जम्प लगाकर वृत्त के चारों ओर बिन्दुओं को क्रमशः जोड़ते जाएँ।
- इस प्रक्रिया को तब तक दोहराएँ जब तक कि

  केस-1 : बनने वाला पैटर्न किसी बिन्दु को छोड़े बग़ैर सभी बिन्दुओं को आपस में जोड़ न ले।

  केस-2 : सभी बिन्दुओं को जोड़ने से पहले ही पैटर्न बनना रुक जाए या ख़ुद को दोहराने लगे।

  निष्कर्ष : यदि केस-1 बनता है तो संख्याएँ सह-अभाज्य हैं। लेकिन यदि जम्प बीच में ही रुक जाएँ या किसी निश्चित क्रम में बार-बार दोहराने लगें (केस-2), तो इसका मतलब है कि वे दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य नहीं हैं।

विद्यार्थी निर्देशों को समझ गए, और उन्होंने समूहों में काम करना शुरू कर दिया। उनके काम के कुछ नमूने आगे दिए गए हैं।



चित्र-3 : किए गए काम के कुछ नमूने

मगर मुझे जल्द ही इस बात का एहसास हो गया कि विद्यार्थी भले ही गतिविधि को कर पा रहे थे, लेकिन वे इसके पीछे के गणितीय तर्क से अवगत नहीं थे। अत: इस लेख के शेष भाग में एक ऐसा अन्वेषण कार्य तैयार किया गया है, जो इस गतिविधि के ज़रिए विद्यार्थियों की समझ को और परिपक्व करने में मदद करेगा।

स्टार प्रॉब्लम गतिविधि विद्यार्थियों को गति और पैटर्न के माध्यम से सह-अभाज्य संख्याओं की पड़ताल करने का अवसर देती है। इस पड़ताल को और गहन करने के लिए उनसे कहा गया कि वे बिन्दुओं की संख्या और जम्प साइज़ में बदलाव करने पर नज़र आने वाले परिवर्तनों को ध्यानपूर्वक दर्ज करें।

उदाहरण के लिए, 6 बिन्दुओं वाले एक वृत्त पर विचार करें। हम एक बिन्दु से शुरुआत करते हैं, और समान संख्या के चरणों में जम्प लगाते हैं। इस बार जम्प की दिशा दर्शाने के लिए तीरों का इस्तेमाल किया गया है। नीचे दिए गए चित्र दिखाते हैं कि अलग-अलग साइज़ में जम्प लगाने पर क्या स्थिति बनती है।

चित्र-4

यहाँ विद्यार्थी देख सकते हैं कि जम्प के कुछ साइज़ ऐसे हैं जिनसे चलते हुए सभी बिन्दुओं तक पहुँचा जा सकता है, जबकि कुछ मामलों में पथ सभी बिन्दुओं तक नहीं पहुँच पाता है, और ख़ुद को दोहराने लगता है।

इसके लिए एक अवलोकन शीट (**तालिका-1**) का उपयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए इसकी कुछ शुरुआती पंक्तियाँ पहले से भरी हुई हैं।

अवलोकन शीट : वृत्त पर पैटर्नों का अन्वेषण

वृत्त पर बिन्दुओं की कोई एक संख्या चुनें। इसके बाद एक जम्प साइज़ चुनें, और हर बार उतनी ही दूरी का जम्प लगाते हुए बिन्दुओं को जोड़ते जाएँ। जम्प की दिशा को भी लिखें। इसके बाद अपने अवलोकनों को दर्ज करें।

वृत्त पर बिन्दुओं की संख्या	जम्प का साइज़	क्या पैटर्न सभी बिन्दुओं तक पहुँचता है?	जितने बिन्दुओं तक पहुँचा, उनकी संख्या	जोड़े गए दो बिन्दुओं के बीच का अन्तर	क्या यह तालिका की किसी अन्य आकृति से मिलती है?
6	1	हाँ	6	1	जम्प साइज़ 5 से वैसी ही आकृति बनती है, लेकिन विपरीत दिशा में।
	2	नहीं	3	2	जम्प साइज़ साइज़ 4 से वैसी ही आकृति बनती है, लेकिन विपरीत दिशा में।
	3	नहीं	2	3	कोई भी नहीं
7	1				
	2				
	3				
8					

तालिका-1

कुछ और उदाहरण देने के बाद विद्यार्थी निम्नलिखित प्रश्नों पर चर्चा कर सकते हैं :

1. 6 बिन्दुओं वाले वृत्त में अलग-अलग जम्प के साइज़ के लिए :
   - कौन-से जम्प साइज़ों में आप प्रत्येक बिन्दु तक पहुँच पाए?
   - संख्या 6 और ऐसी ही अन्य संख्याओं के बीच क्या सम्बन्ध है?
   - किन जम्प साइज़ों के कारण रास्ता एक ही सर्किट को बार-बार दोहराने लगता है?
   - संख्या 6 और इन संख्याओं के बीच क्या सम्बन्ध है?
2. तुलना करें :
   - 6 बिन्दुओं वाला वृत्त जिसमें जम्प साइज़ 1 है।
   - 6 बिन्दुओं वाला वृत्त जिसमें जम्प साइज़ 5 है।
3. बताएँ कि इनमें क्या समानता है? इनमें क्या अन्तर है?
4. निम्नलिखित स्थितियों में आपने कौन-से पैटर्न देखे –
   - 5 बिन्दुओं वाला वृत्त
   - 7 बिन्दुओं वाला वृत्त
   - 8 बिन्दुओं वाला वृत्त
   - 9 बिन्दुओं वाला वृत्त
5. जब पथ सभी बिन्दुओं तक नहीं पहुँचता है, तब :
   - इस प्रक्रिया में आपस में जोड़े गए किन्हीं भी दो बिन्दुओं के बीच की सबसे छोटी दूरी (या अन्तर) क्या है?
   - अब अलग-अलग बिन्दुओं से शुरुआत करके देखें। इस स्थिति में बिन्दुओं के कितने अलग-अलग समूह बनते हैं?
6. जब जम्प साइज़ जोड़े गए किन्हीं भी दो बिन्दुओं के बीच के सबसे छोटे अन्तर के बराबर हो :
   - जब हमारे पास 6 बिन्दु हों तो किन-किन जम्प साइज़ों में ऐसा होता है?
   - जब हमारे पास 8, 10 या 12 बिन्दु हों तो वे अलग-अलग कौन-से जम्प साइज़ हैं जिनके लिए ऐसा होता है?
   - जब हमारे पास 24 बिन्दु हों तो क्या आप उन जम्प साइज़ों का अनुमान लगा सकते हैं जिनके लिए ऐसा होगा?
7. वास्तव में पैटर्न बनाने से पहले क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि यदि बिन्दुओं की संख्या 10, 11 या 12 हो तो अलग-अलग जम्प साइज़ के लिए क्या स्थिति बनेगी?

इस गतिविधि के बाद मैंने विद्यार्थियों की एक जोड़ी को चुना, जिन्होंने 15 बिन्दुओं और 2 के जम्प साइज़ों पर काम किया था। उन्हें इस बात का पूरा यक़ीन था कि 15 और 2 सह-अभाज्य संख्याएँ हैं, क्योंकि सभी बिन्दु आपस में जुड़ चुके थे। लेकिन जब उनसे यह समझाने के लिए कहा गया कि ऐसा क्यों है, तो वे चुप रहे। तब मैंने अवलोकन दर्ज करने के दूसरे दौर के माध्यम से उनके विचारों को दिशा दी। इस बार उन्होंने बिन्दुओं पर संख्याएँ लिखीं। जम्प अन्तिम बिन्दु से शुरू हुआ (जिस पर लिखी संख्या, वृत्त पर बने बिन्दुओं की कुल संख्या के बराबर थी)। उन्होंने अपने अवलोकनों को **तालिका-2** में दर्ज किया।

वृत्त पर बिन्दुओं की संख्या	जम्प साइज़	जोड़े गए बिन्दुओं की संख्या और उनके बीच का अन्तर	उन बिन्दुओं की संख्या, जिन्हें जोड़ा न जा सका	अवलोकन
15	3	3, 6, 9, 12, 15 अन्तर 3	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14	आपस में जुड़े हुए सभी बिन्दु 3 के गुणज हैं। 15 भी 3 का एक गुणज है। इनके बीच का अन्तर 3 है, जो संख्या 3 और 15 का एक उभयनिष्ठ गुणनखण्ड है।
15	6	6, 12, 3, 9, 15 अन्तर 3	1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14	आपस में जुड़े हुए सभी बिन्दु 3 के गुणज हैं। 6 और 15, दोनों 3 के गुणज हैं।
15	2	2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 अन्तर 1		सभी बिन्दु आपस में जुड़ गए हैं। 15 और 2 के बीच एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 1 है। 1 का अन्तर ही एकमात्र उभयनिष्ठ गुणनखण्ड देता है। 15 और 2 सह-अभाज्य हैं।

तालिका-2

इसके बाद विद्यार्थियों को समझ में आने लगा कि बिन्दुओं के बीच का अन्तर ही उन दोनों संख्याओं के उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को दर्शाता है। जब दो संख्याओं का कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड नहीं होता, तब प्रत्येक बिन्दु इस शृंखला का हिस्सा बन जाता है। ऐसी दोनों संख्याएँ सह-अभाज्य होंगी।

अपने अवलोकनों के आधार पर वाक्य पूरे करें :

- कोई पथ प्रत्येक बिन्दु तक तब पहुँचता है, जब ____________।
- जुड़े हुए बिन्दुओं के बीच का सबसे छोटा अन्तर ____________ के बारे में जानकारी देता है।
- जिन बिन्दुओं तक पहुँचा जाता है, उनकी संख्या _____________ पर निर्भर करती है।
- **अतिरिक्त प्रश्न :** यदि जम्प साइज़ को बदलकर कुल बिन्दुओं की संख्या में से जम्प साइज़ घटा दिया जाए तो ____________।
- किसी पैटर्न में बिन्दुओं के बीच का सबसे छोटा अन्तर जम्प साइज़ के बराबर तभी और केवल तभी होता है, जब __________।

गतिविधि में इस विस्तार से विद्यार्थी सिर्फ़ पैटर्न बनाने तक सीमित नहीं रह जाते हैं, बल्कि उनमें निहित गणितीय सम्बन्धों को भी समझ पाते हैं। पूरे किए गए वाक्यों से विद्यार्थियों को अवलोकन करने और अनुमान लगाने में मदद मिलेगी।

- कोई पथ प्रत्येक बिन्दु तक तब पहुँचता है, जब बिन्दुओं की संख्या और जम्प साइज़ को दर्शाने वाली संख्या का कोई भी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड न हो।

- जुड़े हुए बिन्दुओं के बीच का सबसे छोटा अन्तर इन दोनों संख्याओं के किसी उभयनिष्ठ गुणनखण्ड के बारे में जानकारी देता है।
- जिन बिन्दुओं तक पहुँचा जाता है, उनकी संख्या बिन्दुओं की संख्या और जम्प साइज़ को दर्शाने वाली संख्या के उभयनिष्ठ गुणनखण्डों पर निर्भर करती है।
- **अतिरिक्त प्रश्न :** यदि जम्प साइज़ को बदलकर कुल बिन्दुओं की संख्या में से जम्प साइज़ घटा दिया जाए तो जिन बिन्दुओं तक पहुँचा जाता है, वे वही रहते हैं लेकिन दिशा उलट जाती है।
- किसी पैटर्न में बिन्दुओं के बीच का सबसे छोटा अन्तर जम्प साइज़ के बराबर तभी और केवल तभी होता है, जब जम्प साइज़ बिन्दुओं की संख्या का एक गुणनखण्ड हो। अतः दो संख्याओं का महत्तम समापवर्तक (HCF) उन्हीं में से एक संख्या के बराबर केवल तभी होता है, जब उन दोनों में से छोटी संख्या दूसरी संख्या का एक गुणनखण्ड हो।

केवल किसी निश्चित कलात्मक गतिविधि के आधार पर संख्याओं के जोड़ों को सह-अभाज्य या ग़ैर सह-अभाज्य के रूप में परिभाषित करने के बजाय इस प्रकार की अन्वेषणात्मक गतिविधियों के माध्यम से गुणनखण्ड, महत्तम समापवर्तक और सह-अभाज्य संख्याओं की समझ की मज़बूत नींव रखना अधिक बेहतर होगा। इससे विद्यार्थियों को अवलोकन करने, उन्हें दर्ज करने, निष्कर्ष निकालने, और आगे चलकर उन्हें सिद्ध करने में भी मदद मिलेगी।

आभार : लेखक महत्त्वपूर्ण सुझाव देने के लिए अजयकुमार के., स्वाती सरकार और क्षमा चक्रवर्ती के प्रति आभार व्यक्त करते हैं।

Reference

1. https://www.evidyarthi.in/wp-content/uploads/2024/08/cbse-class-6-maths-book-ganit-prakash-chapter-5-pdf-download.pdf

सुमित कुमार पाण्डेय अप्रैल, 2020 से अज़ीम प्रेमजी स्कूल, बाड़मेर में गणित के शिक्षक हैं। वे पिछले 7 साल से गणित शिक्षण के क्षेत्र में कार्यरत हैं। वे विद्यार्थियों के लिए आकर्षक और समावेशी शिक्षण परिवेश तैयार करने को लेकर हमेशा उत्सुक रहते हैं। उन्हें क्रिकेट खेलना, फ़िल्में देखना और यात्राओं के ज़रिए नई-नई जगहों का अन्वेषण करना पसन्द है। उनसे sumit.pandey@azimpremjifoundation.org पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : जयजीत अकलेचा **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल

नाचते अंक

ए. रामचन्द्रन ने विभिन्न स्रोतों से गणित की समस्याओं को एकत्रित करके उनके सेट बनाए हैं। यहाँ दी गई समस्या ऐसे ही एक सेट से ली गई है।

```
   — — —
+
   — — —
___________
 — — — —
___________
```

चुनौती यह है कि दो 3-अंकीय संख्याओं को जोड़ने पर 4-अंकों का योग प्राप्त हो। इस पूरे जोड़ में 0 से 9 तक के सभी दस अंकों का उपयोग केवल एक बार होना चाहिए।

साथ ही कोई भी 3-अंकीय संख्या या 4-अंकीय योग 0 से शुरू नहीं होना चाहिए।

चित्र-1

प्राथमिक कक्षाओं में इस प्रकार की खुली समस्याएँ (open-ended) बहुत आम नहीं हैं। यह देखा गया है कि वयस्कों को भी ऐसी समस्याओं के सही हल तक पहुँचने में कुछ समय लगता है। जब यह समस्या कक्षा-4 और 5 के विद्यार्थियों के एक समूह को अंक-कार्ड के साथ दी गई, तो अधिकांश बच्चों ने शुरुआत अनुमान लगाकर और अलग-अलग प्रयास करके की।

हम इस समस्या को यहाँ कुछ ऐसी शिक्षण-शास्त्रीय रणनीतियों के साथ प्रस्तुत कर रहे हैं, जो बच्चों में समस्या को व्यवस्थित और प्रभावी ढंग से हल करने की क्षमता विकसित करने में मदद कर सकती हैं।

इस समस्या को अंकों वाले छोटे-छोटे कार्ड या गत्ते के टुकड़ों की मदद से हल करना सबसे आसान होगा। लेख के अन्त में दिए गए टेम्पलेट का भी उपयोग किया जा सकता है। विद्यार्थी खाली स्थानों पर अलग-अलग अंक रखकर सही जोड़ बनाने का प्रयास कर सकते हैं।

समस्या को हल करने में मददगार रणनीतियाँ

1. **समस्या और उसकी शर्तों को स्पष्ट करना :** सबसे पहले यह सुनिश्चित करें कि विद्यार्थी अच्छी तरह समझ लें कि उन्हें क्या करना है और समस्या में कौन-कौन-सी शर्तें दी गई हैं। विद्यार्थी अलग-अलग अंक लगाकर प्रयास और त्रुटि (trial and error) के माध्यम से उत्तर खोज सकते हैं। इस प्रक्रिया में उन्हें यह समझने में मदद मिलेगी कि कौन-से उत्तर सही हो सकते हैं और कौन-सी सम्भावनाओं को हटाया जा सकता है।
2. **केवल एक सही उत्तर मिलने पर रुकें नहीं :** समस्या का उद्देश्य केवल एक सही उत्तर खोजना नहीं है। यदि विद्यार्थी ऐसी कोई प्रक्रिया खोज लेते हैं जिससे एक से अधिक सही उत्तर मिल सकते हैं, तो इसका मतलब है वे गणित में पैटर्न और सामान्य नियमों को पहचानना सीख रहे हैं।
3. **सोचने के लिए समय और अवसर देना :** ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए विद्यार्थियों को एक पीरियड की बजाय दो-तीन दिन या उससे अधिक समय भी दिया जा सकता है। विद्यार्थी इन्हें अपने साथियों के साथ जोड़ी बनाकर या छोटे समूह में भी हल कर सकते हैं। इससे उन्हें बहस करने, अनुमान लगाने, गणितीय संवाद करने और तर्क-वितर्क करने के अवसर मिलते हैं।

की-वर्ड : *समस्या-समाधान, कम्प्यूटेशनल सोच, प्रक्रियात्मक, अवधारणात्मक, समझ/बोध*

4. **सभी सम्भावित उत्तरों की खोज करने को कहना :** जब विद्यार्थी केवल एक उत्तर की बजाय सभी सम्भावित उत्तर खोजने का प्रयास करते हैं, तो उन्हें समस्या को अधिक गहराई से समझने का अवसर मिलता है। इससे इस गतिविधि से मिलने वाले सीखने के अवसर भी बढ़ जाते हैं।

5. **कम्प्यूटेशनल सोच का उपयोग करना :** इसका अर्थ है समस्या को छोटे-छोटे भागों में बाँट सकते हैं; अंकों में दिखाई देने वाले पैटर्न की पहचान कर सकते हैं; एक व्यवस्थित तरीक़े से अलग-अलग सम्भावनाएँ जाँच सकते हैं; और ग़लतियों को पहचानकर उन्हें सुधार सकते हैं। ग़लतियों को पहचानने और सुधारने की इस प्रक्रिया को डिबगिंग (debugging) कहा जाता है।

6. **ऐसे प्रश्न पूछें जो बच्चों की सोच को आगे बढ़ाएँ :** कभी-कभी विद्यार्थी किसी ऐसी स्थिति में पहुँच जाते हैं जहाँ उन्हें आगे क्या करना है, यह समझ नहीं आता। ऐसे समय में शिक्षक को सही उत्तर बताने की बजाय ऐसे प्रश्न पूछने चाहिए जो विद्यार्थियों को अपनी सोच पर दोबारा विचार करने और नई दिशा में सोचने में मदद करें। नीचे ऐसे ही कुछ प्रश्नों के सुझाव दिए गए हैं :
   - *0 कहाँ रखा जा सकता है?*
   - *दो 1-अंकीय संख्याओं का सबसे बड़ा सम्भावित योग कितना हो सकता है?*
   - *4-अंकीय योग में हज़ार का अंक कौन-सा होना चाहिए?*
   - *दो 1-अंकीय संख्याओं को जोड़ने पर हासिल कब आता है?*

7. **छोटे उदाहरणों के माध्यम से विद्यार्थियों की सोच को आगे बढ़ाएँ :** उदाहरण के लिए, मान लें कि 3-अंकीय संख्याओं के सैकड़े के अंक 3 और 8 हैं, और योग के सैकड़े का अंक 2 है। क्या आप शेष खाली स्थानों को 0, 1, 4, 5, 6, 7, 9 से भर सकते हैं (ध्यान रहे कि किसी भी अंक का दोबारा उपयोग नहीं किया जा सकता है)?

8. **संख्याओं के जोड़ के क्रमविनिमय और साहचर्य के गुणों का उपयोग करके एक उत्तर से दूसरे उत्तर खोजने की कोशिश करना :** उदाहरण के लिए, यदि 347 + 859 = 1206 है, तो क्या दोनों संख्याओं के कुछ अंकों की जगह आपस में बदलकर भी यही योग प्राप्त किया जा सकता है?

इन्हें भी पढ़ सकते हैं

जेनी पेनांट का लेख, *Developing Excellence in Problem Solving with Young Learners* [1], समस्या-समाधान के विभिन्न चरणों के बारे में बात करता है, जिसमें *'शुरुआत करना'*, *'समस्या पर काम करना'*, *'गहराई से समझना'*, और *'चिन्तन करना'* शामिल हैं।

एक अन्य लेख [2] में, डेलोच और ब्राउन (1987) द्वारा किए गए अवलोकनों में ट्रेन ट्रैक सर्किट बनाने के लिए चार से सात साल के बच्चों द्वारा अपनाई गई तीन समस्या-समाधान रणनीतियों का वर्णन किया गया था :

- **बल प्रयोग :** टुकड़ों को ठोक-पीटकर फिट करने की कोशिश करना।
- **स्थानीय सुधार :** केवल एक हिस्से को ठीक करने पर अकसर कोई दूसरी समस्या पैदा हो जाती है।
- **विघटन :** सब कुछ पूरी तरह से तोड़कर फिर से शुरुआत करना।
- **समग्र समीक्षा :** कई सम्बन्धों या एक साथ किए जाने वाले समायोजनों पर विचार करना, उदाहरण के लिए, बीच में जोड़कर या उलटकर मरम्मत करना।

यह सोचना दिलचस्प है कि इन रणनीतियों का उपयोग इस लेख में दी गई समस्या (काग़ज़-और-क़लम वाली समस्याओं) को हल करने के लिए भी किया जा सकता है। इस मामले में 'बल प्रयोग' का अर्थ होगा कि बिना किसी योजना के अलग-अलग अंकों को अलग-अलग खानों में रखना और उम्मीद करना कि किसी-न-किसी प्रयास में सही उत्तर मिल जाएगा। 'स्थानीय सुधार' का अर्थ है कि पूरे समाधान को देखने की बजाय केवल एक छोटी ग़लती को ठीक करने की कोशिश करना। लेकिन एक जगह सुधार

करने से दूसरी जगह नई समस्या पैदा हो सकती है। 'विघटन' का अर्थ है बार-बार नए सिरे से शुरुआत करना। लेकिन इसमें उन्हें अपने पिछले प्रयासों से मिली सीख का उपयोग करना चाहिए। 'समग्र समीक्षा' का अर्थ है कि विद्यार्थी केवल एक जगह की ग़लती सुधारने की बजाय यह देखें कि अलग-अलग अंक और स्थान एक-दूसरे से कैसे जुड़े हैं। वे एक साथ कई बदलाव करके समाधान खोजने की कोशिश कर सकते हैं। इस समस्या में भी विद्यार्थियों को अलग-अलग तरीक़ों से प्रयास करने का अवसर देना उपयोगी है। धीरे-धीरे वे केवल अनुमान और बार-बार प्रयास करने की बजाय योजना बनाकर, पैटर्न पहचानकर और व्यवस्थित तरीक़े से समस्या हल करना सीख सकते हैं।

इस गतिविधि का मुख्य उद्देश्य केवल सही उत्तर प्राप्त करना नहीं है। महत्त्वपूर्ण यह है कि विद्यार्थी समस्या को अलग-अलग तरीक़ों से देखने, अपने विचारों को आजमाने, ग़लतियों से सीखने और समाधान खोजने की प्रक्रिया का आनन्द लें।

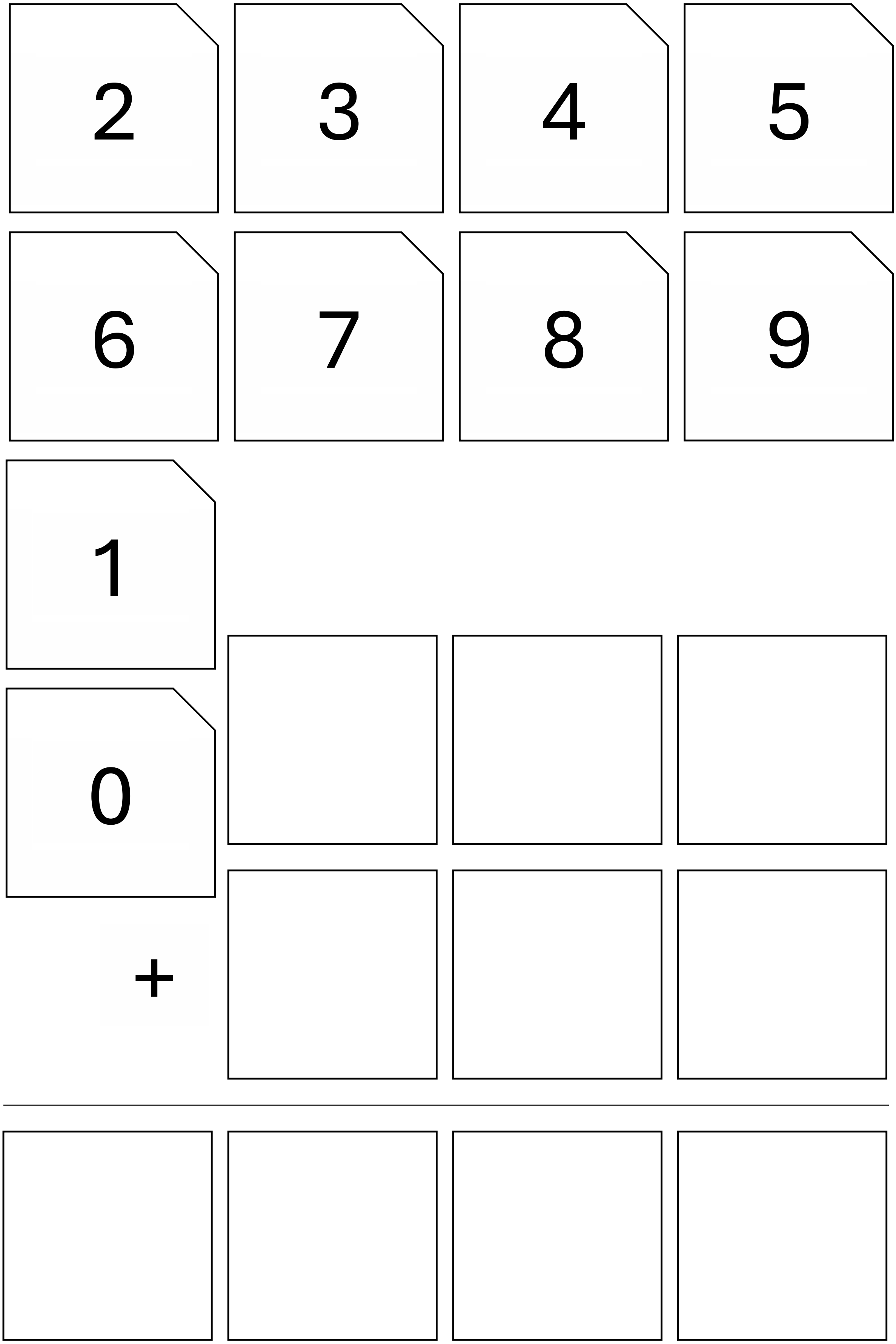
इस समस्या को हल करते समय आपके विद्यार्थियों ने क्या किया और उनके विचारों की प्रक्रिया क्या रही, इसका विवरण देने वाली आपकी प्रतिक्रियाओं की हमें प्रतीक्षा रहेगी। अपनी प्रतिक्रिया AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें। इसी सन्दर्भ में एक नया लेख जल्द ही आ रहा है, जिसमें कुछ नए तरीक़े/विचार और पूरा समाधान दिया जाएगा!

References

1. https://nrich.maths.org/articles/developing-excellence-problem-solving-young-learners
2. https://nrich.maths.org/articles/mathematical-problem-solving-early-years-developing-opportunities-strategies-and

आभार : स्वाती सरकार, मोहन आर. और स्नेहा टाइटस ने इस लेख में महत्त्वपूर्ण योगदान दिया है।

टिप्पणी : हिन्दी अनुवाद गूगल जेमिनी तथा चैटजीपीटी की मदद से किया गया है। देबब्रत साहा ने अनुवाद की विस्तृत समीक्षा करके उसमें संशोधन किए हैं और उपयोगी सुझाव दिए हैं। सम्पादन राजेश उत्साही ने किया है।


2
3
4
5
6
7
8
9
1
0
+

संख्या तालिका पर पेंटोमिनो : एक खोज

जयश्री सुब्रमण्यन और मोहन आर.

एक संख्या तालिका पर कहीं भी ‘L’-आकार का पेंटोमिनो रखें ताकि यह पूरी तरह से पाँच खानों (वर्गों) को ढक ले। इसके द्वारा ढकी गई पाँचों संख्याओं को जोड़ें। इसके बाद, इस पेंटोमिनो को तालिका पर किसी अलग स्थान पर सरकाएँ और उसके द्वारा ढकी जाने वाली नई संख्याओं को जोड़ें। ऐसा बार-बार करके देखें।

चित्र-1 को देखें। इन चार स्थितियों में ढकी गई संख्याओं के योग क्रमशः 121, 211, 311 और 346 हैं। क्या आप इनमें कोई पैटर्न देखते हैं?

1	2	3	4	5	**6**	7	8	9	10
11	12	13	14	15	**16**	17	18	19	20
21	22	23	**24**	25	**26**	27	28	29	30
31	32	33	**34**	35	**36**	**37**	38	39	40
41	42	43	**44**	45	46	47	**48**	49	50
51	52	53	**54**	**55**	56	57	**58**	59	60
61	62	63	64	65	66	67	**68**	69	70
71	72	73	74	75	76	77	**78**	**79**	80
81	**82**	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चित्र-1 : संख्या तालिका पर ‘L’ पेंटोमिनो

इनमें से प्रत्येक का योग 5 के गुणज से एक अधिक है। दूसरे शब्दों में, आप इस ‘L’ पेंटोमिनो को तालिका पर चाहे कहीं भी सरकाएँ, इसके द्वारा ढकी गई संख्याओं के योग को 5 से विभाजित करने पर शेषफल 1 ही बचता है।

यदि इस पेंटोमिनो को घुमाया या पलटा जाए, तो क्या शेषफल तब भी 1 ही रहेगा?

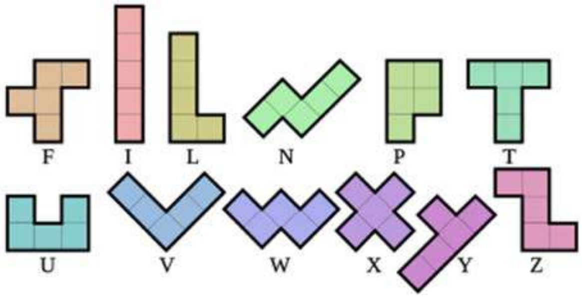
अलग-अलग पेंटोमिनो के साथ ऐसा करने पर क्या होगा?

इन सवालों ने हाल ही में ‘एमटीएआई - आईआईटी पलक्कड़ टीचर्स मैथ सर्कल’ (MTAI - IIT Palakkad Teachers Math Circle) में मिडिल स्कूल के शिक्षकों के बीच एक समृद्ध गणितीय जाँच (investigation) को जन्म दिया। संख्या-तालिका एक परिचित और विविध सम्भावनाओं वाली शिक्षण-अधिगम सामग्री (TLM) है, जिसका उपयोग प्राथमिक कक्षाओं में गिनती और स्थानीय मान के लिए व्यापक रूप से किया जाता है। हालाँकि, जैसा कि ‘एट राइट एंगल्स’ के एक अंक (पैटर्न की खोज : कक्षा-2 में संख्याओं से सीखना : जागृति मेहरा, मार्च, 2025) में रेखांकित किया गया था, यह उन्नत समस्या-समाधान (advanced problem-solving) के लिए भी एक स्प्रिंगबोर्ड के रूप में कार्य कर सकता है। यह लेख बताता है कि कैसे एक संख्या तालिका पर पेंटोमिनो रखने जैसी सरल गतिविधि, बीजगणित, सममिति और गणितीय प्रमाण की एक गहरी खोज में बदल गई।

शुरुआत : मूर्त अनुभव

पेंटोमिनो एक ज्यामितीय आकृति है जो पाँच एक जैसे वर्गों को उनके किनारों से जोड़कर बनाई जाती है। यदि घूर्णन और परावर्तन को मूल आकृति के समान ही माना जाए, तो कुल 12 अलग-अलग पेंटोमिनो आकृतियाँ होती हैं, जिनमें से प्रत्येक का नाम अँग्रेज़ी के उस कैपिटल अक्षर पर रखा गया है, जिसकी तरह वह लगती है।

की-वर्ड : पेंटोमिनो, संख्या तालिका, नम्बर पैटर्न, जाँच-पड़ताल



चित्र-2 : 12 तरह के पेंटोमिनो
Image source: https://bit.ly/4nRLI4f

कार्यशाला के दौरान, शिक्षकों को खेलने और खोजने के लिए संख्या तालिका के प्रिंटआउट और पेंटोमिनो के वास्तविक कटआउट दिए गए थे (**चित्र-3**)। जाँच-पड़ताल की स्वतंत्रता मिलने पर, अधिकांश शिक्षकों ने स्वाभाविक रूप से 'I' पेंटोमिनो के साथ शुरुआत की, शायद यह मानकर कि यह एक सीधी-रेखा वाली ज्यामिति आकृति है, इसलिए इसे समझना सबसे आसान होगा।

चित्र-3 : गतिविधि का सेटअप

'I' पेंटोमिनो को विभिन्न पंक्तियों में क्षैतिज रूप से रखकर, उन्होंने तुरन्त एक अनुमान लगाया : क्षैतिज 'I' द्वारा ढकी गई संख्याओं का योग 5 से विभाजित करने पर शेषफल हमेशा 0 देता है।

लेकिन केवल कुछ अवलोकनों के आधार पर हम ऐसा निष्कर्ष नहीं निकाल सकते, इसके लिए एक स्पष्टीकरण या प्रमाण (proof) की आवश्यकता होगी। एक शिक्षक ने तर्क दिया कि 'I' पेंटोमिनो तालिका पर पाँच लगातार (क्रमागत) संख्याओं को ढकता है और पाँच लगातार संख्याओं का योग हमेशा 5 से विभाज्य होता है।

एक अन्य शिक्षक एक बीजगणितीय प्रमाण (algebraic proof) के साथ सामने आए : 'I' पेंटोमिनो जिन संख्याओं को ढकता है, उन्हें $x - 2, x - 1, x, x + 1, x + 2$ के रूप में लिया जा सकता है। उनका योग $5x$ होता है और इसलिए यह 5 से विभाज्य है।

लेकिन क्या हो यदि 'I' पेंटोमिनो को ऊर्ध्वाधर रूप से रखा जाए? अब, यह 7, 17, 27, 37 और 47 जैसी संख्याओं को ढकता है। शिक्षकों ने ध्यान दिया कि इस अनुक्रम में लगातार आने वाली संख्याओं के बीच का अन्तर हमेशा 10 होता है। इसलिए इन पाँचों संख्याओं का योग बीच की संख्या का पाँच गुना होगा – और यह भी, हमेशा 5 का एक गुणज ही होगा।

शॉर्टकट खोजना : स्मार्ट और तेज़ अंकगणित

जब शिक्षक इस बात से सहमत हो गए कि 'I' पेंटोमिनो को संख्या तालिका में कहीं भी क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रखने पर पाँचों संख्याओं का योग 5 से पूरी तरह विभाजित होता है तब वे अन्य 11 पेंटोमिनों की ओर बढ़े।

अपने अनुमानों की जाँच करने के लिए, कई शिक्षकों ने शुरुआत में पाँचों संख्याओं को जोड़ने और 5 से विभाजित करने के लिए कैलकुलेटर का सहारा लिया। हालाँकि, जब उन्हें कैलकुलेटर से भी 'अधिक स्मार्ट और तेज़' तरीक़ा खोजने की चुनौती दी गई, तो उनके सोचने के तरीक़े में बदलाव देखने को मिले।

एक समूह ने महसूस किया कि उन्हें केवल इकाई के अंकों को देखने की आवश्यकता है। क्योंकि तालिका पर दी गई किसी भी संख्या को $10a + b$ के रूप में लिखा जा सकता है; इसका दहाई वाला हिस्सा ($10a$) पहले से ही 5 का गुणज है और उसे नज़रअन्दाज किया जा सकता है। इसके कुछ ही समय बाद, उन्होंने इसे और भी अधिक परिष्कृत किया : इकाई के अंकों को जोड़ने के बजाय, वे बस 'पाँच को बाहर निकाल' (cast out the fives) रहे थे।

उन्होंने स्वतंत्र रूप से मॉड्यूलर अंकगणित (modular arithmetic) के एक मुख्य सिद्धान्त की खोज कर ली थी : *किसी समूह की संख्याओं के योग को विभाजित करने पर मिलने वाला शेषफल, उस समूह की प्रत्येक संख्या को*

विभाजित करने पर मिलने वाले शेषफलों के योग में से अधिकतम बार भाजक निकालने पर मिलने वाले शेषफल के बराबर ही होगा। तार्किक चिन्तन की इस उछाल ने उनकी जाँच-पड़ताल को बेहद आसान बना दिया।

उदाहरण के लिए, **चित्र-6** में नीले पेंटोमिनो द्वारा ढकी गई संख्याओं के योग को जब 5 से विभाजित किया जाता है, तो शेषफल ज्ञात करने के लिए उन्हें केवल ढकी गई प्रत्येक संख्या को 5 से विभाजित करने पर मिलने वाले शेषफलों (इस मामले में 1, 1, 1, 1 और 2) को ढूँढ़ना था, और फिर उनके योग 6 को 5 से विभाजित करने पर मिलने वाला शेषफल ज्ञात करना था। यह 6 + 16 + 26 + 36 + 37 = 121 का योग करने और फिर उसे 5 से विभाजित करके शेषफल निकालने की तुलना में कहीं अधिक आसान है।

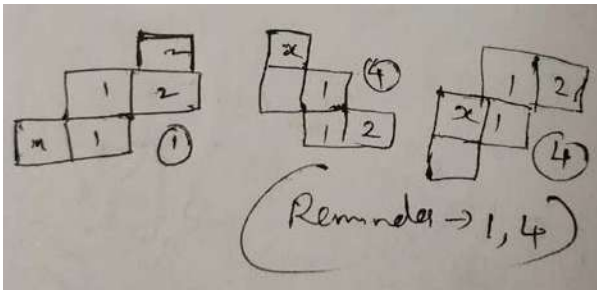
चित्रों से प्रतीकों तक : अपरिवर्तनीयता (Invariance) को प्रमाणित करना

तेज़ी से गणना करके शिक्षकों ने एक स्पष्ट अनुमान (conjecture) स्थापित किया : शेषफल, तालिका पर पेंटोमिनो की स्थिति से पूरी तरह स्वतंत्र होता है।

लेकिन इसे सिद्ध कैसे किया जाए?

इस दौरान कई दृष्टिकोण सामने आए, जो अमूर्तीकरण के विभिन्न स्तरों को दर्शाते हैं :

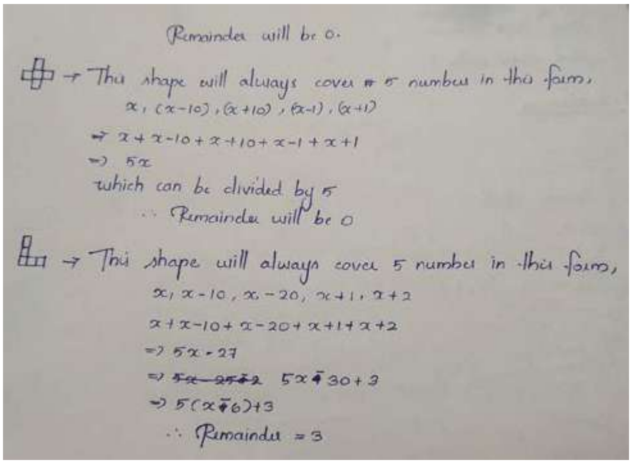
- दृश्यात्मक या स्थानान्तरणात्मक दृष्टिकोण (The Visual/Translational Approach) : एक समूह ने यह तर्क दिया, "यदि आप किसी पेंटोमिनो को एक कॉलम दाईं ओर सरकाते हैं, तो पाँचों संख्याओं का योग 5 (1 × 5) बढ़ जाता है। शेषफल नहीं बदलता। यदि आप इसे एक पंक्ति नीचे सरकाते हैं, तो योग 50 (10 ×5) बढ़ जाता है। शेषफल तब भी नहीं बदलता।"
- 'ग़ैर-शाब्दिक' संरचनात्मक दृष्टिकोण (The 'Non-Verbal' Structural Approach) : एक अन्य समूह ने **चित्र-4** में दी गई आकृतियों के सबसे बाईं ओर वाले कॉलम को x मान दिया और स्वेच्छा से x का मान 0 तय किया तथा कॉलम की सभी संख्याओं को 0 के रूप में लिया। जैसे ही वे एक कॉलम दाईं ओर बढ़े, उन्होंने दी गई संख्या में 1 जोड़ दिया। इसके बाद उन्होंने दूसरे कॉलम के सभी खानों को संख्या 1 और तीसरे कॉलम के सभी खानों को संख्या 2 आवंटित कर दी। ध्यान दें कि दूसरी और तीसरी आकृति में चिह्नित x के नीचे के खाने में उन्होंने 0 नहीं लिखा है। इन सापेक्ष मानों (relative values) को आपस में जोड़कर, वे विशिष्ट तालिका संख्याओं की आवश्यकता के बिना ही शेषफल ज्ञात करने में सक्षम थे।



चित्र-4

- औपचारिक बीजगणितीय दृष्टिकोण (The Formal Algebraic Approach) : कई समूहों ने अपने प्रमाणों को पुख़्ता करने के लिए बीजगणित का उपयोग किया। **चित्र-4** के दाहिने किनारे पर स्थित 'W' पेंटोमिनो के लिए, एक शिक्षक ने समझाया : "एक संख्या का दोगुना, उसमें अगली संख्या का दोगुना जोड़ने और फिर उसकी अगली संख्या जोड़ने पर, शेषफल 4 मिलता है।" इसे प्रतीकात्मक रूप से लिखें तो, यदि पहले कॉलम की संख्या n है, तो योग होगा : $2n + 2(n + 1) + (n + 2) = 5n + 4$ । $5n + 4$ के रूप की किसी भी संख्या को जब 5 से विभाजित किया जाएगा, तो हमेशा शेषफल 4 बचेगा।

दिलचस्प बात यह है कि बीजगणितीय प्रमाणों को लेकर एक बहस छिड़ गई (**चित्र-5**)। समीकरण बनाते समय, क्या x को आकृति की सबसे छोटी संख्या का प्रतिनिधित्व करना चाहिए, या बीच के वर्ग का? बीच के वर्ग की संख्या के लिए x का उपयोग करने से अक्सर अन्तिम समीकरण सरल हो जाता था, लेकिन x को सबसे छोटी संख्या के रूप में मानने से ऋणात्मक चिह्नों (जैसे x - 10) से बचा जा सकता था, जिसके बारे में कुछ शिक्षकों का तर्क था कि यह मिडिल स्कूल के विद्यार्थियों के लिए कहीं अधिक अनुकूल दृष्टिकोण है।



चित्र-5

एक नया मोड़ : दिशा और 'सुन्दरन' आकृतियाँ

यद्यपि तालिका पर किसी पेंटोमिनो को सरकाने से उसका शेषफल नहीं बदलता था, लेकिन शिक्षकों ने एक दिलचस्प खोज की : यदि पेंटोमिनो को घुमाया जाए या पलटा जाए, तो शेषफल बदल जाता है। एक ही पेंटोमिनो के आठ सम्भावित ओरिएंटेशन (चार घूर्णन, और प्रत्येक का एक पलटा हुआ रूप) की खोज करते हुए, एक बेहद सुन्दर सममिति सामने आई। शिक्षकों ने ध्यान दिया कि यदि कोई पेंटोमिनो एक निश्चित शेषफल देता है, तो उसे क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से पलटने पर मिलने वाला शेषफल, पहले वाले शेषफल के साथ मिलकर 5 का एक पूर्ण पूरक (complement) बनाता है।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

चित्र-6 : 'L' पेंटोमिनो का परावर्तन

उदाहरण के लिए, यदि मूल 'L' पेंटोमिनो 1 शेषफल देता है, तो पलटा हुआ 'L' पेंटोमिनो (**चित्र-6**) 4 शेषफल देता है (क्योंकि 1 + 4 = 5)।

इससे भी अधिक दिलचस्प वे आकृतियाँ थीं जिन्होंने इस बदलाव का पूरी तरह से विरोध किया। 'I', 'X', और 'Z' पेंटोमिनो ने प्रत्येक सम्भावित स्थिति और ओरिएंटेशन (दिशा) में लगातार 0 ही शेषफल दिया। इन आकृतियों में एक विशिष्ट, अन्तर्निहित सममिति को देखते हुए, शिक्षकों ने उन्हें प्यार से 'सुन्दरन' नाम दिया। इसका अर्थ है 'सुन्दर'। जब गणितीय रूप से यह परिभाषित करने का प्रयास किया गया कि किस चीज़ ने एक आकृति को सुन्दरन बनाया, तो उन्होंने अन्ततः इसे 'दाएँ-बाएँ और ऊपर-नीचे का एक प्रकार का सन्तुलन' होने के रूप में वर्णित किया, जो औपचारिक घूर्णन सममिति के करीब पहुँचता है।

कक्षा में

इस तरह की गतिविधियाँ विद्यार्थियों को यह दिखाती हैं कि गणित केवल रटे-रटाए नियमों या प्रक्रियाओं का एक समूह होने से कहीं बढ़कर है। यह गतिविधियाँ, पैटर्न की खोजबीन से मिलने वाले आनन्द और यह जानने के लिए हैं कि ये पैटर्न ऐसे क्यों हैं, साथ ही यह समझने के लिए भी कि उनकी तर्कपूर्ण व्याख्या कैसे की जाए।

यह विशिष्ट पेंटोमिनो टास्क एक शैक्षणिक ख़ज़ाना है। इसके लिए बहुत कम पूर्वज्ञान की आवश्यकता होती है, जिससे सभी स्तरों के विद्यार्थी सीधे मूर्त खेल में शामिल हो सकते हैं। यह बहुत ही ख़ूबसूरती से आगे बढ़ता है, शिक्षार्थियों को बुनियादी अंकगणितीय पैटर्न से बीजगणितीय अभिव्यक्तियों की ओर ले जाता है, और मॉड्यूलर अंकगणित से सहज परिचय कराता है।

कक्षा में पीरियड ख़त्म होने की घण्टी बजने पर यह खोज समाप्त नहीं हो जाती। उत्सुक दिमागों को व्यस्त रखने के लिए इस समस्या की सीमाओं को आसानी से आगे बढ़ाया जा सकता है :

- क्या होगा यदि हम एक अलग तालिका का उपयोग करें, जैसे कि सामान्य 7 दिनों वाला कैलेंडर?
- क्या होगा यदि हम पेंटोमिनो के बजाय ट्रायोमिनो या टेट्रोमिनो की खोज करें?
- यदि हम योग को 5 के बजाय 3 या 10 से विभाजित करें, तो कौन-से पैटर्न उभरकर आते हैं?

- क्या होगा यदि हम योग के बजाय गुणनफलों के शेषफल को देखें?

लेखक और कार्यशाला में भाग लेने वाले शिक्षकों, दोनों ने ही इस टास्क को अपनी-अपनी कक्षाओं में आज़माया है। उनके परिणाम लगभग समान थे : विद्यार्थी इन बीजगणितीय सच्चाइयों को उजागर करने में पूरी तरह सक्षम हैं। यह साबित करता है कि जब हम शिक्षार्थियों को सही संसाधन और एक दिलचस्प पहेली देते हैं, तो वे बड़े उत्साह से एक गणितज्ञ की भूमिका निभाने लगते हैं।

आभार : उन सभी शिक्षकों को धन्यवाद जिन्होंने कार्यशाला में पूरे उत्साह के साथ भाग लिया और अपने काम तथा विचारों को खुलकर साझा किया। इस कार्यक्रम के आयोजन में सहयोग के लिए एमटीएआई और आईआईटी पलक्कड़ को धन्यवाद। यह टास्क लिलजेडाहल, पी., चेरनॉफ़, ई. और ज़ाज़किस, आर. के शोध पत्र– *Interweaving mathematics and pedagogy in task design: a tale of one task. J Math Teacher Educ 10, 239–249 (2007)* से प्रेरित था।

जयश्री सुब्रमण्यन एक शिक्षक और शिक्षक-प्रशिक्षक हैं। उन्हें विभिन्न आयु वर्ग के विद्यार्थियों और शिक्षकों के साथ काम करने का व्यापक अनुभव है। वे मनोरंजक गणित (recreational mathematics) के प्रति गहरा लगाव रखती हैं और विद्यार्थियों के लिए गणित को मज़ेदार व रोचक बनाने का प्रयास करती हैं। वर्तमान में वे आईआईटी, पलक्कड़ में एजुकेशनल आउटरीच ऑफिसर के रूप में कार्यरत हैं।

मोहन आर. अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, बेंगलूरु में गणित पढ़ाते हैं। वे गणितीय संचार (mathematics communication) और गणित शिक्षण के दृश्यात्मक पहलुओं (visual aspects) में विशेष रुचि रखते हैं। वे एमटीएआई से जुड़े 'टीचर्स मैथ्स सर्कल्स' में नियमित रूप से भाग लेते हैं।

अनुवाद : गूगल जेमिनी **पुनरीक्षण :** अशोक प्रसाद एवं सन्दीप दिवाकर **सम्पादन :** राजेश उत्साही

वर्कशीट

संख्या तालिका पर पेंटोमिनो

जयश्री सुब्रमण्यन और मोहन आर.

आवश्यक सामग्री : एक संख्या तालिका और मोटे काग़ज़ या कार्ड पर प्रिंट किए गए और कटे हुए 12 पेंटोमिनो का सेट।

1. (क) T-पेंटोमिनो (चित्र में नीला T) को संख्या तालिका पर किसी भी स्थान पर सीधा रखें।

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

संख्या तालिका का चित्र

उन संख्याओं का योग करें, जिन्हें यह T-पेंटोमिनो ढकता है (इस चित्र में 21, 22, 23, 32 और 42), और इस योग को 5 से भाग देने पर प्राप्त होने वाला शेषफल ज्ञात करें।

(ख) पेंटोमिनो को संख्या तालिका पर क्षैतिज या ऊर्ध्वाधर रूप से खिसकाते हुए अन्य स्थानों पर ले जाएँ, और इसे तीन अलग-अलग स्थितियों में रखें। इनमें से प्रत्येक स्थिति के लिए :

i) उन संख्याओं का योग ज्ञात करें जिन्हें यह T-पेंटोमिनो ढकता है।

ii) प्राप्त योग को 5 से भाग देने पर प्राप्त होने वाला शेषफल ज्ञात करें।

*सरलता के लिए, हम आगे इस शेषफल को **R** कहेंगे।*

(ग) इन शेषफलों के बारे में आपने क्या नोटिस किया? क्या आपको लगता है कि यदि T-पेंटोमिनो को किसी और स्थान पर ले जाया जाए, तब भी आपका यह अवलोकन सही रहेगा? आपको ऐसा क्यों लगता है? आप इस तर्क से अपने किसी मित्र को कैसे आश्वस्त करेंगे?

(घ) अब पेंटोमिनो को अन्य सम्भावित दिशाओं में घुमाएँ ताकि यह संख्या तालिका पर ठीक पाँच खानों को ढके (उदाहरण के लिए : चित्र में पीले और गुलाबी रंग के T-पेंटोमिनो) और इन दिशाओं के लिए R ज्ञात करें। आपने क्या नोटिस किया?

(ङ) अपने अवलोकनों के आधार पर, एक ऐसा कथन (statement) तैयार करें जो यह बताए कि संख्या तालिका पर किसी भी स्थान और दिशा में T-पेंटोमिनो द्वारा ढकी गई संख्याओं के योग को 5 से भाग देने पर क्या शेषफल प्राप्त होता है। आप कैसे जानते हैं कि आपका यह कथन सत्य है?

(च) क्या आप वास्तव में योग की गणना किए बिना, पेंटोमिनो द्वारा ढकी गई संख्याओं के योग को 5 से भाग देने पर प्राप्त होने वाले शेषफल को खोजने का कोई आसान तरीक़ा खोज सकते हैं?

2. (क) कोई दूसरा पेंटोमिनो चुनें, जैसे कि U-पेंटोमिनो। इसे संख्या तालिका पर अलग-अलग स्थानों पर रखें और R ज्ञात करें।

(ख) इस पेंटोमिनो के साथ अलग-अलग दिशाओं के लिए उपरोक्त प्रक्रिया को दोहराएँ। पेंटोमिनो को घुमाकर और उसके किसी एक किनारे के सापेक्ष उसे पलटकर (reflecting) देखें और ध्यान दें कि ये रूपान्तरण (transformations) R को कैसे बदलते हैं।

(ग) (क) और (ख) में अपने अवलोकन के आधार पर, संख्या तालिका पर U-पेंटोमिनो को अलग-अलग स्थानों और दिशाओं में रखने पर प्राप्त होने वाले R के मानों के बारे में एक सामान्य कथन दें।

3. अपनी पसन्द के किसी अन्य पेंटोमिनो के साथ खोज करें, इसे संख्या तालिका पर अलग-अलग स्थानों और दिशाओं में रखें। प्राप्त अलग-अलग R मानों के बारे में आप क्या सोचते हैं? आप अपने किसी मित्र को कैसे आश्वस्त करेंगे कि आपके द्वारा किया गया सामान्यीकरण सही है?

4. बिन्दु 1,2 और 3 में अपनी खोज के आधार पर, आप इस बारे में क्या कह सकते हैं कि R का मान कैसे बदलता है जब आप :

(क) उसी पेंटोमिनो को संख्या तालिका पर खिसकाते हैं

(ख) इसे संख्या तालिका की किसी रेखा के सापेक्ष पलटते हैं

(ग) इसे किसी बिन्दु के चारों तरफ इस तरह घुमाते हैं कि वह पेंटोमिनो अपनी अन्तिम स्थिति में भी संख्या तालिका के ठीक पाँच खानों को ढके।

आप अपने मित्र को कैसे आश्वस्त करेंगे कि आपका कथन सत्य है?

5. क्या आप संख्या तालिका पर वास्तव में रखे बिना और गणना किए बिना किसी भी पेंटोमिनो के R मान का अनुमान लगा सकते हैं? आप यह कैसे सिद्ध करेंगे कि आपकी विधि सही है?

6. उन आकृतियों (shapes) का एक गुणधर्म बताएँ जिनके लिए R का मान 0 है।

✧✧✧✧✧

अनुवाद : गूगल जेमिनी **पुनरीक्षण :** सन्दीप दिवाकर **सम्पादन :** राजेश उत्साही

बच्चों में धन की समझ

नेशनल फ़ाइनेंस ओलम्पियाड द्वारा कक्षा-1 और 2 के लिए तैयार की गई *पर्सनल फ़ाइनेंस हैंडबुक* की एक समीक्षा

समीक्षक : क्षमा चक्रवर्ती

बच्चों ने कभी-न-कभी अपने आस-पास की दुकान पर सिक्कों का लेन-देन किया ही होगा, दो स्नैक्स की क़ीमतों की तुलना की होगी, या फिर अभिभावकों को पेमेंट के लिए क्यूआर (QR) कोड स्कैन करते हुए देखा होगा। बच्चों की आपसी बातचीत और मेल-जोल के दौरान भी वित्तीय समझ उभरकर सामने आती है। वे दोस्तों के साथ खिलौने या स्टेशनरी की अदला-बदली करते समय भी अपने फ़ायदे के लिए मोल-भाव करते हैं। वे यह भी देखते हैं कि अदला-बदली घाटे का सौदा तो नहीं, और यह भी कि यह लेन-देन उनके लिए सही है या नहीं। दैनिक जीवन के ऐसे अनुभवों में मूल्य, औचित्य, पसन्द और मोल-भाव जैसी बातें शामिल होती हैं, जो कम उम्र से ही वित्तीय सोच विकसित करने के बेहतरीन मौक़े देती हैं। इनमें गिनती, तुलना, अंकगणितीय संक्रियाएँ और अनुमान लगाने जैसी गणितीय अवधारणाएँ भी शामिल होती हैं। रोज़मर्रा के जीवन के ये सन्दर्भ रुपए-पैसे (धन) को एक सार्थक विषय बनाते हैं, जिनसे छोटे बच्चों में गणित की समझ विकसित हो सकती है। इसलिए इसमें कोई हैरानी की बात नहीं है कि अलग-अलग बोर्ड की प्राथमिक कक्षाओं के गणित के पाठ्यक्रम में रुपए-पैसे को शामिल किया गया है।

हाल के वर्षों में, भारत में कई संगठनों और प्रकाशकों ने स्कूल जाने वाले बच्चों को वित्तीय साक्षरता सिखाने के उद्देश्य से किताबें और कार्यक्रम तैयार किए हैं। **तालिका-1** में ऐसे ही कुछ प्रयासों के विवरण दिए गए हैं –

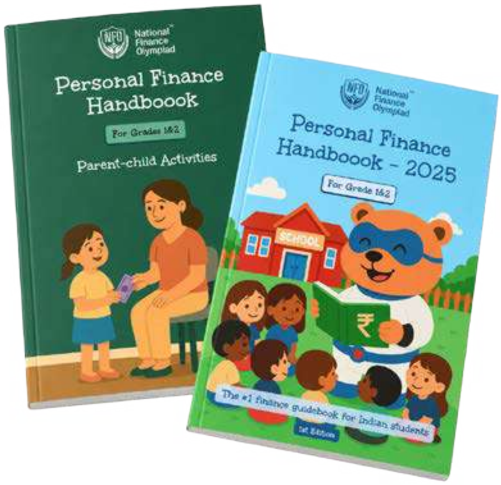
संस्थाएँ / प्रकाशक	शृंखला / कार्यक्रम	लक्षित समूह
नेशनल सेंटर फ़ॉर फ़ाइनेंशियल एजुकेशन	मनी स्मार्ट स्कूल प्रोग्राम	कक्षा-6 से 10
प्रथम बुक्स	*रुपैया पैसा* शृंखला	आयु 9 से 12
नेशनल फ़ाइनेंस ओलम्पियाड	*पर्सनल फ़ाइनेंस हैंडबुक*	कक्षा-1 से 8

तालिका-1 : भारत में बच्चों के लिए वित्तीय साक्षरता प्रकाशन के उदाहरण

नेशनल फ़ाइनेंस ओलम्पियाड (एनएफ़ओ) के X (पूर्व में ट्विटर) पेज के अनुसार, यह एक ऐसा संगठन है जो व्यवस्थित/ढाँचागत प्रतियोगिताओं और सीखने के माध्यम से विद्यार्थियों के बीच वित्तीय साक्षरता को बढ़ावा देने के लिए समर्पित है। यहाँ इन पहलों के एक उदाहरण के तौर पर *कक्षा-1 और 2* के लिए *नेशनल फ़ाइनेंस ओलम्पियाड* द्वारा विकसित की गई *पर्सनल फ़ाइनेंस हैंडबुकों* की समीक्षा की गई है। ये हैंडबुक इसलिए भी रुचिकर हैं क्योंकि इनमें विद्यार्थियों को पर्सनल फ़ाइनेंस की अवधारणाओं से परिचित कराने का प्रयास उनके प्रारम्भिक वर्षों में ही किया गया है। ये हैंडबुक अँग्रेज़ी में हैं। इन किताबों का उद्देश्य बच्चों को आर्थिक रूप से आत्मविश्वासी और ज़िम्मेदार बनाना है। नेशनल फ़ाइनेंस ओलम्पियाड द्वारा प्रकाशित इन किताबों की भूमिका में कहा गया है कि *इन हैंडबुक को सोच-समझकर इस तरह तैयार किया गया है जिससे विद्यार्थियों की वास्तविक दुनिया की फ़ाइनेंस से जुड़ी समझ और उससे जुड़ी अवधारणाओं को लागू करने की क्षमता को परखा जा सके। इनका उद्देश्य विद्यार्थियों के लिए फ़ाइनेंस को आसान और मज़ेदार बनाना है ताकि आर्थिक रूप से जागरूक नागरिकों की एक पीढ़ी तैयार की जा सके* [1]।

की-वर्ड : *वित्त, धन, हैंडबुक, गतिविधियाँ, आवश्यकताएँ, इच्छाएँ, बजट, वित्तीय साक्षरता, प्राथमिक गणित, डिजिटल पेमेंट/भुगतान*

इस हैंडबुक में मित्रवत पात्र, आसान भाषा, दैनिक जीवन के उदाहरण और मज़ेदार गतिविधियाँ शामिल हैं जो बच्चों के ध्यान देने की क्षमता और सीखने के तरीक़े के हिसाब से बनाई गई हैं। यह विद्यार्थियों को बचत, आय, बजट और डिजिटल पेमेंट जैसे फ़ाइनेंस से जुड़े कई शब्दों से परिचित कराती है। इसके साथ एक और हैंडबुक है, जिसमें अभिभावक और बच्चों द्वारा मिलकर करने वाली गतिविधियाँ हैं **(चित्र-1)**।



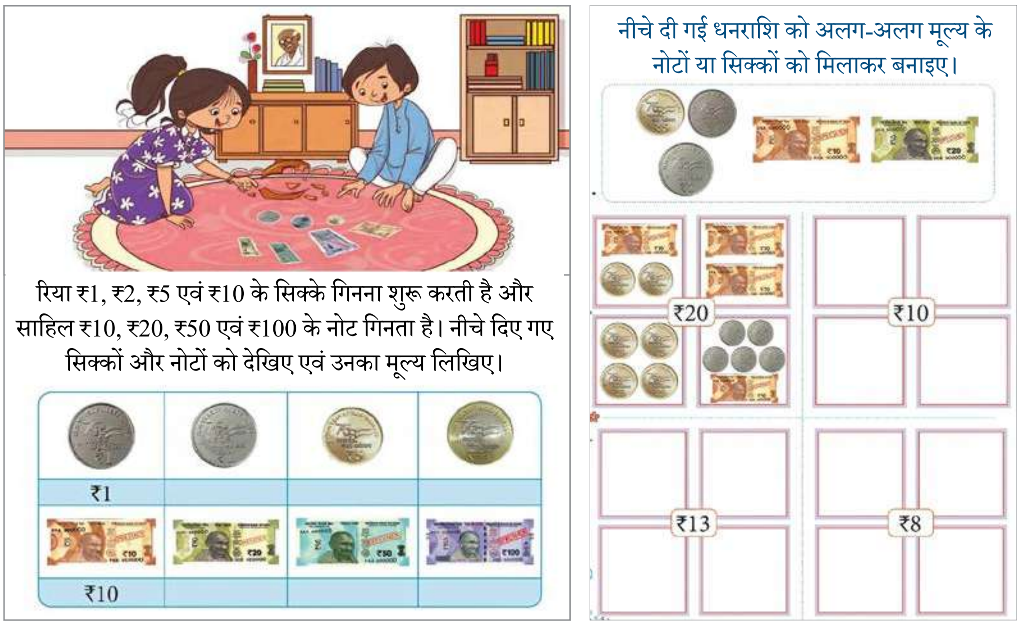
चित्र-1 : मुख्य हैंडबुक और अभिभावक व बच्चों द्वारा मिलकर करने वाली गतिविधियों की पुस्तिका

मित्रवत मार्गदर्शक, मनी पाल और कहानी सुनाने वाला मुख्य पात्र गेबी दी बेयर है। कक्षा-1 और 2 के लिए बनी इस किताब में 8 अध्याय हैं। हर अध्याय में एक नई अवधारणा को समझाया गया है, अवधारणा को बेहतर ढंग से समझाने के लिए एक कहानी भी दी गई है, और फिर एक छोटी-सी गतिविधि (जैसे सही मिलान करना, तस्वीर काटकर सही जगह चिपकाना आदि) भी दी गई है। सभी सवालों और गतिविधियों के जवाब अन्त में दिए गए हैं। नीचे दी गई तालिका में इस किताब का संक्षिप्त विवरण दिया गया है।

अध्याय संख्या	अध्याय का नाम	मुख्य विचार
1	मनी हियर, मनी देयर!	• धन का मूल्य • नोट और सिक्के (मूल्यवर्ग) • छुट्टे पैसे (बकाया) की अवधारणा
2	वर्क मोड : ऑन!	• आसान कार्यों से कमाई • मेहनत का मूल्य • कमाया गया पैसा बनाम उपहार में मिला पैसा
3	व्हेयर डिड माय मनी गो?	• पैसे ख़र्च करने का तात्पर्य • ज़रूरतें बनाम इच्छाएँ • समझदारी से ख़र्च करना
4	एवरी मनी काउंट!	• बचत से तात्पर्य • बचत के प्रभावी तरीक़े
5	सेट इट, गेट इट!	• लक्ष्यों का मतलब • लक्ष्य के लिए बचत • लक्ष्य पाने के तरीक़े
6	थिंक ट्वाइस, स्पेंड वाइज़!	• बजट का विचार • निर्धारित सीमा के अन्दर ख़र्च करना • बजट बनाने के तरीक़े
7	गुडबाय पिग्गी, हैलो बैंक!	• बैंक से परिचय • जमा और निकासी • गुल्लक बनाम बैंक
8	मनी हियर, मनी देयर, मनी एवरीव्हेयर!	• डिजिटल मनी • सुरक्षा के उपाय • डिजिटल बनाम कैश पेमेंट

तालिका-2 : कक्षा-1 और 2 के लिए पर्सनल फ़ाइनेंस हैंडबुक के अध्यायों का संक्षिप्त विवरण

यहाँ शामिल किए गए विषयों का दायरा उल्लेखनीय है। इस हैंडबुक की विशेषता को समझने के लिए, इसकी तुलना एनसीईआरटी की कक्षा-1 और 2 की गणित की किताबों में रुपए-पैसे से जुड़े विषयों को समझाने के तरीक़े से करना उपयोगी होगा। एनसीईआरटी का फ़ाउण्डेशनल स्टेज लर्निंग आउटकम्स दस्तावेज़ कहता है कि विद्यार्थियों को कक्षा-2 तक "अलग-अलग नोट और सिक्कों को मिलाकर 100 रुपए तक की राशि बनाना" सीख जाना चाहिए [2]। कक्षा-1 में, पैसे से जुड़ा अध्याय नोटों और सिक्कों की पहचान करने और दी गई राशि (₹20 तक) बनाने के लिए अलग-अलग संयोजन बनाने के बारे में है (**चित्र-2**)।



चित्र-2 : एनसीईआरटी कक्षा-1, आनन्दमय गणित, अध्याय-12, पेज 115 और 118
https://ncert.nic.in/textbook.php?aejm1=12-13

इस अध्याय में एक ऐसा खेल शामिल है जिसमें बच्चे काग़ज़ के नक़ली नोट बनाते हैं। फिर ख़ुद दुकानदार व ग्राहक बनकर उन नक़ली नोटों से सामान ख़रीदने और बेचने का खेल खेलते हैं।

कक्षा-2 के अध्याय 'मेले का आनन्द' में अभिभावकों द्वारा दिए गए पैसे लेकर मेला घूमने गए बच्चों की कहानी है जो उन पैसों से अलग-अलग तरह के झूले और खेल का मज़ा लेते हैं (**चित्र-3**)।

चित्र-3 : एनसीईआरटी कक्षा-2, आनन्दमय गणित, अध्याय-10, पेज 113 और 114
https://ncert.nic.in/textbook.php?bhjm1=10-11

इस अध्याय में बताया गया है कि एक ही धनराशि का कई अलग-अलग तरीक़ों से किस प्रकार भुगतान किया जा सकता है, और अन्त में पैसों से सम्बन्धित जोड़ और घटा के सरल सवाल दिए गए हैं।

जहाँ हैंडबुक पाठ्यपुस्तक से अधिक मददगार होती है

जहाँ एनसीईआरटी की पाठ्यपुस्तकें बच्चों का परिचय नोट और सिक्कों, राशियों के अलग-अलग संयोजनों और आसान लेन-देन से करवाती हैं, वहीं यह हैंडबुक चर्चा को कमाई, बचत, बजट बनाने और आर्थिक फ़ैसले लेने जैसे व्यापक विषयों तक ले जाती है। इस हैंडबुक की निम्नलिखित बातें ध्यान देने लायक़ हैं –

1. 'आय' के विचार को उस धनराशि के रूप में बताया गया है जो हमें काम करने पर या उपहार में मिलती है। इन दोनों तरह की आय में अन्तर भी बताए गए हैं। इसके बाद एक गतिविधि है जिसमें बच्चों को पहचानना होता है कि किस स्थिति की आय कमाई गई है, और किस स्थिति की आय तोहफ़े में मिली है (**चित्र-4**)। आमतौर पर गणित की पाठ्यपुस्तकों में इस बात को महत्त्व नहीं दिया जाता और नज़रअन्दाज़ कर दिया जाता है (क्योंकि सारा ध्यान गणनाओं पर होता है!)।

Earned Money	Gift Money
Comes because you work or help out	Comes from birthdays, festivals, or special occasions
You earn it by doing a job or chore	You receive it without doing work
Makes you feel proud and happy	Makes you feel happy and loved

चित्र-4 : अध्याय-2, पेज 15 और 18

2. ज़रूरत और इच्छा के बीच अन्तर। यह हैंडबुक के सबसे महत्त्वपूर्ण और प्रासंगिक हिस्सों में से एक है। आज के इस 'झटपट वाले' ज़माने में जब कोई भी चीज़ बस एक बटन दबाते ही मिल जाती है तो इस बात पर बहुत कम ही ध्यान दिया जाता है कि क्या हमें सच में उसकी ज़रूरत है। जब वयस्क ही 'जो दिखे, उसे ख़रीद लो' वाली आदत अपना रहे हैं तो बच्चे भी जो कुछ वे माँगते हैं, उसे पाकर बड़े हो रहे हैं। कभी-कभी तो उन्हें उसके लिए इन्तज़ार भी नहीं करना पड़ता! इस बात को समझाने के लिए अनन्या की पसन्द से जुड़ी एक छोटी-सी कहानी दी गई है (**चित्र-5**)।

चित्र-5 : अध्याय-3, पेज 25 और 27

इस कहानी के बाद एक बहुत ही उपयोगी सवाल (और उसका जवाब) दिया गया है : क्या इसका मतलब यह है कि कोई मनोरंजन की वस्तु नहीं ख़रीद सकता? (**चित्र-6**)

चित्र-6 : अध्याय 3, पेज 29

3. इस हैंडबुक की सबसे महत्त्वपूर्ण साथी वह गतिविधि पुस्तिका है जिसमें अभिभावक और बच्चों द्वारा मिलकर की जाने वाली गतिविधियाँ दी गई हैं। यह गतिविधि पुस्तिका मुख्य हैंडबुक में बताए गए विचार को पढ़ने और कक्षा में होने वाली चर्चाओं से आगे ले जाने की कोशिश करती है। यह पुस्तिका बच्चे में किसी अवधारणा की समझ विकसित करने के लिए अभिभावकों (या घर के बड़ों) को सक्रिय रूप से शामिल करती है, और ऐसा करना भी चाहिए, क्योंकि पैसे और ख़र्च का विषय घर के माहौल का केन्द्र होता है।

विषय-वस्तु के वे क्षेत्र जिन्हें मज़बूत करने की आवश्यकता है

1. बचत वाले अध्याय में 'स्मार्ट सेवर' (समझदारी से बचत करने वाले) के बारे में बताया गया है। इसमें पहले बचत करने और फिर ख़र्च करने का तरीक़ा बताया गया है (**चित्र-7**)। 'स्मार्ट सेवर' बनने पर ज़ोर देने से अनजाने में यह सन्देश जा सकता है कि बचत करना ही हमेशा बेहतर विकल्प है। यहाँ यह समझना भी ज़रूरी है कि अलग-अलग लोग अपनी अलग-अलग ज़रूरतों और प्राथमिकताओं के आधार पर ख़र्च और बचत के बारे में अलग-अलग फ़ैसले लेते हैं।

चित्र-7 : अध्याय-4, पेज 36

2. आज के समय को देखते हुए, अन्तिम अध्याय में डिजिटल मनी और डिजिटल पेमेंट के बारे में बताया गया है। यहाँ यह पूरी तरह से स्पष्ट किया जाना चाहिए कि छोटे बच्चों (इस सन्दर्भ में 6 और 7 साल के बच्चों) से न यह अपेक्षा की जाती है न ही यह सलाह दी जाती है कि वे ख़ुद (या किसी की देख-रेख में भी) किसी ऐप्स का इस्तेमाल करें या डिजिटल पेमेंट करें। सुरक्षा से जुड़े पहले और तीसरे बिन्दु (**चित्र-8**) से सम्भवतः इसके विपरीत सन्देश जा सकता है।

चित्र-8 : अध्याय-8, पेज 73 और 75

3. अभिभावकों और बच्चों की गतिविधि पुस्तिका में प्रत्येक गतिविधि का क्या लक्ष्य है, उसके लिए क्या तैयारी करनी है, और गतिविधि को कैसे करना है, इसकी जानकारी स्पष्ट रूप से दी गई है। इसी के साथ यह भी बताया जा सकता है कि गतिविधि में 'कितना समय लगेगा', जिससे अभिभावकों को यह पता चल सके कि इसके लिए उन्हें कितना समय देना होगा। कुछ गतिविधियों के लिए दुकान या बैंक जाना पड़ सकता है, इसलिए पहले से जानकारी मिलने पर घर पर मौजूद अभिभावक या बड़ों को गतिविधि करने की योजना बनाने में और अधिक मदद मिल सकती है।

4. अध्याय-5 की गतिविधि में बच्चों को एक 'लक्ष्य' (एक खिलौना, किसी मनपसन्द स्थान की यात्रा, बैकपैक, या फिर साइकिल आदि) सोचना होता है। फिर उसकी क़ीमत, जेब ख़र्च से हर महीने कितनी बचत कर सकते हैं, और लक्ष्य को हासिल करने में कितना समय लग सकता है, इन सभी के बारे में सोचकर सूची बनानी होती है (**चित्र-9क**)। इसके लिए तुरन्त मिलने वाले मज़े को टालने, क़ीमत का अन्दाज़ा लगाने, हिसाब-किताब रखने, फ़ैसला लेने और अनुमान लगाने की ज़रूरत होती है। ये सब उस उम्र के बच्चों की कार्यक्षमता और गणितीय कौशल से बहुत ज़्यादा है! इसके बजाय इसे 'खेल-खेल में सीखो' के द्वारा आज़माया जा सकता है। मान लीजिए किसी खिलौने की क़ीमत ₹50 है, और बच्चे के पास ₹5 हैं। खिलौना ख़रीदने के लिए उसे और कितने रुपए चाहिए? अब यह घटाने का एक आसान सवाल बन जाता है, या 50 से 5-5 करके पीछे की ओर गिनने का सवाल। अगर बच्चे को हर महीने ₹5 मिलते हैं तो पूरी राशि (पूरे ₹5) बचाने पर खिलौना ख़रीदने के लिए कितने महीने लगेंगे? 50 तक पहुँचने के लिए बार-बार 5 को जोड़ना

(5 + 5 + ...)। अगर हर महीने सिर्फ़ ₹3 की बचत होती है तो कितना समय लगेगा? (3 + 3 + 3...) 50 तक पहुँचने के लिए। 50 तक पहुँचने के लिए कितने 3 की ज़रूरत होगी? आसान चरणों में बाँटने से इस अवधारणा को समझने में बच्चे को सहायता मिलेगी, और वह अभ्यास से घबराएगा नहीं।

5. अध्याय-6 की गतिविधि बच्चों को बजट के नियम (50/30/20) का उपयोग करके धनराशि की विवेकपूर्ण योजना बनाने में सहायता करती है। इसमें आय का 50% ज़रूरतों के लिए, 30% इच्छाओं के लिए और 20% बचत के लिए होता है (**चित्र-9ख**)। फिर से वही, बहुत सारी प्रक्रियाएँ। 6–7 वर्ष की आयु के बच्चों की समझ का स्तर इतना नहीं होता कि वे प्रतिशत की अवधारणा को समझ सकें, उन्हें प्रतिशत की अवधारणा समझाने की पूरी ज़िम्मेदारी बड़ों पर है। अगर सोच यही है कि बड़े ही पूरी तरह से योजना बनाएँ, वास्तविक ख़र्चों का अनुमान लगाकर उनकी तुलना करें, ज़रूरतों, इच्छाओं और बचत के लिए प्रतिशत की गणना करें, तो बड़ा सवाल यह है कि क्या अभिभावक या घर के बड़े लोग अपने दैनिक जीवन की दिनचर्या से समय निकालकर ऐसा करेंगे? और क्या फिर बच्चे से सिर्फ़ शीट में जानकारी भरवाएँगे और ट्रैक करवाएँगे? इससे बच्चा गतिविधि में सक्रिय रूप से शामिल नहीं रह जाता। इससे बेहतर होगा कि ₹20 या ₹50 जैसी छोटी धनराशि की सीमा तय करके बच्चे को उस बजट के अन्दर ज़रूरतों और इच्छाओं को ध्यान में रखते हुए कुछ वस्तुओं को चुनने के लिए कहा जाए, और यह सब 'खेल-खेल में सीखो' (pretend play) के द्वारा किया जा सकता है।

चित्र-9क एवं 9ख : अभिभावक-बच्चे की गतिविधि, पेज 13 और 17

अभी जिस तरह की 'गोल प्लानर' गतिविधि और '50/30/20 नियम' वाली वर्कशीट हैं, वे बच्चे के लिए बहुत ज़्यादा उलझन भरी हो सकती हैं। बड़ों की मदद मिलने पर भी इस उम्र के कई बच्चों के लिए किसी लक्ष्य हेतु लगातार बचत करना मुश्किल हो सकता है। इन गतिविधियों को बड़ी कक्षाओं में ले जाया जा सकता है, जहाँ बच्चे इनमें सीधेतौर पर शामिल हो सकें।

निष्कर्ष

मुख्य हैंडबुक और अभिभावक व बच्चे की गतिविधियों वाली पुस्तिका को एक-दूसरे के साथ जोड़कर देखें तो पता चलता है कि कितनी सार्थकता से बच्चों के दैनिक जीवन के अनुभवों में वित्तीय साक्षरता को शामिल किया जा सकता है। शहरी और ग्रामीण, दोनों परिवेश में रहने वाले बच्चे इन अवधारणाओं और विचारों (केवल डिजिटल पेमेंट को छोड़कर) से ख़ुद को जोड़ने में सक्षम होंगे, क्योंकि जिन बच्चों के आस-पास डिजिटल पेमेंट ज़्यादा सुलभ नहीं है, वे उससे उतने अच्छे तरीक़े से परिचित नहीं होंगे। ये किताबें वित्तीय शब्दावली या बुनियादी हिसाब-किताब के सीमित दायरे तक ही सिमटने के बजाय बच्चों को विकल्पों, संसाधनों और ज़िम्मेदारी के बारे में गहराई से सोचने के लिए प्रेरित करती हैं। हालाँकि जैसा कि पहले वाले भाग में विस्तार से बताया गया है, बच्चों की उम्र के हिसाब से इसे सटीक बनाने के लिए इसमें कुछ बदलाव करने की ज़रूरत होगी।

यह हैंडबुक पहली और दूसरी कक्षा के लिए शुरुआती किताब के तौर पर शिक्षकों और अभिभावकों को कम उम्र से ही बच्चों में वित्तीय समझ विकसित करने का एक उपयुक्त साधन उपलब्ध करवाती है। हालाँकि, इसके वर्तमान स्वरूप में यह किताब गणित सीखने का एक स्वतंत्र साधन न होकर बातचीत शुरू करने के लिए एक पूरक संसाधन की तरह काम करती है। इस किताब को अतिरिक्त निर्देश देने, पैसे से जुड़े संवेदनशील मुद्दों पर बात करने, गतिविधियों के लिए अन्य वैकल्पिक सुझाव देने, और शिक्षकों के मार्गदर्शन के लिए नोट्स की निश्चित रूप से आवश्यकता है, ताकि इस किताब के साथ न्याय हो सके। अभी यह काफ़ी हद तक इस पर निर्भर करता है कि शिक्षक बच्चों की उम्र, माहौल और सुविधाओं के हिसाब से इस किताब में दी गई जानकारी को किस तरह अपनाते हैं, जिसका मतलब यह हुआ कि सभी को एक जैसा अनुभव नहीं मिल पाता।

References

1. National Finance Olympiad. (n.d.). *About us.* https://nationalfinanceolympiad.com/about-us
2. National Council of Educational Research and Training. (2025). *Learning outcomes for the foundational stage.* https://shorturl.at/hpTmZ

Images from the Personal Finance Handbook for Grades 1 & 2, reproduced with permission from the National Finance Olympiad (NFO).

क्षमा चक्रवर्ती एक शिक्षक-प्रशिक्षक हैं। उन्होंने आईआईटी मद्रास से गणित में और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी से शिक्षा में स्नातकोत्तर उपाधि प्राप्त की है। गणित शिक्षा में 15 से अधिक वर्षों के अनुभव के साथ, उन्होंने सामग्री विकास, शिक्षण और शिक्षक प्रशिक्षण जैसे क्षेत्रों में काम किया है, साथ ही विद्यार्थियों के साक्षात्कार आयोजित किए हैं और आकलन तैयार किए हैं। नन्हें दिमाग़ों को सँवारने के लिए उत्साहित, क्षमा को छोटे बच्चों के साथ समय बिताना और प्रकृति का आनन्द लेना पसन्द है। उनसे kshamagc@gmail.com पर सम्पर्क कि या जा सकता है।

अनुवाद : प्रियेश गुप्ता **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल

लेख आमंत्रित हैं...

एट राइट एंगल्स भारत की सार्वजनिक शिक्षा प्रणाली में गणितीय शिक्षा को समर्पित एक गुणवत्तापूर्ण संसाधन है। इसे विशेषकर बुनियादी, प्राथमिक और माध्यमिक पाठशालाओं के शिक्षक और शिक्षक-प्रशिक्षकों के लिए तैयार किया गया है।

हम गणित के शिक्षकों, शिक्षाविदों, अभ्यासकर्ताओं (प्रैक्टिसनर्स), अभिभावकों और विद्यार्थियों से लेख आमंत्रित करते हैं। यदि आप एक ऐसा मंच तलाश रहे हैं जो ख़ासतौर से लगभग 6-14 साल के विद्यार्थियों के गणित के सीखने के अनुभव को समृद्ध करता हो और बढ़ाता हो, तो यह पत्रिका आपके लिए है। आपके लेखों का स्वागत है।

विषय एवं थीम के लिए सुझाव

भेजे जाने वाले लेख कक्षा-1 से 8 की पाठ्यक्रम सामग्री पर केन्द्रित होने चाहिए। लेखों से अपेक्षा है कि वे :

- स्कूली शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2023 (NCF-SE-2023) में उल्लेखित विषय और थीम को विस्तारपूर्वक समझा सकें और दर्शा सकें।
- ख़ासकर NCF-SE-2023 में चर्चित चुनौतियों को सम्बोधित करते हों।
- गणितीय इतिहास या गणितीय सोच के इतिहास का प्रमाणित विवरण हों।
- विद्यार्थियों को रिवीजन और अभ्यास में तल्लीन रखने के लिए नवाचारी वर्कशीट या तरीक़ों को शामिल कर सकें।
- बच्चों के सन्दर्भ में प्रासंगिक, गणित के रोज़मर्रा जीवन में उपयोग का वर्णन कर सकें।
- अन्तःविषयक गतिविधियों और परियोजनाओं (प्रोजेक्ट) का वर्णन कर सकें।
- पाठ्यक्रम से जुड़ी पहेलियों और खेलों की समीक्षा कर सकें।
- ऑनलाइन रिसोर्स सहित प्रासंगिक सामग्री के चयन पर मार्गदर्शन कर सकें।
- बुनियादी संख्या ज्ञान के साथ-साथ गणनात्मक सोच के लिए शैक्षणिक रणनीतियाँ विकसित कर सकें।
- विभिन्न शैक्षणिक पद्धतियों को लागू करने में शिक्षकों की सहायता कर सकें।
- टीचिंग लर्निंग मटेरियल (टीएलएम) की समीक्षा कर सकें या गणित की कक्षा में स्थानीय सन्दर्भ और स्थानीय टीएलएम का उपयोग कैसे करें इसके बारे में बता सकें।
- विद्यार्थियों में अवधारणात्मक समझ की खाई को पाटने में सहायता करने के लिए सामग्री प्रदान कर सकें।
- आकलन में आने वाली परेशानियों का समाधान कर सकें।
- गणित सीखने के दौरान होने वाली ग़लतफ़हमियों को पहचानने और समझने के लिए उपाय सुझा सकें।
- समस्याओं की सूची, उनके हल पर चर्चा एवं समस्या-समाधान की रणनीतियों सहित दे सकें, जो कि सामान्यतौर पर पाठयपुस्तकों में नहीं मिलती।

बड़े लेखों के अलावा हम छोटे लेखों का भी स्वागत करते हैं जिनमें विविध तरह की रोचक सामग्री शामिल हो। जैसे किसी किताब या गणित के सॉफ्टवेयर की समीक्षा या गणितीय थीम पर आधारित यूट्यूब की कोई क्लिप। प्रूफ़ विदाउट वर्ड्स (proofs without words), गणितीय अन्तर्विरोध (mathematical paradoxes), असिद्धीकरण (false proofs) पर आधारित लेख हो सकते हैं। गणितीय विषयों पर आधारित कविता, कार्टून या तस्वीरों (photographs) जैसी रचनात्मक अभिव्यक्तियों को शामिल करते लेख हो सकते हैं। आप किसी गणितज्ञ से जुड़े क़िस्से या 'हस्तशिल्प में गणित, फ़िल्मों में गणित' जैसे रोचक विषयों पर भी लेख भेज सकते हैं।

लेख AtRightAngles.editor@apu.edu.in पर भेजें।

कृपया आगे दी गई सम्पादकीय नीतियों और दिशा-निर्देशों को भी देखें।

लेखों को स्वीकार करने की नीति

एट राइट एंगल्स पूर्णत: प्रारम्भिक गणित और गणितीय शिक्षा से सम्बन्धित मुद्दों पर केन्द्रित पत्रिका है। इसलिए लेखों का प्रयास होना चाहिए कि वे गणित के आम मिथकों, धारणाओं और भ्रान्तियों से परे हों।

पत्रिका में कहीं और से नक़ल या चोरी करके भेजे गए लेखों के लिए बिल्कुल भी जगह नहीं है। लेखक द्वारा लेख को प्रकाशन के लिए भेजे जाने पर माना जाता है कि वह मौलिक है और प्रकाशन के लिए उस पर किसी भी तरह का क़ानूनी प्रतिबन्ध नहीं है (जैसे किसी अन्य का कॉपीराइट स्वामित्व)। लेख में जहाँ भी उपयुक्त हो वहाँ प्रासंगिक सन्दर्भ और स्रोतों का उल्लेख किया जाना चाहिए।

एट राइट एंगल्स पत्रिका अन्य भारतीय भाषाओं में भी अनूदित होती है। इसलिए, अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी को पत्रिका में प्रकाशित सभी लेखों का अन्य भाषाओं में अनुवाद और प्रसार करने का अधिकार होगा।

यदि भेजा गया लेख पहले कहीं प्रकाशित हो चुका है, तो लेखक से अनुरोध है कि वे पूर्ववर्ती प्रकाशक से अन्यत्र पुनर्प्रकाशन के लिए अनुमति अवश्य प्राप्त कर लें। और लेख के अन्त में 'लेखक का नोट' के तहत इसका उल्लेख करें। इसके अलावा, यह अपेक्षा भी की जाती है कि लेखक हमारे रिकॉर्ड के लिए अनुमति पत्र की एक कॉपी लेख के साथ भेजें। इसी तरह, यदि लेखक ***एट राइट एंगल्स*** में प्रकाशित अपना लेख पुनः प्रकाशन के लिए कहीं और भेज रहे हैं तो उनसे अपेक्षा है कि वे ***एट राइट एंगल्स*** को यथोचित श्रेय अवश्य दें।

एट राइट एंगल्स में विविध तरह के लेखों का स्वागत है। ऐसे लेख जो गुणवत्ता की दृष्टि से अच्छे हैं लेकिन इस पत्रिका में प्रकाशन के लिए उपयुक्त नहीं हैं, उनका उपयोग लेखक की सहमति से यूनिवर्सिटी की अन्य पत्रिकाओं में किया जा सकता है।

लेखकों के लिए विशेष दिशा–निर्देश

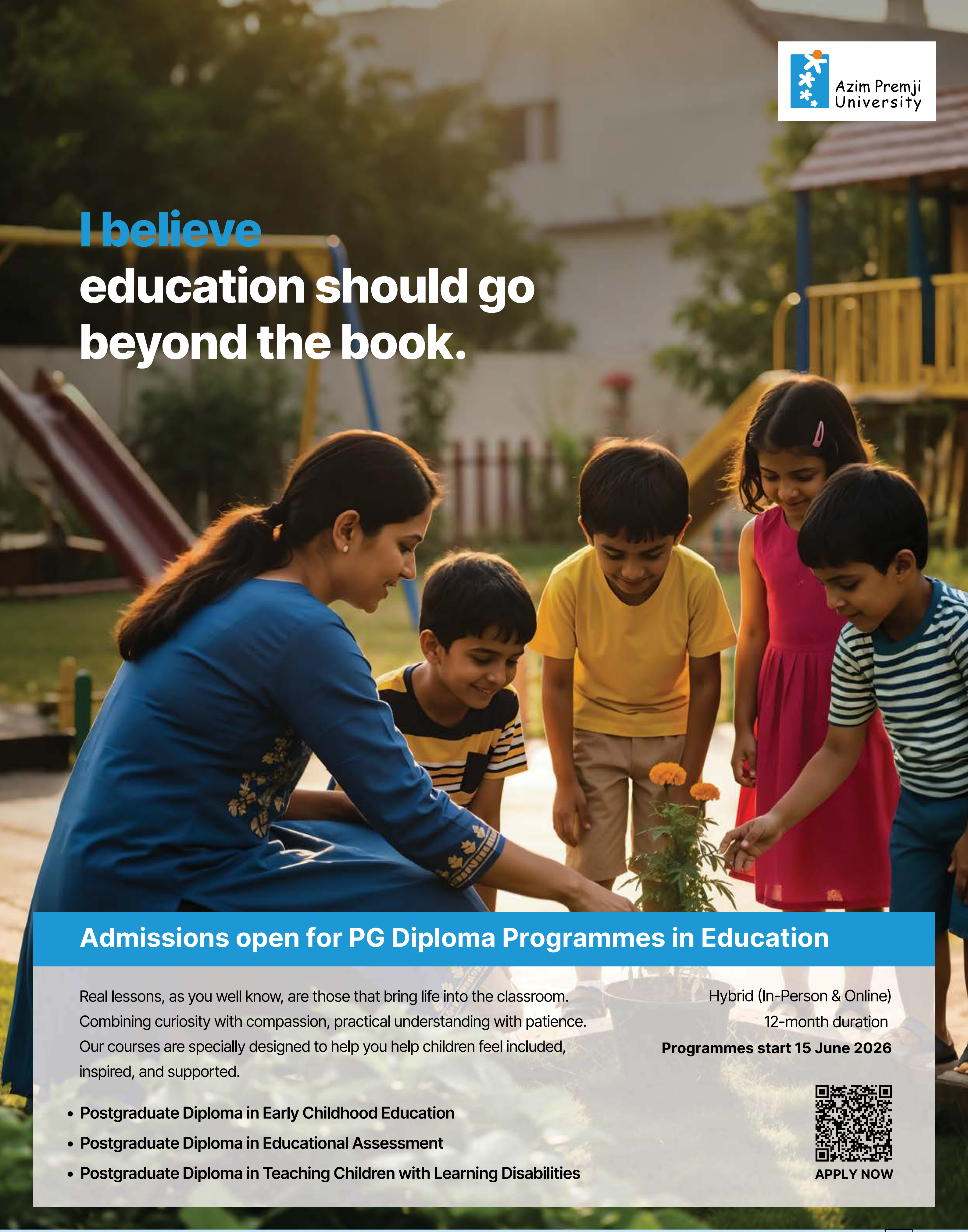
अगर आप ***एट राइट एंगल्स*** के लिए लिख रहे हैं तो कृपया इन दिशा-निर्देशों पर ध्यान दें :

1. **रोचक परिचय** : शुरुआत से ही पाठक का ध्यान आकर्षित करने के उद्देश्य से पठनीय और रोचक शैली में लिखें। लेख के पहले पैराग्राफ़ से ही स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लेख किस विषय के बारे में है। उदाहरण के तौर पर, शुरुआती पैराग्राफ़ एक अप्रत्याशित निष्कर्ष हो सकता है, एक चुनौती हो सकती है, एक मज़ेदार सवाल के साथ चित्र हो सकता है या एक प्रासंगिक क़िस्सा हो सकता है। ख़ासतौर से ये आगे पढ़ते जाने की रुचि पैदा करने वाला होना चाहिए।
2. **लुभावना शीर्षक** : लेख का शीर्षक एक उपयुक्त और लुभावने वाक्यांश से दिया जाए, जिसमें लेख की भावना और सत्व झलके।
3. **शैली** : प्रमाण-सिद्ध प्रारूप (Theorem-Proof Format) में लेख लिखने से परहेज़ करें। इसकी बजाय, अनौपचारिक तरीक़े से प्रमाणों (Proofs) को लेख में एकीकृत करें।
4. **सन्तुलन** : लम्बी-लम्बी गणनाओं को दर्शाने से बचें। बहुत अधिक विवरण देने और छिपी हुई (अ-उल्लेखित) गणनाओं पर निर्भर चरण को छोड़कर अगले चरण पर चले जाने, के बीच सन्तुलन बनाकर रखें।
5. **सुलभ भाषा** : उन विशिष्ट शब्दावली और संकेत शब्दों के उपयोग को टालें जिनसे सिर्फ़ विशेषज्ञ ही परिचित होते हैं। यदि तकनीकी शब्दों का उपयोग ज़रूरी हो तो उन्हें परिभाषित कर दें।
6. **दृश्यों का प्रयोग** : जहाँ सम्भव हो वहाँ ऐसे रेखाचित्र या फ़ोटो दें जिनमें गणितीय विचार का सार हो। यदि कोई चित्र या रेखाचित्र गणित की किसी अवधारणा को स्पष्ट करते हों तो उन्हें अवश्य रखें।
7. **संक्षिप्त सन्दर्भ** : संक्षिप्त अनुशंसाओं के साथ सन्दर्भों (reference) की एक संक्षिप्त सूची दें।
8. **अभ्यास और सवाल** : लेख की शुरुआत या अन्त में विचार करने के लिए कुछ सवाल और कुछ अभ्यास उपलब्ध कराएँ।
9. **उद्धरण प्रारूप (Citation Format)** : लेख के अन्त में, स्रोतों और सन्दर्भों को जिस क्रम में वे आए हैं उस ही क्रम में उन्हें उद्धृत (cite) करें। फ़ुटनोट से बचें। यदि फ़ुटनोट की आवश्यकता है, तो उनका क्रम डालकर अलग से लिखें।
10. **संक्षिप्ताक्षर और परिवर्णी शब्द (Abbreviations and Acronyms)** : लेख में जब पहली बार किसी शब्द का लघु रूप (यानी संक्षिप्ताक्षर) और कई शब्दों के शुरुआती अक्षर का प्रचलित लघु रूप (यानी परिवर्णी) आए तब वहीं उनका अर्थ बता दें। ऐसे सभी शब्दों की एक शब्दावली बनाकर उसे लेख के अन्त में प्रस्तुत करें।
11. **चित्रों को नामांकित करना** : लेख में आने वाले सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों पर चित्र क्रमांक डालें और उनका विवरण लिखें। इन सभी चित्रों, रेखाचित्रों, तस्वीरों को स्पष्ट निर्देशों के साथ ई-मेल में अलग से अटैच करें। (ध्यान दें कि खीचीं गई तस्वीरों या स्कैन तस्वीरों की गुणवत्ता 300dpi से कम नहीं होना चाहिए।)
12. **चित्रों का विवरण स्पष्टता से दें** : तस्वीरों, चित्रों, डायग्राम्स और तालिकाओं का उल्लेख उनके उचित क्रमांक से करें। 'यहाँ', 'वहाँ', 'दाईं ओर', 'बाईं ओर', 'ऊपर', 'नीचे' इस तरह से उल्लेख करने से परहेज़ करें।
13. **लेखक का परिचय** : लेखक अपनी हाई रिज़्योलूशन फ़ोटो भी भेजें। साथ ही, अपने बारे में संक्षिप्त में (जो 50 शब्दों से ज़्यादा का नहीं हो) जानकारी भेजें, जो पाठकों को आपके अनुभव व विशेष योग्यता वाले कार्यक्षेत्र के बारे में बताती हो।
14. **ब्रिटिश वर्तनी (Spellings)** : ब्रिटिश वर्तनी का पालन करें। जैसे organise लिखें न कि organize; colour लिखें न कि color, neighbour लिखें न कि neighbor आदि।
15. आप अपने लेख **हिन्दी** में भी भेज सकते हैं। उपयुक्त होने पर हम उन्हें अँग्रेज़ी में अनूदित करके प्रकाशित करेंगे।
16. **लेख भेजने का प्रारूप** : लेखों को MS Word या LaTex में लिखकर ही भेजें।

मुद्रक तथा प्रकाशक ऋषिकेश बी.एस., रजिस्टार द्वारा अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी के लिए आदर्श प्रा.लि., 4 शिखरवार्ता, प्रेस काम्पलेक्स, जोन-1, एम.पी.नगर, भोपाल 462 011 से मुद्रित

और अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी, सर्वे नम्बर 66, बुरुगुंटे विलेज, बिक्कनाहल्ली मेन रोड, सरजापुरा,बेंगलूरु, कर्नाटक- 562 125 से प्रकाशित

सम्पादक : स्नेहा टाइटस



Campuses: **Bengaluru** | **Bhopal** | **Ranchi**
Programmes: **Undergraduate** | **Postgraduate** | **Diplomas & Certificates**

Azim Premji University

If you have a purpose, **we have the programme.**

Admissions open for Undergraduate and Postgraduate programmes

If you believe an education should offer more than a degree.
If you seek holistic learning that goes beyond the classroom.
If you dream of leaving the world better than you found it.
If you seek mentors who inspire, not just instruct.
If you're restless for opportunities that match your ambition.
If you're driven by a higher purpose, then this is your next step.
Towards a just, equitable, humane and sustainable society.

Campuses: **Bengaluru | Bhopal | Ranchi**
Programmes: **Undergraduate | Postgraduate | Diplomas & Certificates**

APPLY NOW

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी

एट राइट एंगल्स

स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

Azim Premji University

कक्षा में गणितीय संवाद

पद्मप्रिया शिराली

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी का प्रकाशन

कक्षा में गणितीय संवाद

की-वर्ड : *शैक्षिक रणनीतियाँ, चर्चा, तर्क करना, सम्प्रेषण, समावेशन*

गणित शिक्षण में गणितीय संवाद (Math Talk) का कितना महत्त्व है?

इस सवाल का उत्तर देने से पहले, आइए अपने-आप से कुछ अन्य सवाल पूछें। यदि कक्षा में शिक्षक सिर्फ़ वही सवाल पूछते हैं जिनके उत्तर 'हाँ' या 'नहीं' में दिए जा सकते हैं, तो क्या ऐसी कक्षा विद्यार्थियों को अपने ज्ञान की वास्तविक समझ को अभिव्यक्त करने का अवसर देती है? क्या इससे उनकी ग़लतियाँ या ग़लत धारणाएँ सामने आती हैं? क्या ऐसी कक्षा में विद्यार्थियों को एक-दूसरे से सीखने का मौक़ा मिलता है? क्या वे यह देख पाते हैं कि उनके सहपाठी किसी सवाल को किस तरह समझते और हल करते हैं? निस्सन्देह, इन सभी प्रश्नों का उत्तर है 'नहीं'।

यहाँ कुछ महत्त्वपूर्ण तरीक़े बताए गए हैं जिनसे गणितीय संवाद करने वाली कक्षा में विद्यार्थियों को लाभ मिलता है।

ऐसी कक्षा में विद्यार्थी :

- सोच-समझकर गणित के सवाल हल करना सीखते हैं, और अपने उत्तर का कारण बता पाते हैं।
- उनके उत्तर सही हैं या नहीं, इसकी जाँच स्वयं करना सीखते हैं।
- अपने सहपाठियों के साथ चर्चा करते हैं, और मिलकर काम करना सीखते हैं।
- गणित की अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को अच्छी तरह समझते हैं।
- इस तरह गहराई से जुड़ने से सीखी हुई बातें लम्बे समय तक याद रख पाते हैं।

क्या प्राथमिक स्तर पर गणितीय संवाद सम्भव हो सकता है? क्या ये उद्देश्य उन विद्यार्थियों के लिए अति महत्त्वाकांक्षी हैं जो अभी गणित को सीखना शुरू कर रहे हैं? यदि प्राथमिक कक्षा में गणित पढ़ाने का तरीक़ा टॉप-डाउन, शिक्षक-केन्द्रित और सत्ता-केन्द्रित हो (यानी जहाँ शिक्षक ही सब कुछ बताएँ, और विद्यार्थियों को अपनी बात कहने का अवसर न मिले) तो माध्यमिक कक्षाओं में विद्यार्थियों के लिए इस तरीक़े को बदलना सहज नहीं होगा। ऐसे में वे तर्क करने, ग़लती करके सीखने, अपने उत्तर की जाँच करने, और किसी सवाल को हल करने के अलग-अलग तरीक़े अपनाने का आत्मविश्वास नहीं बना पाएँगे।

पहली कक्षा से ही शिक्षक विद्यार्थियों को वस्तुओं और आसान बातचीत की मदद से गणित समझाने, और अपने उत्तर का कारण बताने के लिए प्रोत्साहित कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, 2 और 3 मिलकर 5 क्यों होते हैं; 7, 4 से बड़ा क्यों है आदि।

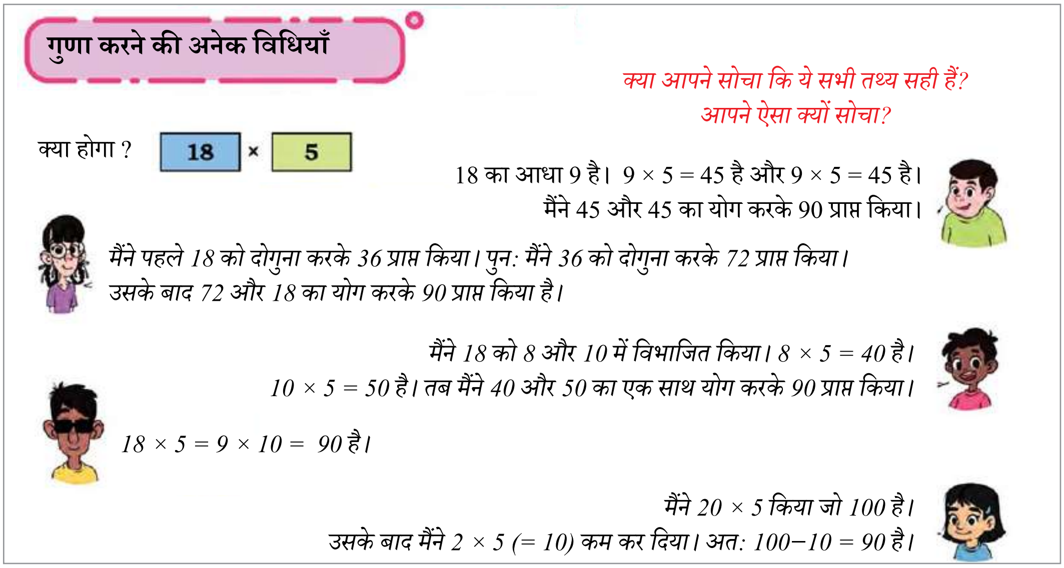
शिक्षक ऐसे सवाल भी पूछ सकते हैं जिनसे विद्यार्थी अपनी सोच बता सकें। जैसे–

- *इस ख़ाली जगह में कौन-कौन-सी संख्याएँ भरी जा सकती हैं? आपको ऐसा क्यों लगता है?*

  $8 > _$
- *क्या आप गोटियों का उपयोग करके दिखा सकते हैं कि 2 × 4 और 4 × 2 का उत्तर एक जैसा होता है?*
- *जब किसी संख्या को 4 से गुणा करते हैं तो वही उत्तर क्यों मिलता है जो पहले उसे 2 से गुणा करके, और फिर उस उत्तर को दोबारा 2 से गुणा करने पर मिलता है?*

अकसर शिक्षक समझते हैं कि इस तरह से पढ़ाने पर कक्षा को सँभालना कठिन हो सकता है, या उन्हें यह भी विश्वास नहीं होता कि गणितीय संवाद विद्यार्थियों के सीखने का अच्छा तरीक़ा हो सकता है। कई बार शिक्षकों को यह भी समझ नहीं आता कि शुरुआत कैसे करें। हालाँकि, ऐसी कक्षाएँ आसानी से ली जा सकती हैं जहाँ विद्यार्थी गणित पर खुलकर और सार्थक चर्चा करें।

एनसीईआरटी की कक्षा-5 की पाठ्यपुस्तक में इसका एक उदाहरण दिया गया है जिसे **चित्र-1** में दिखाया गया है। इस लेख में दिए गए उदाहरण बताते हैं कि कक्षा में इस तरह का गणितीय संवाद कैसे हो सकता है। शिक्षक कक्षा


गुणा करने की अनेक विधियाँ

क्या होगा ? 18 × 5

क्या आपने सोचा कि ये सभी तथ्य सही हैं?
आपने ऐसा क्यों सोचा?

18 का आधा 9 है। 9 × 5 = 45 है और 9 × 5 = 45 है।
मैंने 45 और 45 का योग करके 90 प्राप्त किया।

मैंने पहले 18 को दोगुना करके 36 प्राप्त किया। पुन: मैंने 36 को दोगुना करके 72 प्राप्त किया।
उसके बाद 72 और 18 का योग करके 90 प्राप्त किया है।

मैंने 18 को 8 और 10 में विभाजित किया। 8 × 5 = 40 है।
10 × 5 = 50 है। तब मैंने 40 और 50 का एक साथ योग करके 90 प्राप्त किया।

18 × 5 = 9 × 10 = 90 है।

मैंने 20 × 5 किया जो 100 है।
उसके बाद मैंने 2 × 5 (= 10) कम कर दिया। अत: 100−10 = 90 है।

चित्र-1 : एनसीईआरटी की कक्षा-5 की पाठ्यपुस्तक 'गणित मेला' से अनुमति के साथ प्रकाशित।

में ऐसा वातावरण कैसे बना सकते हैं, तथा खुलकर और अच्छा गणितीय संवाद कैसे करवा सकते हैं?

इस लेख में कुछ ऐसे उदाहरण दिए गए हैं जिनसे विद्यार्थी गणित पर आपस में चर्चा करने के लिए प्रेरित हुए। इन संवादों को कई तरीक़ों से कराया जा सकता है।

चित्र-2 स्रोत : एआई द्वारा बनाया गया

शिक्षक दो-दो विद्यार्थियों की जोड़ी बनाकर किसी सवाल को हल करने के लिए कह सकते हैं। विद्यार्थी पहले अपने-अपने तरीक़े से सवाल हल कर सकते हैं। फिर अपने उत्तर की जाँच एक-दूसरे से करवा सकते हैं, और दिखा सकते हैं कि उन्हें एक जैसा उत्तर मिला या नहीं। शिक्षक विद्यार्थियों को मेज़ के चारों तरफ़ चार-चार के समूह में बैठाकर भी काम करवा सकते है। ज़रूरत पड़ने पर हैंडस्-ऑन सामग्री का उपयोग भी किया जा सकता है। शिक्षक विद्यार्थियों को आपस में काम बाँटने के लिए प्रेरित कर सकते हैं, मिलकर काम करने और एक-दूसरे की मदद करना सिखा सकते हैं।

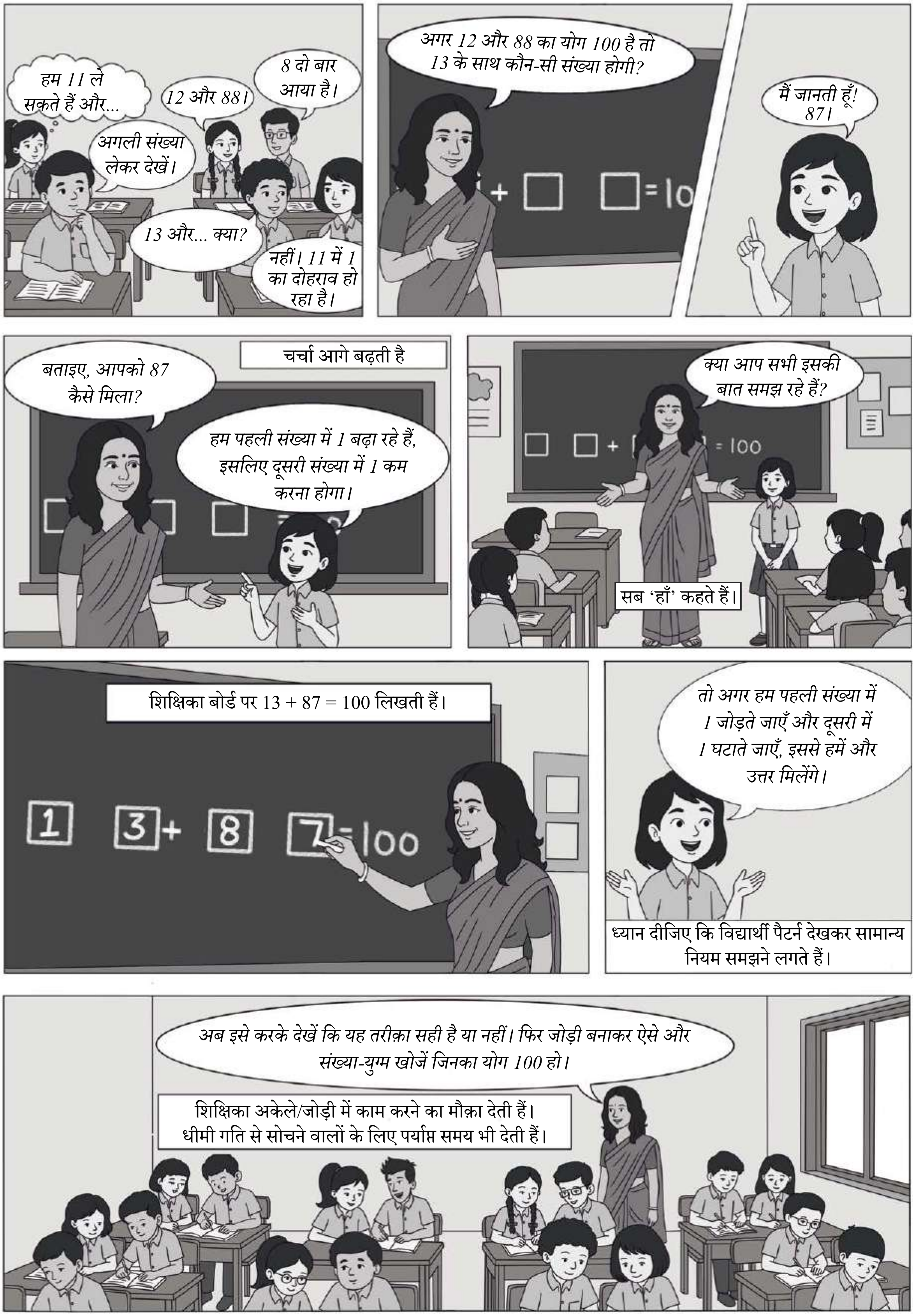
ऐसी चर्चा शुरू करने से पहले कुछ आसान नियम तय कर लेना अच्छा रहेगा। जैसे एक समय में एक ही विद्यार्थी बोले, सभी एक-दूसरे की पूरी बात सुनें और फिर अपनी बात कहें आदि। इससे सभी विद्यार्थियों को अपनी बात रखने का समान अवसर मिलता है, और सभी एक-दूसरे की बात ध्यान से सुनना सीखते हैं।

शिक्षक विद्यार्थियों से इस तरह के सवाल भी पूछ सकते हैं, *"क्या आप बता सकते हैं कि उसने क्या कहा?"* या *"उसका मतलब क्या था?"* इससे विद्यार्थी अपने साथियों की बात को अपने शब्दों में दोहराना, उसे समझना, और अपने उत्तर का कारण बताना सीखते हैं।

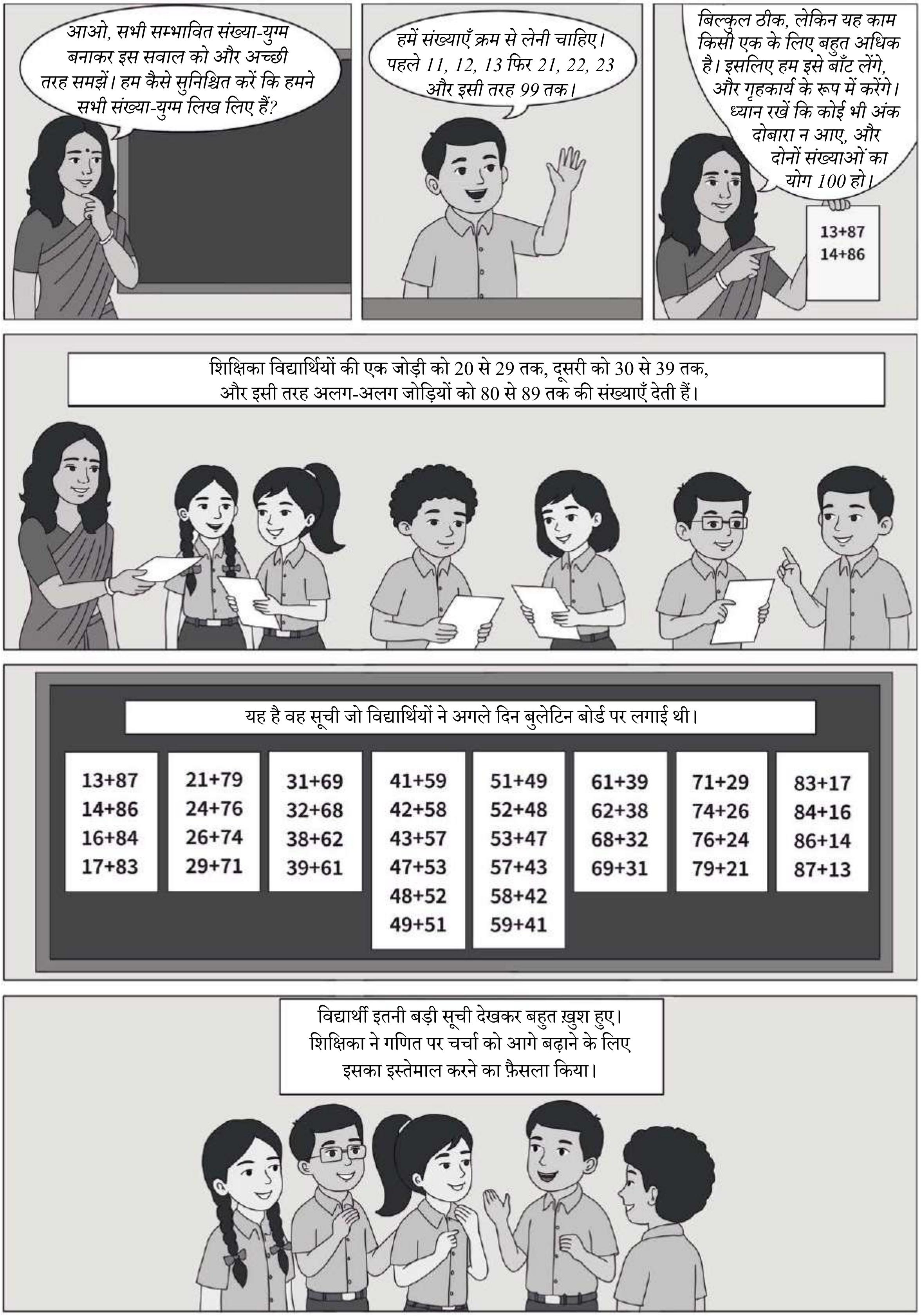
चर्चा के बाद विद्यार्थी अपने काम को पूरी कक्षा के सामने अलग-अलग तरीक़ों से प्रस्तुत कर सकते हैं। विद्यार्थियों के लिखे हुए उत्तर और चित्र कक्षा के बुलेटिन बोर्ड पर लगाए जा सकते हैं। यदि उन्होंने किसी सवाल को हल करने का कोई अलग तरीक़ा बताया है तो उसे भी सभी को दिखाया जा सकता है। खुले उत्तर वाले सवालों के अलग-अलग हल भी प्रदर्शित किए जा सकते हैं। इनसे विद्यार्थियों को यह समझने में मदद मिलती है कि एक ही सवाल को कई तरीक़ों से हल किया जा सकता है, और वे एक-दूसरे से सीखते हैं।

चर्चा-1

कक्षा-4 के विद्यार्थियों का चार-चार के समूहों में कार्य


हम 11 ले सकते हैं और...
12 और 88।
8 दो बार आया है।
अगली संख्या लेकर देखें।
13 और... क्या?
नहीं। 11 में 1 का दोहराव हो रहा है।
अगर 12 और 88 का योग 100 है तो 13 के साथ कौन-सी संख्या होगी?
मैं जानती हूँ! 87।
चर्चा आगे बढ़ती है
बताइए, आपको 87 कैसे मिला?
हम पहली संख्या में 1 बढ़ा रहे हैं, इसलिए दूसरी संख्या में 1 कम करना होगा।
क्या आप सभी इसकी बात समझ रहे हैं?
सब 'हाँ' कहते हैं।
शिक्षिका बोर्ड पर 13 + 87 = 100 लिखती हैं।
1 3+ 8 7=100
तो अगर हम पहली संख्या में 1 जोड़ते जाएँ और दूसरी में 1 घटाते जाएँ, इससे हमें और उत्तर मिलेंगे।
ध्यान दीजिए कि विद्यार्थी पैटर्न देखकर सामान्य नियम समझने लगते हैं।
अब इसे करके देखें कि यह तरीक़ा सही है या नहीं। फिर जोड़ी बनाकर ऐसे और संख्या-युग्म खोजें जिनका योग 100 हो।
शिक्षिका अकेले/जोड़ी में काम करने का मौक़ा देती हैं। धीमी गति से सोचने वालों के लिए पर्याप्त समय भी देती हैं।

अब 14 और 86 लेकर देखते हैं। यह सही है।
फिर 15 + 85 लेकर देखते हैं, लेकिन 5 दो बार आ रहा है, तो यह सही नहीं है।
तब 16 और 84 को देखते हैं। यह सही है।
दूसरी संख्याएँ भी लिखते हैं। 17 + 83, फिर 18 + 82 (नहीं, नहीं)।
19 और 91 भी नहीं ले सकते। लगता है, अब सभी उत्तर मिल गए हैं।
क्या आपने सभी तरीक़े आज़मा लिए हैं?
विद्यार्थियों को पक्का पता नहीं है, वे चुप रहते हैं।
क्या 2-अंकीय संख्याएँ किसी दूसरे अंक से भी शुरू हो सकती हैं?
हाँ, हम 21, 22 और आगे की संख्याओं से भी शुरू करके देख सकते हैं।
क्या आप सभी को कुछ उत्तर मिले? जो उत्तर मिले हैं, उन्हें बोर्ड पर लिखो।
विद्यार्थी बोर्ड पर कुछ संख्या-युग्म लिखते हैं। कुछ संख्या-युग्म एक जैसे होते हैं। शिक्षिका कुछ ख़ास संख्या-युग्मों की ओर ध्यान दिलाती हैं।


आओ, सभी सम्भावित संख्या-युग्म बनाकर इस सवाल को और अच्छी तरह समझें। हम कैसे सुनिश्चित करें कि हमने सभी संख्या-युग्म लिख लिए हैं?
हमें संख्याएँ क्रम से लेनी चाहिए। पहले 11, 12, 13 फिर 21, 22, 23 और इसी तरह 99 तक।
बिल्कुल ठीक, लेकिन यह काम किसी एक के लिए बहुत अधिक है। इसलिए हम इसे बाँट लेंगे, और गृहकार्य के रूप में करेंगे। ध्यान रखें कि कोई भी अंक दोबारा न आए, और दोनों संख्याओं का योग 100 हो।
13+87
14+86
शिक्षिका विद्यार्थियों की एक जोड़ी को 20 से 29 तक, दूसरी को 30 से 39 तक, और इसी तरह अलग-अलग जोड़ियों को 80 से 89 तक की संख्याएँ देती हैं।
यह है वह सूची जो विद्यार्थियों ने अगले दिन बुलेटिन बोर्ड पर लगाई थी।
13+87 14+86 16+84 17+83
21+79 24+76 26+74 29+71
31+69 32+68 38+62 39+61
41+59 42+58 43+57 47+53 48+52 49+51
51+49 52+48 53+47 57+43 58+42 59+41
61+39 62+38 68+32 69+31
71+29 74+26 76+24 79+21
83+17 84+16 86+14 87+13
विद्यार्थी इतनी बड़ी सूची देखकर बहुत ख़ुश हुए। शिक्षिका ने गणित पर चर्चा को आगे बढ़ाने के लिए इसका इस्तेमाल करने का फ़ैसला किया।

तालिका को देखकर आपको क्या समझ में आ रहा है? इन संख्या-युग्मों के बारे में आप क्या जानते हैं?
32+68
38+62
41+59
42+58
43+57
47+53
48+52
49+51
51+49
52+48
53+47
57+43
58+42
59+41
61+39
62+38
68+32
69+31
4 दहाई और 5 दहाई वाली संख्याओं के संख्या-युग्म ज़्यादा हैं।
बहुत अच्छा, अब पहले स्तम्भ को ध्यान से देखो। इन संख्या-युग्मों में आपको क्या दिखाई देता है?
मुझे लगता है कि इन संख्या-युग्मों में इकाई के अंक आपस में बदल गए हैं। 13 + 87 अब 17 + 83 हो गया है।
14 + 86 की जगह 16 + 84 आ गया है।
ऐसा क्यों हुआ?
ऐसा इसलिए क्योंकि 3 + 7 और 7 + 3 का योग एक समान होता है।
ऐसा दूसरे स्तम्भों में भी हुआ है।
इसीलिए हर स्तम्भ में संख्या-युग्मों की संख्या सम है।
क्या कोई समझा सकता है कि उसने क्या कहा?
उसने बताया कि इकाई के अंक बदलने पर एक संख्या-युग्म से दूसरा संख्या-युग्म बनाया जा सकता है।
इसलिए हमेशा ऐसे दो संख्या-युग्म बनते हैं। इसी कारण कुल संख्या-युग्मों की संख्या सम होती है।
बिल्कुल सही।

क्या आपने किसी और बात पर ग़ौर किया?
विद्यार्थी शान्त हैं।
अगर हम चौथी और पाँचवीं सूची को साथ में देखें तो क्या दिखाई देता है?
अरे! पाँचवीं सूची में ये संख्याएँ उल्टे क्रम में हैं।
उल्टा क्रम क्या है? इससे आपका क्या मतलब है?
उसका मतलब है कि संख्या-युग्म उल्टे क्रम में लिखे गए हैं।
क्या आप इसका एक उदाहरण दे सकते हैं?
चौथी सूची में 49 + 51 आख़िरी संख्या-युग्म है, वहीं पाँचवीं सूची में 51+ 49 पहला संख्या-युग्म है।
संख्या-युग्म तो वही है, केवल दोनों संख्याओं की जगह बदल गई है। क्या इससे योग बदल सकता है?
नहीं, क्योंकि 3 + 5 और 5 + 3 का योग बराबर होता है।
ओह! 50 तक के उत्तर मिलने के बाद, हम उन्हें उल्टे क्रम में भी लिख सकते थे।
यह सममिति जैसा है!
बहुत बढ़िया! आपने अच्छी बात पर ध्यान दिया।

आगे की चर्चा के लिए सवाल

- क्या आपने ग़ौर किया कि कौन-सा अंक कभी इकाई के स्थान पर नहीं आता?
- क्या सभी सम्भव संख्या-युग्म खोजने का कोई और तरीक़ा हो सकता है?

शिक्षिका द्वारा इस्तेमाल की गई शिक्षण रणनीतियाँ

- शिक्षिका ने इस सवाल की मदद से विद्यार्थियों को गणित पर खुलकर चर्चा करने के लिए प्रेरित किया।
- विद्यार्थियों ने अपने शब्दों में सवाल को समझाया।
- चर्चा के दौरान सवाल की सभी शर्तों को समझा गया।
- विद्यार्थियों ने मिलकर अपने उत्तरों पर विचार किया, और उन्हें अपने तर्क के बारे में अपनी समझ स्पष्ट करने का मौक़ा मिला।
- जोड़ी में काम करने से अधिक विद्यार्थियों ने भाग लिया, विशेषकर उन विद्यार्थियों ने जो सामान्यतः कम बोलते हैं।
- शिक्षिका ने विद्यार्थियों को सभी सम्भव उत्तर क्रम से खोजने का तरीक़ा बताया।
- गृहकार्य कक्षा में किए गए काम का विस्तार था। इससे विद्यार्थियों को स्वयं सोचने और नए समाधान खोजने का अवसर मिला।
- शिक्षिका ने विद्यार्थियों को पैटर्न पहचानने और उसके पीछे का कारण समझाने के लिए प्रेरित किया। उन्होंने एक विद्यार्थी से दूसरे विद्यार्थी की बात अपने शब्दों में दोहराने के लिए कहा। इससे सभी ने एक-दूसरे की बात ध्यान से सुनी, और सभी के विचारों को महत्त्व मिला।
- शिक्षिका ने विद्यार्थियों को सही गणितीय शब्दों का प्रयोग करने के लिए प्रोत्साहित किया।
- अंकगणित के नियमों को फिर से समझाया और उनका अभ्यास कराया।
- एक ही गतिविधि से सीखने के कई उद्देश्य सफलतापूर्वक प्राप्त हो गए।
- क्या आपने शिक्षिका द्वारा इस्तेमाल की गई किसी और रणनीति पर ग़ौर किया?

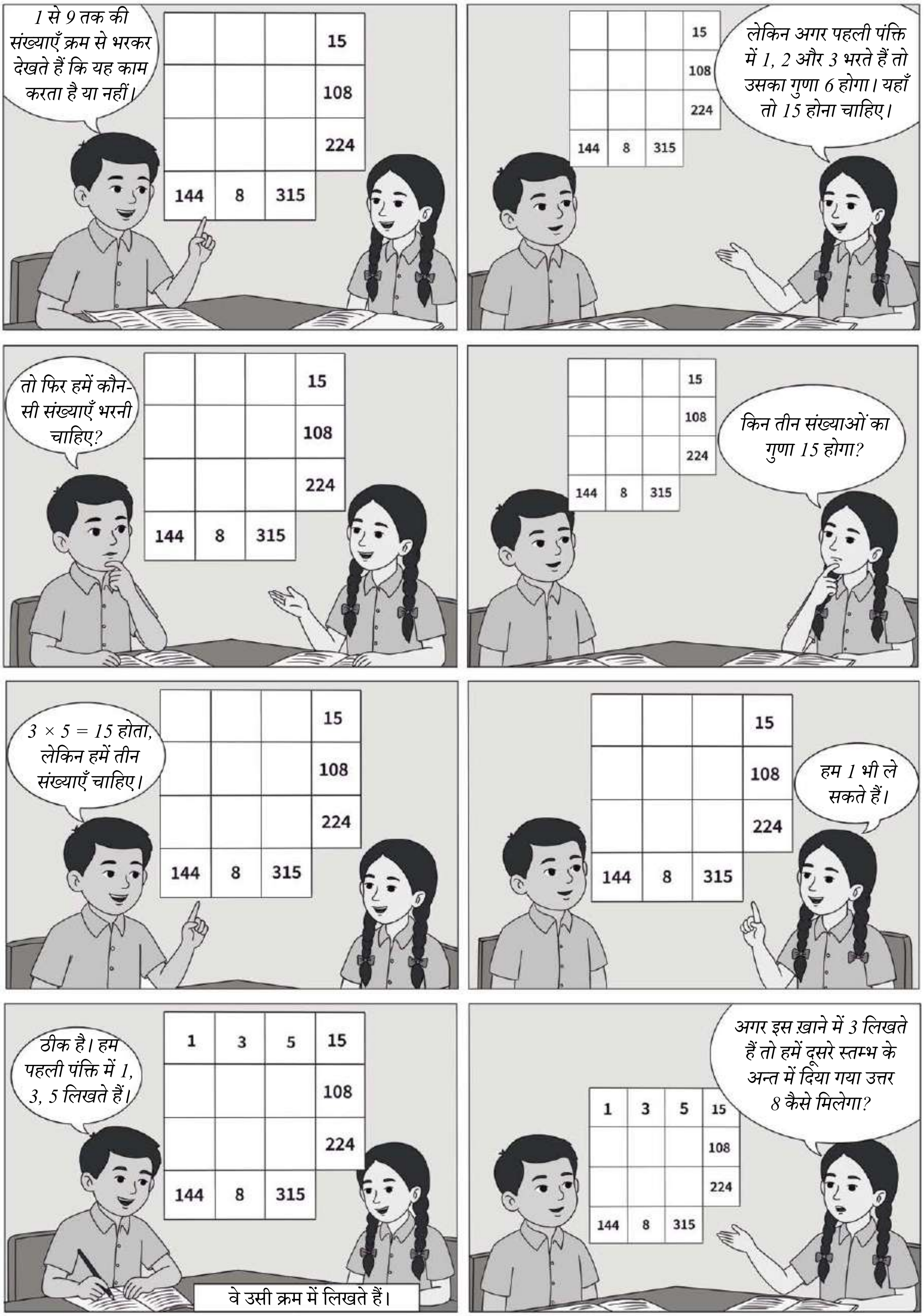
आगे दी गई चर्चाओं में कुछ अन्य रणनीतियों को समझने की कोशिश करें। शिक्षिका क्या अलग कर रही हैं? कौन-सी बातें पहले जैसी हैं? आपके अनुसार शिक्षिका के मुख्य उद्देश्य क्या हैं?

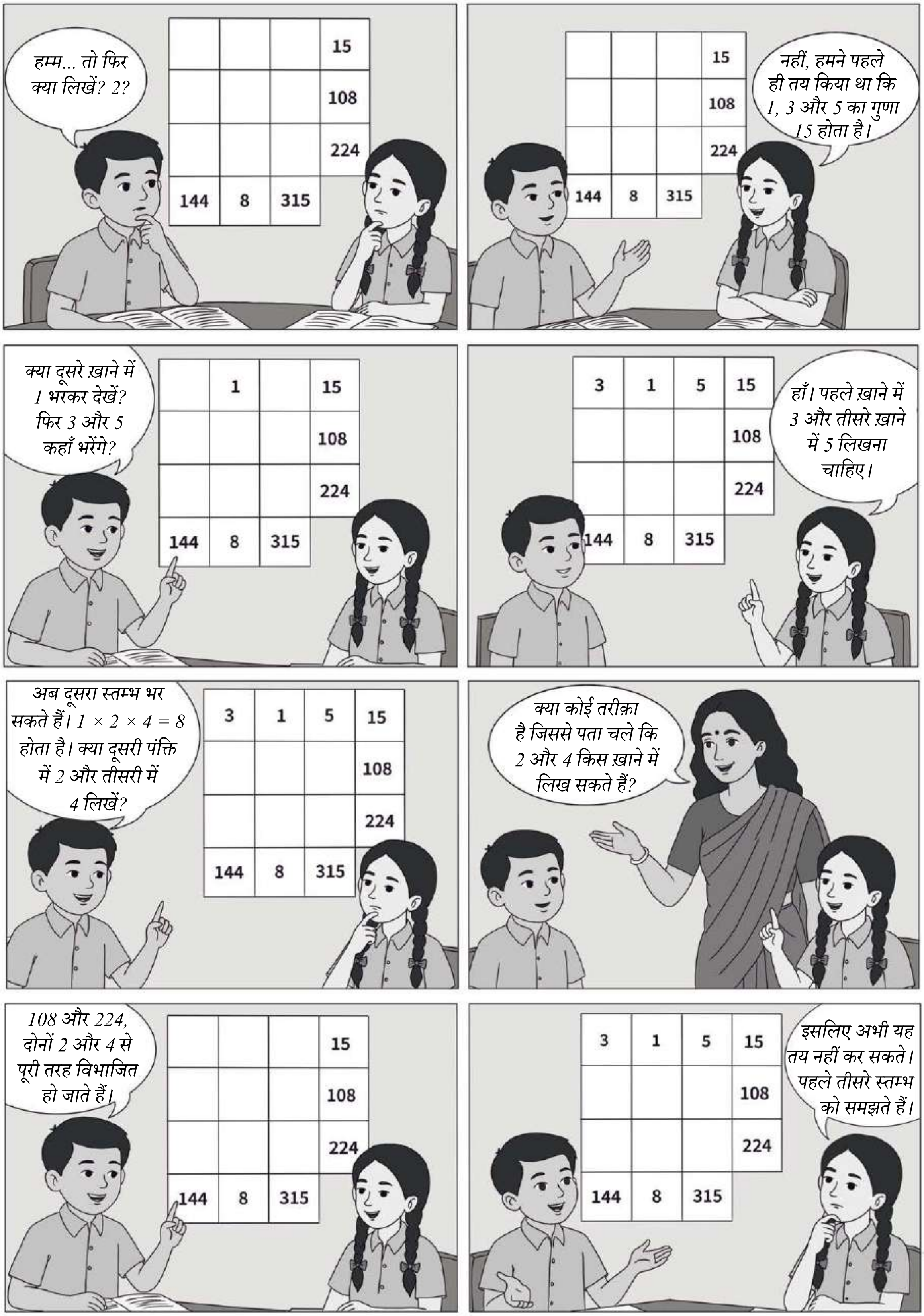
चर्चा-2

कक्षा-5 के विद्यार्थियों का जोड़ी में कार्य

			15
			108
			224
144	8	315	

यह 3 × 3 का गुणा वर्ग है। हर पंक्ति और हर स्तम्भ के अन्त में दी गई संख्या, उस पंक्ति या स्तम्भ की तीनों संख्याओं का गुणनफल है। 1 से 9 तक की संख्याओं का केवल एक-एक बार उपयोग करके ख़ाली ख़ाने भरें, जिनका गुणा करने पर दिया गया गुणनफल ही प्राप्त हो।


1 से 9 तक की संख्याएँ क्रम से भरकर देखते हैं कि यह काम करता है या नहीं।
लेकिन अगर पहली पंक्ति में 1, 2 और 3 भरते हैं तो उसका गुणा 6 होगा। यहाँ तो 15 होना चाहिए।
तो फिर हमें कौन-सी संख्याएँ भरनी चाहिए?
किन तीन संख्याओं का गुणा 15 होगा?
3 × 5 = 15 होता, लेकिन हमें तीन संख्याएँ चाहिए।
हम 1 भी ले सकते हैं।
ठीक है। हम पहली पंक्ति में 1, 3, 5 लिखते हैं।
वे उसी क्रम में लिखते हैं।
अगर इस ख़ाने में 3 लिखते हैं तो हमें दूसरे स्तम्भ के अन्त में दिया गया उत्तर 8 कैसे मिलेगा?


हम्म... तो फिर क्या लिखें? 2?
नहीं, हमने पहले ही तय किया था कि 1, 3 और 5 का गुणा 15 होता है।
क्या दूसरे ख़ाने में 1 भरकर देखें? फिर 3 और 5 कहाँ भरेंगे?
हाँ। पहले ख़ाने में 3 और तीसरे ख़ाने में 5 लिखना चाहिए।
अब दूसरा स्तम्भ भर सकते हैं। 1 × 2 × 4 = 8 होता है। क्या दूसरी पंक्ति में 2 और तीसरी में 4 लिखें?
क्या कोई तरीक़ा है जिससे पता चले कि 2 और 4 किस ख़ाने में लिख सकते हैं?
108 और 224, दोनों 2 और 4 से पूरी तरह विभाजित हो जाते हैं।
इसलिए अभी यह तय नहीं कर सकते। पहले तीसरे स्तम्भ को समझते हैं।

हाँ, कोशिश जारी रखें।
कोशिश करते हैं : 5 × 63 = 315 होता है। इसलिए 63 की जगह 7 × 9 लिख सकते हैं।
तो तीसरे स्तम्भ में 7 और 9 कहाँ रखेंगे?
108, 9 से पूरी तरह विभाजित होता है, लेकिन 224 नहीं। इसलिए दूसरी पंक्ति में 9 और तीसरी में 7 लिखेंगे।
3 × 48 = 144, 48 = 4 × 12, 6 × 8.
अब 6 और 8 बचे हैं। 108, 6 से पूरी तरह विभाजित होता है, इसलिए 6 दूसरी पंक्ति में और 8 तीसरी पंक्ति में लिखेंगे।
बिल्कुल सही।
अब साफ़ है कि 2 और 4 कहाँ लिखने हैं।
बहुत अच्छा सोचा। क्या आप बाक़ी साथियों को भी समझा सकते हैं कि आपने यह उत्तर कैसे निकाला?
बिल्कुल।

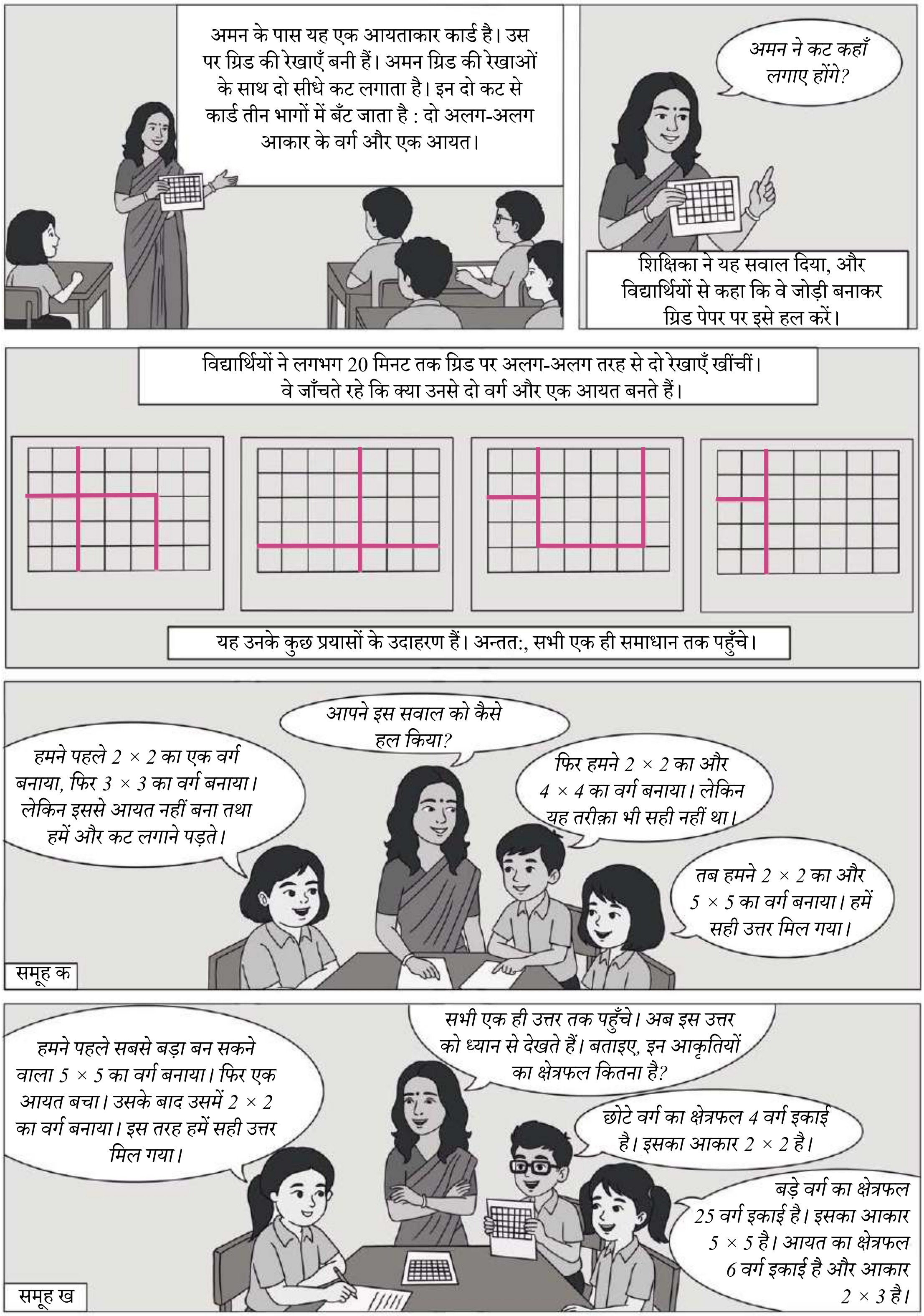
इस चर्चा में भी चर्चा-1 की तरह सीखने के कई अच्छे अवसर मिले। इसके साथ ही, विद्यार्थियों ने इस सवाल को पहले किए गए सवाल से जोड़कर समझा।

कई बार, पहले सीखी हुई बातों का उपयोग करने से नया सवाल समझना और हल करना आसान हो जाता है। शुरुआत में शिक्षिका ने विद्यार्थियों को अपने-आप चर्चा करने और सोचने का समय दिया। बाद में उन्होंने ऐसे सवाल पूछे जिनसे विद्यार्थियों को सही दिशा में सोचने और आगे बढ़ने में मदद मिली।

इस सवाल का केवल एक सही उत्तर था, लेकिन शिक्षिका ने केवल उत्तर पर ध्यान नहीं दिया। उन्होंने इस बात पर ज़्यादा ज़ोर दिया कि विद्यार्थी अलग-अलग तरीक़ों से सोचकर और तर्क देकर उस उत्तर तक कैसे पहुँचे।

चर्चा-3

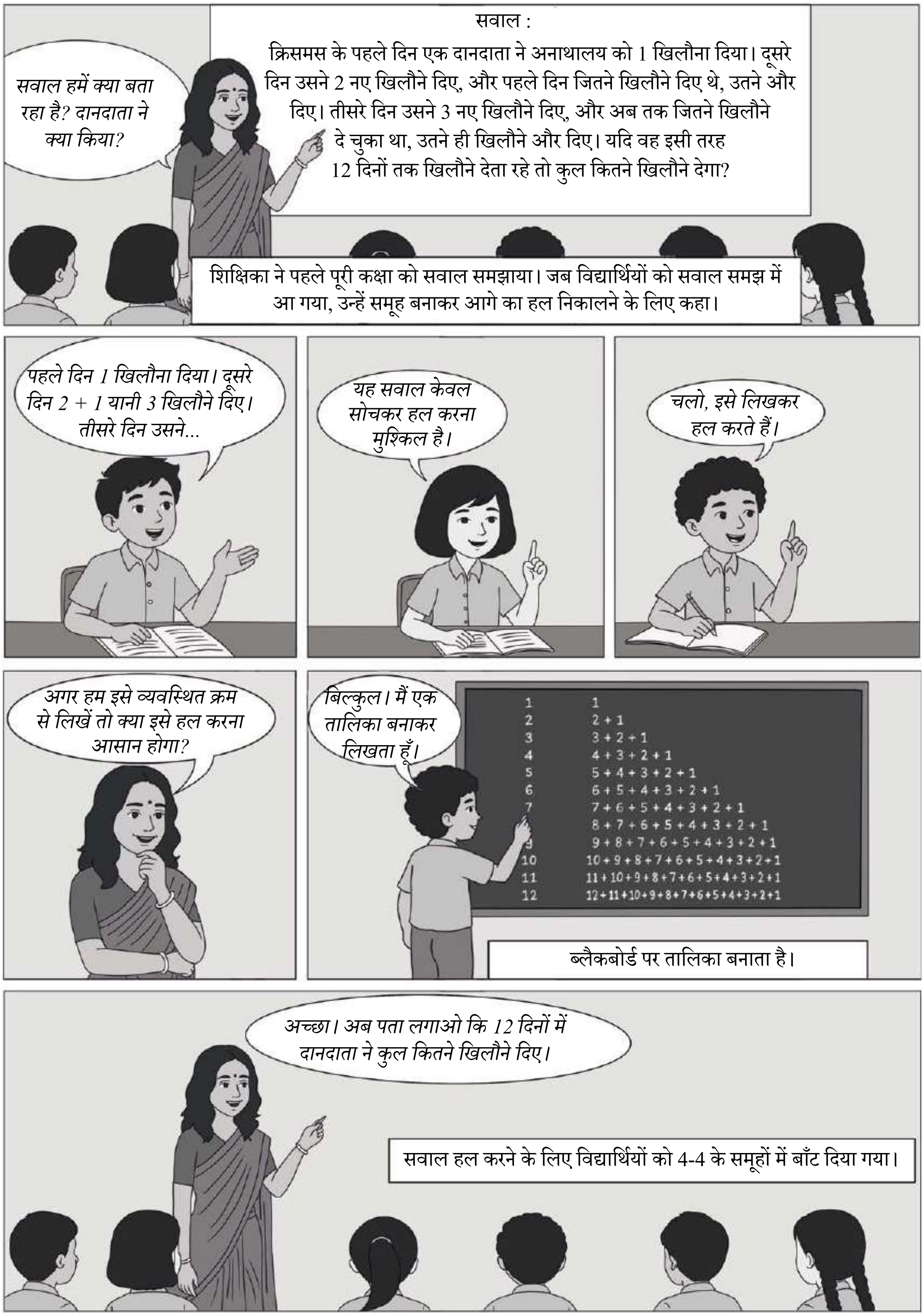
कक्षा-6 के विद्यार्थियों का दो-दो या तीन-तीन के समूहों में कार्य

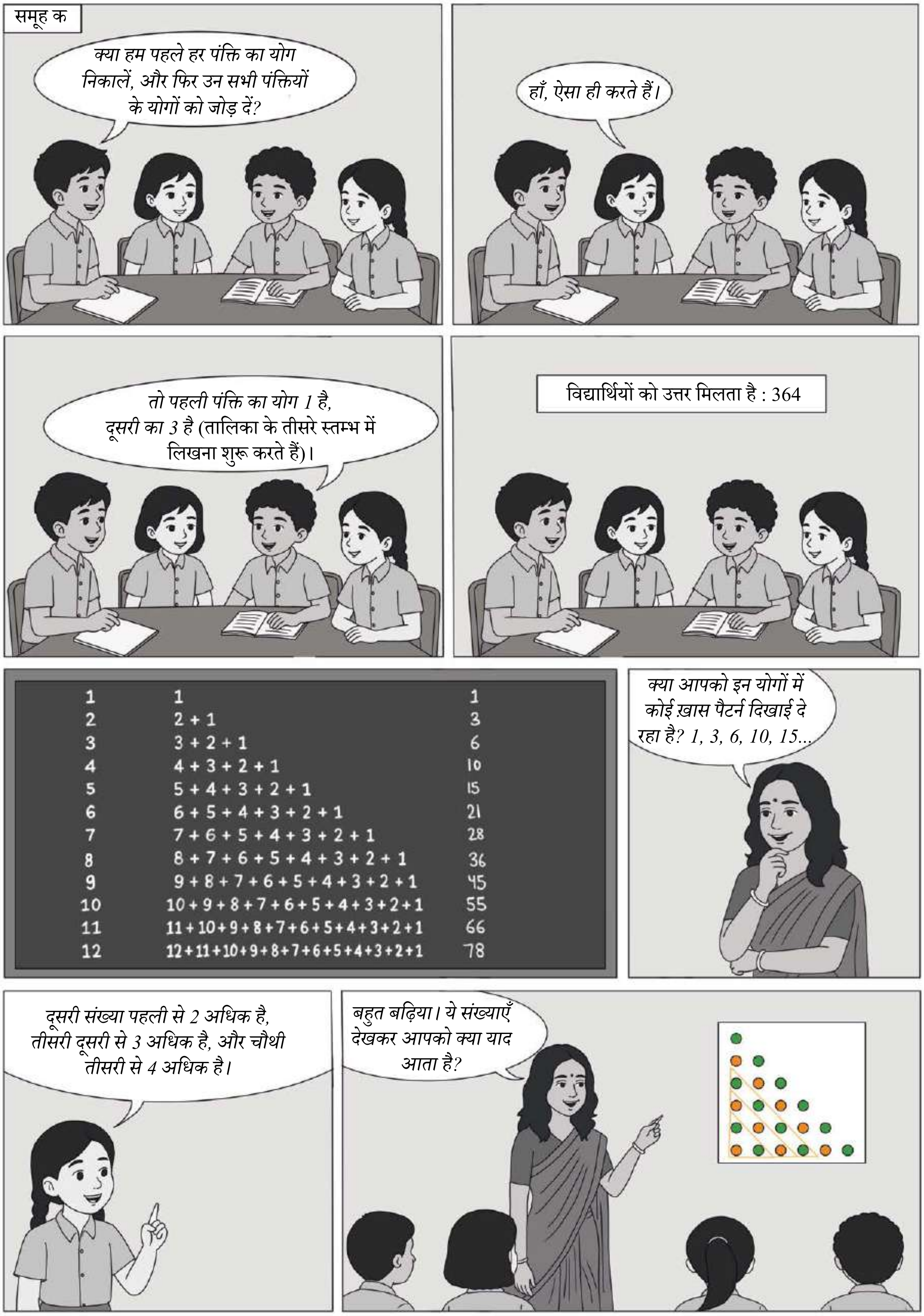


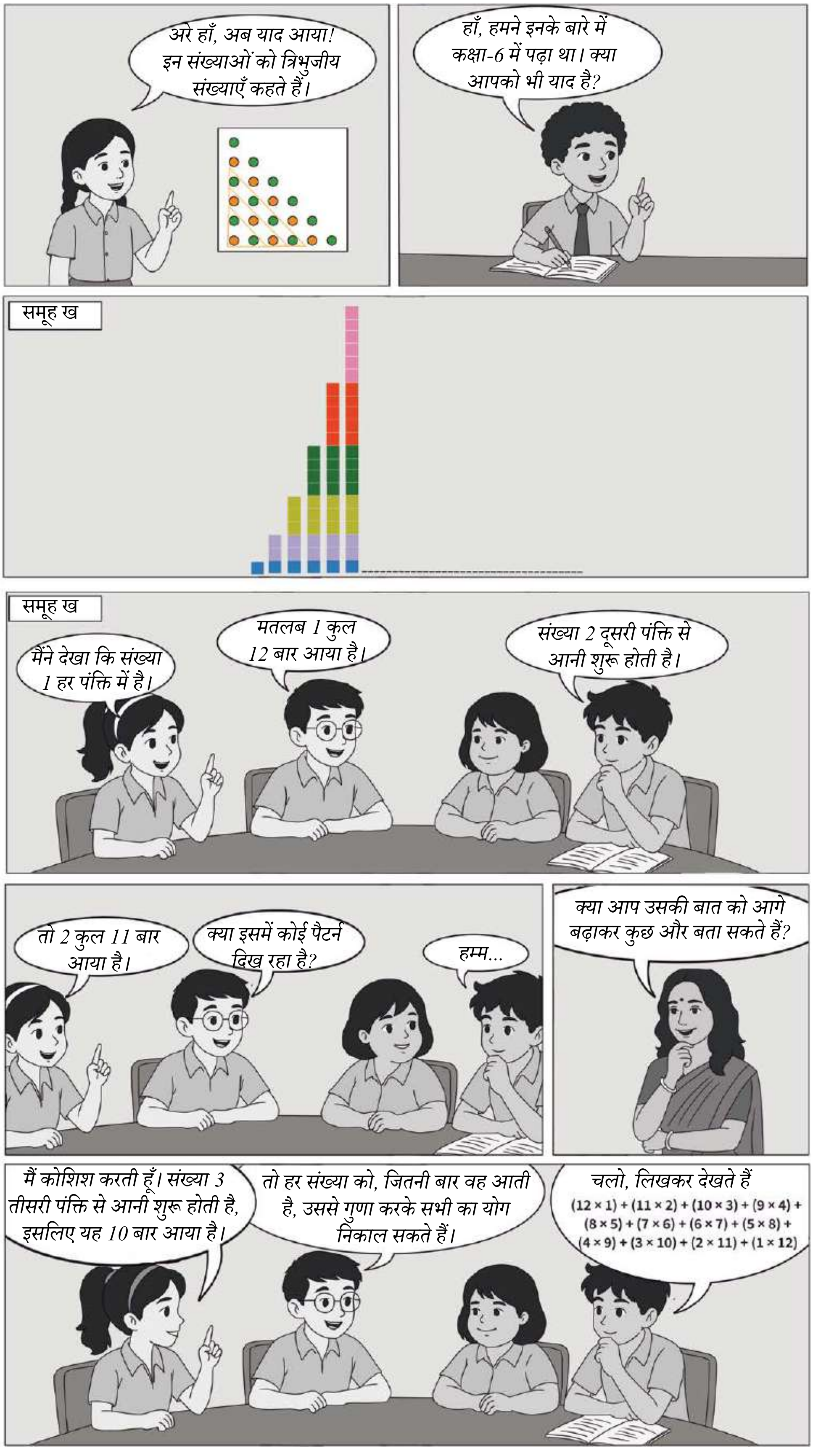
ध्यान दें कि जब कक्षा को एक उत्तर मिल गया तब भी शिक्षिका ने चर्चा नहीं रोकी। इस आगे की चर्चा से क्या लाभ हुआ? शिक्षिका ने गणितीय संवाद को बढ़ावा देने के लिए कौन-कौन-से तरीक़े अपनाए?

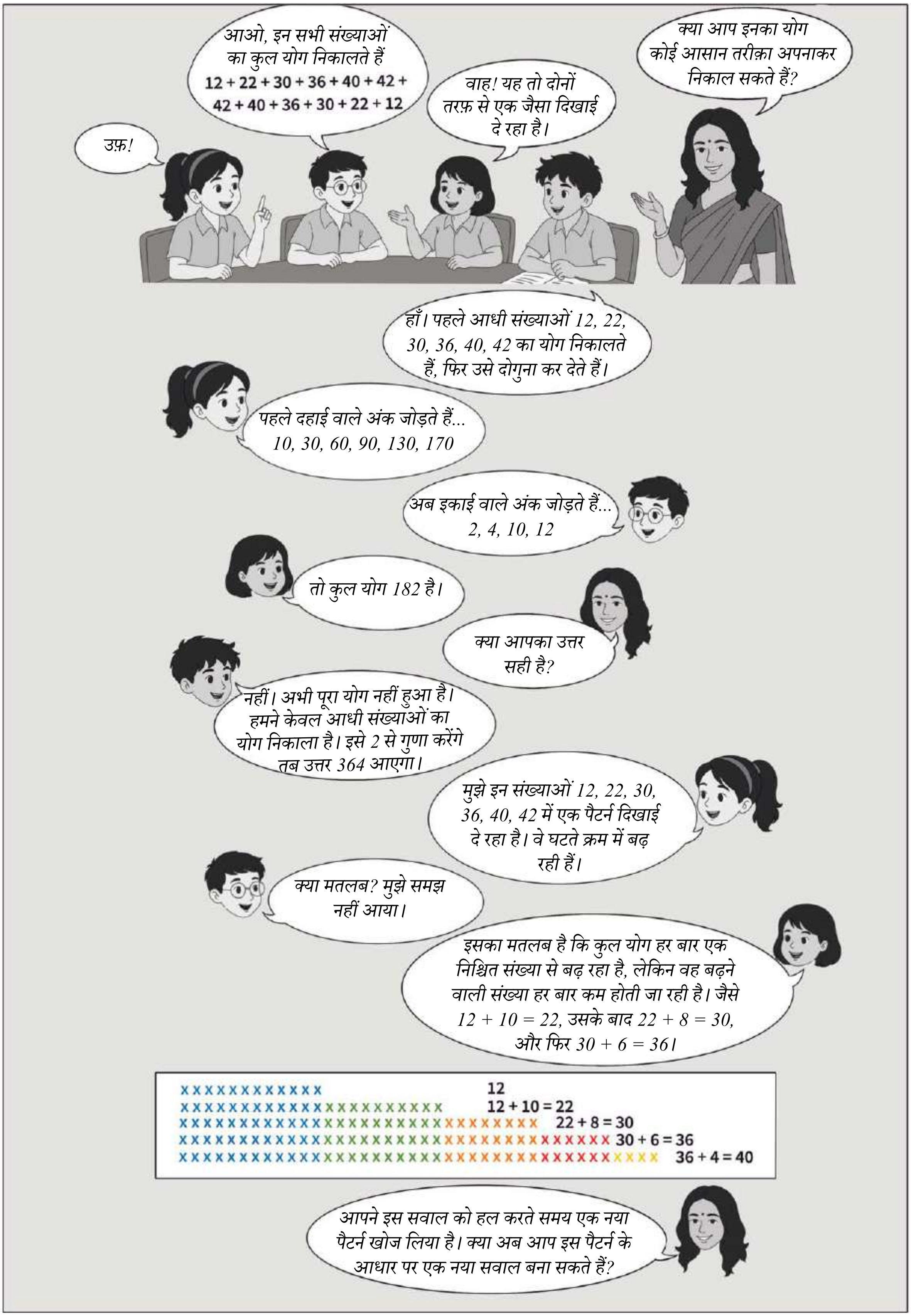
चर्चा-4

कक्षा-5 और 6 के विद्यार्थियों का चार-चार के समूहों में कार्य




समूह क
क्या हम पहले हर पंक्ति का योग निकालें, और फिर उन सभी पंक्तियों के योगों को जोड़ दें?
हाँ, ऐसा ही करते हैं।
तो पहली पंक्ति का योग 1 है, दूसरी का 3 है (तालिका के तीसरे स्तम्भ में लिखना शुरू करते हैं)।
विद्यार्थियों को उत्तर मिलता है : 364
1 1 1
2 2 + 1 3
3 3 + 2 + 1 6
4 4 + 3 + 2 + 1 10
5 5 + 4 + 3 + 2 + 1 15
6 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 21
7 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 28
8 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 36
9 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 45
10 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 55
11 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 66
12 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 78
क्या आपको इन योगों में कोई ख़ास पैटर्न दिखाई दे रहा है? 1, 3, 6, 10, 15...
दूसरी संख्या पहली से 2 अधिक है, तीसरी दूसरी से 3 अधिक है, और चौथी तीसरी से 4 अधिक है।
बहुत बढ़िया। ये संख्याएँ देखकर आपको क्या याद आता है?

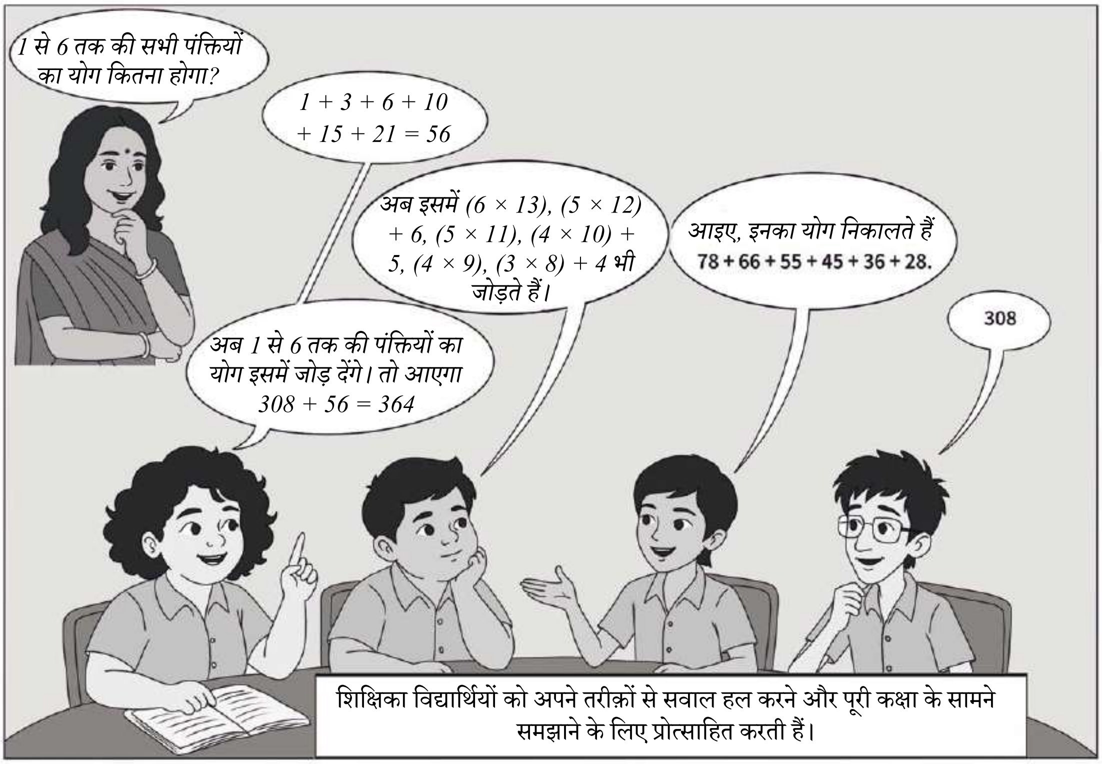

अरे हाँ, अब याद आया! इन संख्याओं को त्रिभुजीय संख्याएँ कहते हैं।
हाँ, हमने इनके बारे में कक्षा-6 में पढ़ा था। क्या आपको भी याद है?
समूह ख
समूह ख
मैंने देखा कि संख्या 1 हर पंक्ति में है।
मतलब 1 कुल 12 बार आया है।
संख्या 2 दूसरी पंक्ति से आनी शुरू होती है।
तो 2 कुल 11 बार आया है।
क्या इसमें कोई पैटर्न दिख रहा है?
हम्म...
क्या आप उसकी बात को आगे बढ़ाकर कुछ और बता सकते हैं?
मैं कोशिश करती हूँ। संख्या 3 तीसरी पंक्ति से आनी शुरू होती है, इसलिए यह 10 बार आया है।
तो हर संख्या को, जितनी बार वह आती है, उससे गुणा करके सभी का योग निकाल सकते हैं।
चलो, लिखकर देखते हैं
(12 × 1) + (11 × 2) + (10 × 3) + (9 × 4) + (8 × 5) + (7 × 6) + (6 × 7) + (5 × 8) + (4 × 9) + (3 × 10) + (2 × 11) + (1 × 12)

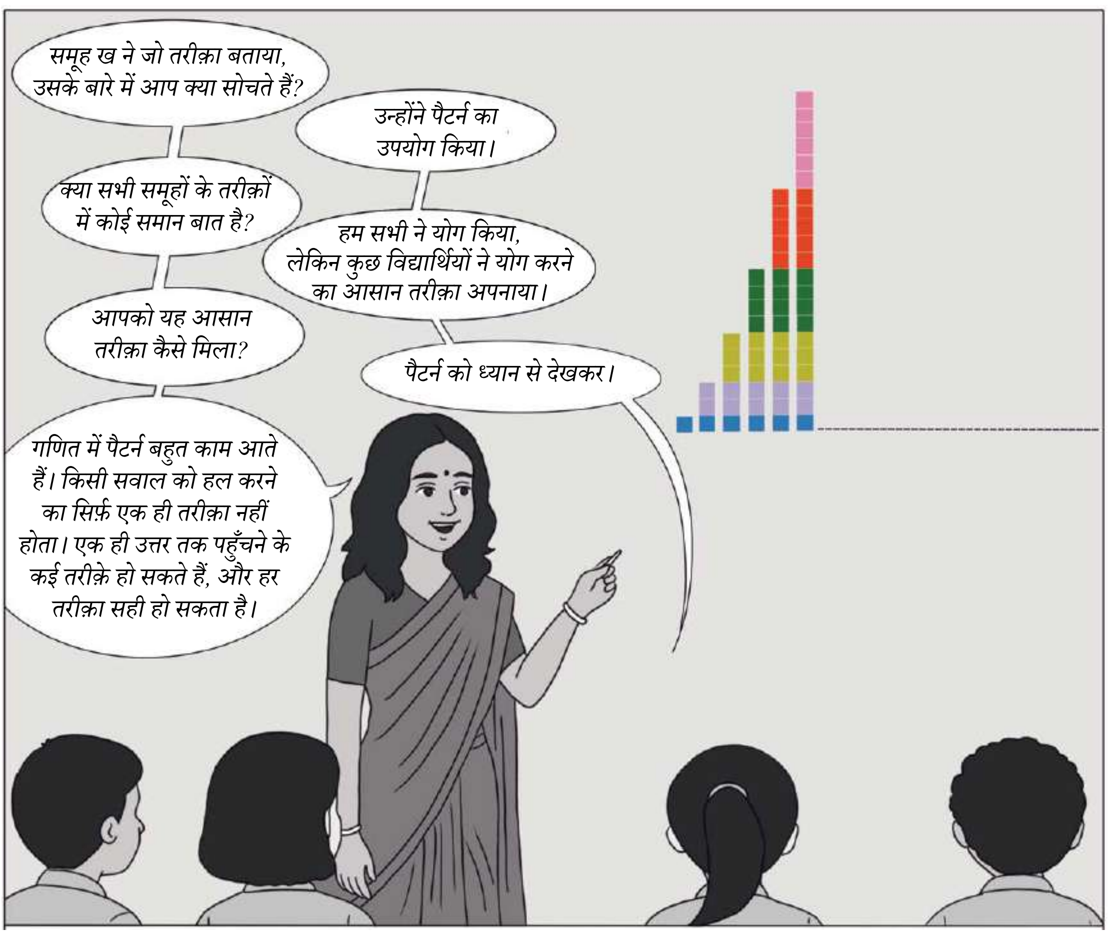


उफ़!
आओ, इन सभी संख्याओं का कुल योग निकालते हैं 12 + 22 + 30 + 36 + 40 + 42 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12
वाह! यह तो दोनों तरफ़ से एक जैसा दिखाई दे रहा है।
क्या आप इनका योग कोई आसान तरीक़ा अपनाकर निकाल सकते हैं?
हाँ। पहले आधी संख्याओं 12, 22, 30, 36, 40, 42 का योग निकालते हैं, फिर उसे दोगुना कर देते हैं।
पहले दहाई वाले अंक जोड़ते हैं... 10, 30, 60, 90, 130, 170
अब इकाई वाले अंक जोड़ते हैं... 2, 4, 10, 12
तो कुल योग 182 है।
क्या आपका उत्तर सही है?
नहीं। अभी पूरा योग नहीं हुआ है। हमने केवल आधी संख्याओं का योग निकाला है। इसे 2 से गुणा करेंगे तब उत्तर 364 आएगा।
मुझे इन संख्याओं 12, 22, 30, 36, 40, 42 में एक पैटर्न दिखाई दे रहा है। वे घटते क्रम में बढ़ रही हैं।
क्या मतलब? मुझे समझ नहीं आया।
इसका मतलब है कि कुल योग हर बार एक निश्चित संख्या से बढ़ रहा है, लेकिन वह बढ़ने वाली संख्या हर बार कम होती जा रही है। जैसे 12 + 10 = 22, उसके बाद 22 + 8 = 30, और फिर 30 + 6 = 36।
12
12 + 10 = 22
22 + 8 = 30
30 + 6 = 36
36 + 4 = 40
आपने इस सवाल को हल करते समय एक नया पैटर्न खोज लिया है। क्या अब आप इस पैटर्न के आधार पर एक नया सवाल बना सकते हैं?

समूह ग

1 1
2 2 + 1
3 3 + 2 + 1
4 4 + 3 + 2 + 1
5 5 + 4 + 3 + 2 + 1
6 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
7 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
8 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
9 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
10 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
11 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
12 12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1
क्यूँ न हम हर पंक्ति की संख्याओं का योग निकालने के लिए गॉस की विधि अपनाएँ जो हमने पहले सीखी थी?
मलतब?
याद है, गॉस ने 1 से 100 तक की सभी संख्याओं का योग निकालने के लिए उनके जोड़े बनाए थे। जैसे 1 और 99, 2 और 98...
यह अच्छा तरीक़ा है। इसे आज़माकर देखें।
जी बिल्कुल। सबसे पहले आख़िरी पंक्ति को देखते हैं। इसमें कौन-कौन-से जोड़े बन सकते हैं?
12 और 1 मिलाकर 13 होते हैं। 11 और 2 मिलाकर भी 13 होते हैं।
यानी 13 के 6 जोड़े बनेंगे। इसे 6 × 13 लिख सकते हैं।
अब 11वीं पंक्ति देखते हैं। 11 और 1, 10 और 2। हर जोड़े का योग 12 है।
लेकिन 6 अकेला बच जाएगा।
इसलिए 12 के 5 जोड़ों के साथ 6 भी जोड़ देंगे। यानी (5 × 12) + 6
10 वीं पंक्ति में 5 जोड़े हैं। हर जोड़े का योग 11 है। इसलिए इसका योग 5 × 11 होगा।
9 वीं पंक्ति में 10 के 4 जोड़े बनते हैं और 5 वीं पंक्ति का योग (4 × 10) + 5 होगा।
8 वीं पंक्ति में 9 के 4 जोड़े बनते हैं। यानी 4 × 9
7 वीं पंक्ति में 8 के 3 जोड़े बनते हैं और 4 बच जाता है। यानी (3 × 8) + 4।
बाक़ी पंक्तियों का योग तो सीधे संख्याओं को जोड़कर निकाल सकते हैं।


1 से 6 तक की सभी पंक्तियों का योग कितना होगा?
1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 = 56
अब इसमें (6 × 13), (5 × 12) + 6, (5 × 11), (4 × 10) + 5, (4 × 9), (3 × 8) + 4 भी जोड़ते हैं।
आइए, इनका योग निकालते हैं 78 + 66 + 55 + 45 + 36 + 28.
308
अब 1 से 6 तक की पंक्तियों का योग इसमें जोड़ देंगे। तो आएगा 308 + 56 = 364
शिक्षिका विद्यार्थियों को अपने तरीक़ों से सवाल हल करने और पूरी कक्षा के सामने समझाने के लिए प्रोत्साहित करती हैं।


समूह ख ने जो तरीक़ा बताया, उसके बारे में आप क्या सोचते हैं?
उन्होंने पैटर्न का उपयोग किया।
क्या सभी समूहों के तरीक़ों में कोई समान बात है?
हम सभी ने योग किया, लेकिन कुछ विद्यार्थियों ने योग करने का आसान तरीक़ा अपनाया।
आपको यह आसान तरीक़ा कैसे मिला?
पैटर्न को ध्यान से देखकर।
गणित में पैटर्न बहुत काम आते हैं। किसी सवाल को हल करने का सिर्फ़ एक ही तरीक़ा नहीं होता। एक ही उत्तर तक पहुँचने के कई तरीक़े हो सकते हैं, और हर तरीक़ा सही हो सकता है।

सोचिए, इस पूरी चर्चा के दौरान शिक्षिका ने विद्यार्थियों को गणितीय संवाद करने के लिए किन-किन तरीक़ों से प्रोत्साहित किया।

यदि आपके पास गणितीय संवाद के ऐसे या अन्य उदाहरण हों तो उन्हें atrightangles.editor@apu.edu.in पर अवश्य भेजें।

यहाँ हमने कुछ रोचक सवाल और उन पर हुई उपयोगी चर्चाएँ दिखाई हैं। इनसे विद्यार्थियों को नई बातें खोजने और गणित को बेहतर ढंग से समझने का अवसर मिलता है। अब यह सवाल उठ सकता है कि क्या हर शिक्षक के लिए ऐसा करना आसान है? शिक्षक को पहले सवाल को अच्छी तरह समझना होता है। साथ ही, उन्हें समय का ध्यान रखना पड़ता है, पाठ्यक्रम पूरा करना होता है, और तय समय-सीमा का भी पालन करना होता है। इसलिए हमारा सुझाव है कि शिक्षक महीने में कम-से-कम एक बार ऐसी गणितीय गतिविधियाँ और चर्चाएँ ज़रूर कराएँ। गणितीय संवाद से विद्यार्थियों की गणितीय सोच विकसित होती है, और यही गणित शिक्षण का एक महत्त्वपूर्ण उद्देश्य है।

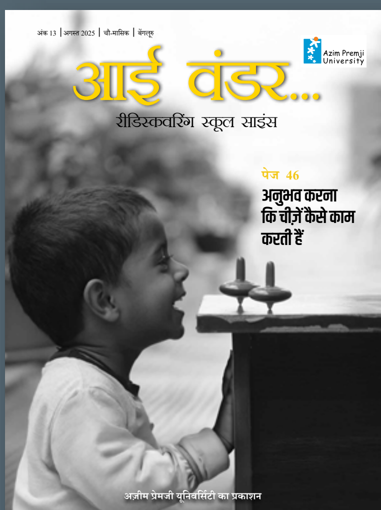
पद्मप्रिया शिराली

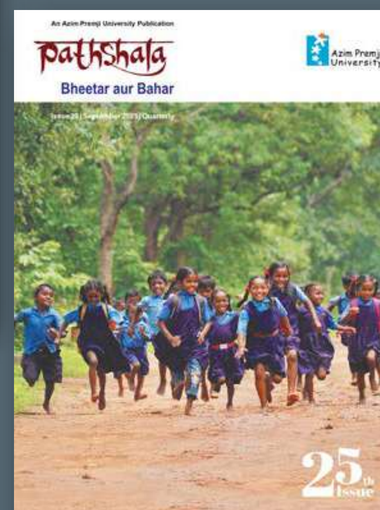
पद्मप्रिया शिराली वैली स्कूल (बेंगलूरु) और ऋषि वैली (आन्ध्र प्रदेश) स्थित कम्युनिटी मैथ सेंटर का हिस्सा हैं, जहाँ वे 1983 से कार्यरत हैं। उन्होंने वहाँ गणित, कम्प्यूटर एप्लीकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण अध्ययन और तेलुगू जैसे विभिन्न विषयों को पढ़ाया है। 1990 के दशक में, उन्होंने दिवंगत श्री पी. के. श्रीनिवासन के साथ मिलकर काम किया। वे उस टीम का हिस्सा थीं जिसने ऋषि वैली रूरल सेंटर के मल्टीग्रेड एलीमेंट्री लर्निंग प्रोग्राम को तैयार किया था, जिसे 'स्कूल इन अ बॉक्स' (School in a Box) के नाम से जाना जाता है। वर्तमान में वे एनसीईआरटी के पाठ्यपुस्तक विकास समूह का हिस्सा हैं। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

अनुवाद : रोशन ख़ान **पुनरीक्षण :** प्रतिका गुप्ता **कॉपी-एडिटर :** अतुल अग्रवाल

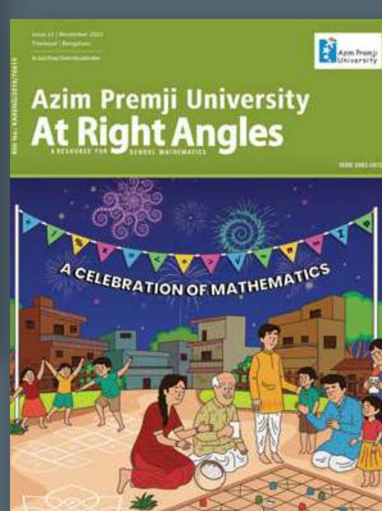
Azim Premji University

Azim Premji University Magazines





Scan here to subscribe
to At Right Angles for free!



To know more about our other publications, write to us at publications@apu.edu.in

अज़ीम प्रेमजी यूनिवर्सिटी
एट राइट एंगल्स
स्कूल गणित के लिए एक संसाधन

गणित और गणित शिक्षा पर एक गहन, गम्भीर पत्रिका।

शिक्षकों, शिक्षक-प्रशिक्षकों और विषय से जुड़े विद्यार्थियों के लिए।

क्या आपने एट राइट एंगल्स का डिजीटल एडीशन देखा है?

यह गणित के स्कूल शिक्षकों के लिए है।

आपका विश्वसनीय शिक्षण संसाधन अब बस एक क्लिक की दूरी पर है...

- कभी भी, कहीं भी बेहतर पहुँच
- एक ही स्थान पर तीन भाषाओं में लेख
- शेयर और डाउनलोड करना आसान
- इंटरैक्टिव फीचर्स

देखने के लिए स्कैन करें

Azim Premji University
Bengaluru | Bhopal | Ranchi

Website: azimpremjiuniversity.edu.in **Facebook:** /azimpremjiuniversity
YouTube: @azimpremjiuniversity **Instagram:** @azimpremjiuniv **X:** @azimpremjiuniv

Address: Survey No. 66, Burugunte Village, Bikkanahalli Main Road, Bengaluru, Karnataka 562125