ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು ಟೆನ್ ಫ್ರೇಮ್‌ಗಳ ಬಳಕೆ

ಮ್ಯಾಥ್ ಸ್ಪೇಸ್

ಟೆನ್ ಫ್ರೇಮ್ ಎಂದರೆ 2 × 5 ಮನೆಗಳಿರುವ ಚೌಕಟ್ಟು. ಮೊದಲ ಹತ್ತು ಸ್ವಾಭಾವಿಕ ಸಂಖ್ಯೆಗಳಾದ 1, 2, 3, ... 10 ಅನ್ನು ತೋರಿಸಲು ಇವು ಉಪಯುಕ್ತ. ಇವುಗಳನ್ನು ತಯಾರಿಸುವ ವಿಧಾನ ಮತ್ತು ಇತರ ಅಗತ್ಯ ವಿವರಗಳಿಗೆ https://bit.ly/4kmFdoh ಲಿಂಕ್ ಅನ್ನು ನೋಡಿ.

'ಸಮ ಮತ್ತು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳು' ಪೋಸ್ಟರ್ ಅನ್ನು ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರದರ್ಶಿಸಲು ಉದ್ದೇಶಿಸಲಾಗಿದೆ; ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಟೆನ್ ಫ್ರೇಮ್‌ನ ಮೂರ್ತ ಮಾದರಿಯಿಂದ, ಆಯ್ದ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಪ್ರಾತಿನಿಧಿಕ ರೂಪಗಳತ್ತ ಸಾಗಲು ಇದು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಮಾದರಿಗಳನ್ನು ಕೂಲಂಕಶವಾಗಿ ಗಮನಿಸಲು, ಕೇಳಿದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸಲು ಮತ್ತು ತಮ್ಮ ಚಿಂತನೆಗಳನ್ನು ಸಹಪಾಠಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚಿಸಲು ಅವರಿಗೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮಯವನ್ನು ನೀಡಬೇಕು. ಇಂತಹ ಎಷ್ಟು ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಸಾಧ್ಯ ಮತ್ತು ಆ ಬಗೆಯ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಯೋಜನೆಗಳು ಇಲ್ಲಿವೆಯೇ ಎಂದು ತಿಳಿಯಲು ಪೋಸ್ಟರ್‌ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವ ಸಂಕಲನದ ಲೆಕ್ಕಗಳನ್ನು ಸರಳವಾಗಿ ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆ ಕೂಡ ಅವರಿಗೆ ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಸರಳ ವೀಕ್ಷಣೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣದ ಹಂತಕ್ಕೆ ತಲುಪುವುದು ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಒಂದು ಪ್ರಮುಖ ಹೆಜ್ಜೆ ಮತ್ತು ಈ ಪೋಸ್ಟರ್ ಅಂತಹ ಕಲಿಕೆಗೆ ಸಾರುವೆಯಾಗಿ(scaffolding) ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ಕೆಳಗೆ ನೀಡಿರುವ ಟಿಪ್ಪಣಿಗಳು ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ ಈ ಕಲಿಕಾ ಪಯಣವನ್ನು ಸುಗಮಗೊಳಿಸಲು ನೆರವು ನೀಡುವ ಉದ್ದೇಶವನ್ನು ಹೊಂದಿವೆ. ಕೇವಲ ಉತ್ತರಗಳ ಮೇಲಷ್ಟೇ ಗಮನ ಹರಿಸುವುದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಗಣಿತೀಯ ಚಿಂತನಾ ಕೌಶಲಗಳು ಬೆಳೆಯುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬುದನ್ನು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು. ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಅಂತಹ ಕಲಿಕೆಗೆ ಆರಂಭಿಕ ಬಿಂದುಗಳನ್ನು ಒದಗಿಸುತ್ತವೆ ಮತ್ತು ಸಹಪಾಠಿಗಳ ನಡುವಿನ ಚರ್ಚೆಯು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ-ನೇತೃತ್ವದ ಶೋಧನೆಗೆ ದಾರಿಯಾಗುತ್ತದೆ.



ಚಿತ್ರ 1

ಪೋಸ್ಟರ್‌ನಲ್ಲಿರುವ ಮೊದಲನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ *ಒಂದು ಬಿಟ್ಟು ಒಂದು ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೇಲ್ಭಾಗದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನನ್ನು ಗಮನಿಸಿದಿರಿ?* ಇದನ್ನು ಸೂಕ್ಷ್ಮವಾಗಿ ಗಮನಿಸಿದಾಗ, ಮೊದಲನೆಯ ಸಂಖ್ಯೆಯಿಂದ ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿ, ಒಂದು ಬಿಟ್ಟು ಒಂದು ಬರುವ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿಯೂ ಒಂದು ಒಂಟಿ ಚುಕ್ಕೆ ಕಾಣಿಸುತ್ತದೆ; ಆದರೆ ಎರಡನೇ, ನಾಲ್ಕನೇ ಇತ್ಯಾದಿ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು ಸಮತಟ್ಟಾದ ಅಥವಾ 'ಸಮ' ಮೇಲ್ಭಾಗವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಈ ದೃಶ್ಯೀಕರಣವು 'ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮ-ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು' (ಅಂದರೆ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯು 'ಬೆಸ'ವೋ 'ಸಮ'ವೋ ಎಂಬುದು) ಮತ್ತು ಈ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳಿಗೆ ಸಂಬಂಧಿಸಿದ ಗಣಿತದ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಲು ಸಹಾಯ ಮಾಡುತ್ತದೆ. ನಂತರದ ಹಂತದಲ್ಲಿ ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2n ಎಂದೂ, ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು 2m - 1 ಅಥವಾ 2m + 1 ಎಂದು ಪ್ರತಿನಿಧಿಸುವ ಬೀಜಗಣಿತೀಯ ವಿಧಾನಕ್ಕೆ ಈ ದೃಶ್ಯೀಕರಣವು ಸೂಕ್ತ ಅರ್ಥವನ್ನು ನೀಡುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ.

ಎರಡನೇ ಪ್ರಶ್ನೆ: *A, B ಮತ್ತು C ಗುಂಪುಗಳಲ್ಲಿನ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲೂ ಎರಡು ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು (ವಿಭಿನ್ನ ಬಣ್ಣಗಳಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ) ಕೂಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತದ ಬಗ್ಗೆ ನೀವು ಏನು ಗಮನಿಸುತ್ತೀರಿ?*

ಈ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ನಮ್ಮ ಉತ್ತರಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ನೀಡಲಾಗಿದೆ:

ಗುಂಪು A ನಲ್ಲಿ, ಒಂದಂಕಿಯ ಬೆಸ (ಕಿತ್ತಳೆ) ಮತ್ತು ಸಮ (ನೀಲಿ) ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಗುಂಪು B ನಲ್ಲಿ, ಒಂದಂಕಿಯ ಎರಡು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಸಂಯೋಜನೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಅದೇ ರೀತಿ ಗುಂಪು C ನಲ್ಲಿ, ಒಂದಂಕಿಯ ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳನ್ನು ನಾವು ಕಾಣಬಹುದು.

ಅಂಕಿಗಳ ಎಲ್ಲಾ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಪಟ್ಟಿ ಮಾಡುವುದು ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಗಮನಿಸುವುದು ಮುಖ್ಯ, ಹಾಗೆ ಮಾಡಿದಾಗ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ಸುಲಭ.

ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: *ಟೆನ್ ಫ್ರೇಮ್, ಸಮ–ಬೆಸ, ಸಮ–ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣ, ಗಮನಿಸುವುದು, ಊಹೆ*

ಶಿಕ್ಷಕರಿಗೆ

ಕೇಳಬಹುದಾದ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು:

ಗುಂಪು A ನಲ್ಲಿ	ಗುಂಪು B ನಲ್ಲಿ	ಗುಂಪು C ನಲ್ಲಿ
ಮೇಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು _____ ಆಗಿದೆ (ಏಕೆಂದರೆ _____) ಮತ್ತು ಕೆಳಗಿನ ಸಂಖ್ಯೆಯು _____ ಆಗಿದೆ. (ಏಕೆಂದರೆ _____). ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊತ್ತವು _____ ಆಗಿದೆ (ಏಕೆಂದರೆ _____).	ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು_____ ಆಗಿವೆ (ಏಕೆಂದರೆ _____). ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊತ್ತವು_____ ಆಗಿದೆ (ಏಕೆಂದರೆ _____).	ಎರಡೂ ಸಂಖ್ಯೆಗಳು_____ ಆಗಿವೆ (ಏಕೆಂದರೆ _____). ಆದ್ದರಿಂದ, ಮೊತ್ತವು_____ ಆಗಿದೆ (ಏಕೆಂದರೆ _____).

- ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿನ ಕನಿಷ್ಠ ಮತ್ತು ಗರಿಷ್ಠ ಮೊತ್ತ ಯಾವುದು?
- ಪ್ರತಿ ಗುಂಪಿನಲ್ಲಿನ ಸಂಖ್ಯೆಗಳ ಮೊತ್ತಗಳಲ್ಲಿ ಇರುವ ಸಾಮಾನ್ಯ ಅಂಶ ಯಾವುದು? ನಾವು ಇದನ್ನು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಿಸಬಹುದೇ?

  (i) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ + ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ = _____ ಸಂಖ್ಯೆ

  (ii) ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ + ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆ = _____ ಸಂಖ್ಯೆ

  (iii) ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ + ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆ = _____ ಸಂಖ್ಯೆ

ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಒಂದು ಸಮಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, ಮೊತ್ತದ ಸಮ-ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಮೊದಲ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಸಮ-ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನೇ ಉಳಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಈ ಚಿತ್ರಗಳು ನೆರವಾಗುತ್ತವೆ; ಅಂದರೆ, ಬೆಸ + ಸಮ = ಬೆಸ (A ನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವಂತೆ) ಮತ್ತು ಸಮ + ಸಮ = ಸಮ (B ನಲ್ಲಿ ವಿವರಿಸಿರುವಂತೆ). ಆದರೆ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ ಸಮ-ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ. ಎರಡು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ಕೂಡಿಸಿದಾಗ, ಅವು ತಮ್ಮ ಬೆಸ ಗುಣವನ್ನು ಸರಿದೂಗಿಸಿಕೊಂಡು, ಮೊತ್ತವನ್ನು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನಾಗಿ ಮಾಡುತ್ತವೆ (ಚಿತ್ರ C). ಇದನ್ನೇ ಬೇರೆ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ, ಬೆಸ + ಬೆಸ = ಸಮ, ಮತ್ತು ಚಿತ್ರ B ತೋರಿಸುವಂತೆ ಬೆಸ + ಸಮ = ಬೆಸ.

ವಿಸ್ತರಣಾ ಪ್ರಶ್ನೆ: ಸೊನ್ನೆಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ ಅಥವಾ ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯೋ?

> ಸೊನ್ನೆಯು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲದಿರಲು ಹಲವು ಕಾರಣಗಳಿವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಅದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿದ್ದರೆ, ಅದರ ಮೇಲ್ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಒಂದು 'ಒಂಟಿ' ಚುಕ್ಕೆ ಇರಬೇಕಿತ್ತು. ಆದರೆ ಸೊನ್ನೆಯು ಯಾವುದೇ ಚುಕ್ಕೆಯನ್ನು ಹೊಂದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಅದು ಬೆಸ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ. ಆ ಕಾರಣದಿಂದಾಗಿ, ಅದು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿಯೇ ಇರಬೇಕು. ಅಲ್ಲದೆ, ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಕೂಡಿಸುವುದರಿಂದ ಸಮ-ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣವು ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಬೆಸ + ಸಮ = ಬೆಸ ಮತ್ತು ಸಮ + ಸಮ = ಸಮ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಯಾವುದೇ ಸಂಖ್ಯೆಗೆ ಸೊನ್ನೆಯನ್ನು ಕೂಡಿದಾಗ, ಆ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಮೌಲ್ಯವು ಬದಲಾಗದ ಕಾರಣ ನೊನ್ನೆಯು ಈ ನಿಯಮವನ್ನು ಕಾಯ್ದುಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ, ಸೊನ್ನೆಯು ಸಮ ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಗಿರಬೇಕು.

ಮುಂದಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣದತ್ತ ಇಡುವ ಪ್ರಮುಖ ಹೆಜ್ಜೆಗಳಾಗಿವೆ:

- ನಿಮ್ಮ ಬಳಿ ಬೇಕಾದಷ್ಟು ಟೆನ್ ಫ್ರೇಮ್‌ಗಳಿದ್ದರೆ ಅಥವಾ ಸೊನ್ನೆಗಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು (ಉದಾ: 13, 18) ರಚಿಸಬಲ್ಲಿರಾ? ಹೇಗೆ?
- 125, 602, 1234 – ಈ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದೇ?
- ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯು ಅದು ಸಮವೇ ಅಥವಾ ಬೆಸವೇ ಎಂಬುದನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ. ಏಕೆ?

10 ಅಥವಾ ಅದಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾದ ಯಾವುದೇ ಪೂರ್ಣ ಸಂಖ್ಯೆಯು ಹತ್ತರ ಕಟ್ಟುಗಳು (bundles of tens) ಮತ್ತು ಬಿಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಯ (0, 1, 2, … 9) ಸಂಯೋಜನೆಯಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 43 = 4 × 10 + 3, 602 = 60 × 10 + 2, 1234 = 123 × 10 + 4. ಆದ್ದರಿಂದ, ಈ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಅಷ್ಟೇ ಸಂಖ್ಯೆಯ ಫುಲ್-ಫ್ರೇಮ್‌ಗಳು ಮತ್ತು ನಂತರದ ಬಿಡಿ ಸಂಖ್ಯೆಯನ್ನು ಬಳಸಿ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು; ಉದಾಹರಣೆಗೆ, 43 ಅನ್ನು ಚಿತ್ರ 2 ರಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಪ್ರತಿನಿಧಿಸಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 2

ಈ ತಿಳಿವಳಿಕೆಯಿಂದ, ಒಂದು ಸಂಖ್ಯೆಯ ಬಿಡಿ ಸ್ಥಾನದ ಅಂಕಿಯೇ ಅದರ ಸಮ-ಬೆಸ ಗುಣಲಕ್ಷಣವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂಬ ಸಾಮಾನ್ಯೀಕರಣವು ಸ್ಪಷ್ಟವಾಗುತ್ತದೆ.

ಇದು ನಿಮಗೆ ಆಸಕ್ತಿ ಹುಟ್ಟಿಸಿದರೆ, ಈ ಪತ್ರಿಕೆಯ ನವೆಂಬರ್ 2022 ರ ಸಂಚಿಕೆಯಲ್ಲಿರುವ ಟೆನ್-ಫ್ರೇಮ್‌ಗಳ ಪರಾಮರ್ಶೆಯನ್ನು ನೋಡಿ (https://bit.ly/4r79Qkb). ಇದರಲ್ಲಿ ಒಂದು ಕಾರ್ಯಹಾಳೆ ಕೂಡ ಇದೆ!

● ಅನುವಾದ: **ಎಸ್. ಎನ್. ಗಣನಾಥ್** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಮಧುಕರ ಎಸ್. ಪುಟ್ಟಿ**