ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳು ಮತ್ತು ಚೌಕ ಘನದ ಜಾಲಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ: 4ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳೊಂದಿಗಿನ ಚರ್ಚೆಯ ಒಂದು ಅವಲೋಕನ

ಅಸ್ಮಾ ಮೆಮನ್

ಈ ಲೇಖನವು ಕೇಂಬ್ರಿಡ್ಜ್ ಪಠ್ಯಕ್ರಮವನ್ನು ಅನುಸರಿಸುತ್ತಿರುವ, ಕಡಿಮೆ ಆದಾಯದ ಕುಟುಂಬದ ಮಕ್ಕಳಿಗಾಗಿ ಇರುವ ಮುಂಬೈನ ಶಿಖಾ ಅಕಾಡೆಮಿಯ 4ನೇ ತರಗತಿಯ ಮಕ್ಕಳು ನಡೆಸಿದ ಸಂವಾದ ಮತ್ತು ಆಲೋಚನಾ ಕ್ರಮವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುತ್ತದೆ. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯಲ್ಲಿ 18 ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಭಾಗವಹಿಸಿದ್ದರು. ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯ ಅಟ್ ರೈಟ್ ಆಂಗಲ್ಸ್ (2022) ನಿಯತಕಾಲಿಕೆಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಟವಾಗಿದ್ದ "Polyominoes and Nets of a Cube" (https://bit.ly/4a5ztvB) ಎಂಬ ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಗಣಿತ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ಆಧರಿಸಿ ಈ ತರಗತಿಯನ್ನು ನಡೆಸಲಾಗಿತ್ತು. ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳು ಎಂದರೆ, ಒಂದೇ ಗಾತ್ರದ ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಅಂಚಿನಿಂದ ಅಂಚಿಗೆ ಜೋಡಿಸುವುದರಿಂದ ಉಂಟಾಗುವ ಸಮತಲ ರೇಖಾಗಣಿತದ ಆಕೃತಿಗಳಾಗಿವೆ. ಚೌಕಗಳ ಸಂಖ್ಯೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿ ಇವು ವಿವಿಧ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ, ಡೊಮಿನೊಗಳು, ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು, ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು ಮತ್ತು ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳು.

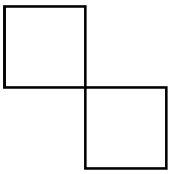
ಅನ್ವೇಷಣೆಯ ವಿವರ

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸುವುದು, ವಿವಿಧ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲು ಅವಕಾಶ ನೀಡುವುದು ಹಾಗೂ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಮಡಚಿ, ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಯಾವ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳು ಘನದ ಜಾಲವನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ಗುರುತಿಸುವ ಮೂಲಕ ಸ್ಪೇಷಿಯಲ್ ರೀಸನಿಂಗ್ ಕುರಿತಾದ ಅವರ ತಾರ್ಕಿಕ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಬೆಳೆಸುವುದು – ಇವು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಉದ್ದೇಶಗಳಾಗಿದ್ದವು. ಎನ್.ಸಿ.ಇ.ಆರ್.ಟಿ. ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಚೌಕ ಘನಗಳ ಜಾಲಗಳನ್ನು ಅಧಿಕೃತವಾಗಿ 7ನೇ ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಗುತ್ತದೆಯಾದರೂ, ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯು 4ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಅನ್ವೇಷಣಾತ್ಮಕ ಕಲಿಕೆಯ ಅನುಭವವಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ಘನದ ಜಾಲಗಳ ಪರಿಚಯವನ್ನು ಪಾಲಿಯೋಮಿನೋಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಯ ಮೂಲಕ ಈಗಲೇ ನೀಡಿತು.

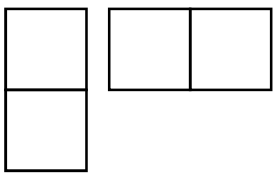
ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯನ್ನು ತಲಾ ಒಂದು ಗಂಟೆಯ ಮೂರು ಅವಧಿಗಳಲ್ಲಿ ನಡೆಸಲಾಯಿತು. ಇದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಮ್ಮ ಗಣಿತದ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲು, ಚರ್ಚಿಸಲು ಮತ್ತು ಆಳವಾಗಿ ಯೋಚಿಸಲು ಸಾಕಷ್ಟು ಸಮಯವನ್ನು ನೀಡಿತು.

ಅವಧಿ 1: ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳಲ್ಲಿನ ಮೂಲ–ಉತ್ಪನ್ನ (Parent–Child) ಸಂಬಂಧಗಳ ಪರಿಚಯ

ಮೊದಲ ಅಧಿವೇಶನವು ಒಂದು ಸರಳ ಚಟುವಟಿಕೆಯೊಂದಿಗೆ ಆರಂಭವಾಯಿತು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ **ಎರಡು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಅಂಚಿನಿಂದ ಅಂಚಿಗೆ** ಜೋಡಿಸಲು ಹಾಗೂ ಅದನ್ನು ಎಷ್ಟು ವಿಭಿನ್ನ ರೀತಿಗಳಲ್ಲಿ ಮಾಡಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚಲು ತಿಳಿಸಲಾಯಿತು. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಲಂಬವಾಗಿ, ಅಡ್ಡವಾಗಿ, ಓರೆಯಾಗಿ ಮತ್ತು ಕೆಲವು ಸಂದರ್ಭಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದರ ಮೂಲೆ ಮತ್ತೊಂದರದ್ದಕ್ಕೆ ತಾಕುವಂತೆ – ಹೀಗೆ ವಿವಿಧ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರು. ಈ ಸಂದರ್ಭವು, ಚೌಕಗಳನ್ನು **ಅಂಚಿನಿಂದ ಅಂಚಿಗೆ** ಮಾತ್ರ ಜೋಡಿಸಬೇಕು ಎಂಬ ಸೂಚನೆಯನ್ನು ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲು ಉತ್ತಮ ಅವಕಾಶ ನೀಡಿತು.



ಚಿತ್ರ 1: ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದರ ಮೂಲೆಗೆ ಮತ್ತೊಂದರ ಮೂಲೆ ತಾಕುವಂತೆ ಜೋಡಿಸಿದ್ದರು



ಚಿತ್ರ 2: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿವಿಧ ರೀತಿಯ (ವಿವಿಧ ದಿಕ್ಕಿನ) ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ತೋರಿಸಿದರು.

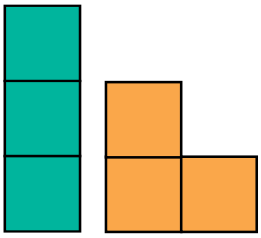
ಇದರ ಬೆನ್ನಲ್ಲೇ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಒಂದು ಪ್ರಶ್ನೆ ಕೇಳಲಾಯಿತು – *"ಇವು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ಆಕಾರಗಳೇ? ಅಥವಾ ಒಂದನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ*

ಪ್ರಮುಖ ಪದಗಳು: ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳು, ಜಾನಗಳು, ಚೌಕಘನಗಳು, ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು, ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳು

ಮತ್ತೊಂದನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದೇ?" ಇದು ಅವರನ್ನು **ಭ್ರಮಣೆ ಹಾಗೂ ಅನನ್ಯತೆಯ** ಬಗ್ಗೆ ಆಲೋಚಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿತು. ಚರ್ಚೆಯ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಒಂದು ತೀರ್ಮಾನಕ್ಕೆ ಬಂದರು: ಅವುಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಬೇರೆ ದಿಕ್ಕುಗಳಿಗೆ ತಿರುಗಿಸಿದ್ದರೂ ಸಹ, ಅಲ್ಲಿದ್ದದ್ದು ಒಂದೇ **ಒಂದು ಅನನ್ಯ ಜೋಡಣೆ**. ಏಕೆಂದರೆ ಮತ್ತೊಂದು ಆಕಾರವು ಮೊದಲಿನ ಆಕಾರವನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿದಾಗ ಬಂದದ್ದೇ ಆಗಿತ್ತು. ಇದೇ ರೀತಿ, ಪ್ರತಿಫಲನದ ಮೂಲಕ ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಹೋಲುವ ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಒಂದೇ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇನ್ನೊಂದು ಅರ್ಥದಲ್ಲಿ, ಪ್ರತಿಬಿಂಬಾಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬೇರೆ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ.

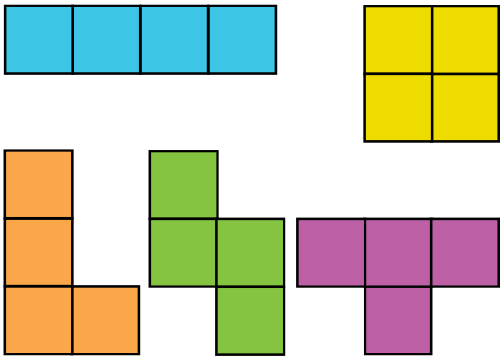
ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಯಿತು: **ಮೊನೊಮಿನೊ, ಡೊಮಿನೊ, ಟ್ರೊಮಿನೊ, ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊ, ಪೆಂಟೊಮಿನೊ** ಇತ್ಯಾದಿ. ಘಟಕ ಚೌಕಗಳ (unit squares) ಸಂಖ್ಯೆಯೇ ಆಕಾರದ ಹೆಸರನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಒತ್ತಿ ಹೇಳಲಾಯಿತು. ನಂತರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಲು ಹೇಳಲಾಯಿತು. ಇದು ವೈಯಕ್ತಿಕ ಚಟುವಟಿಕೆಯಾಗಿದ್ದರೂ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಹಜವಾಗಿಯೇ ತಮ್ಮ ಸಹಪಾಠಿಗಳೊಂದಿಗೆ ಚರ್ಚೆಯಲ್ಲಿ ತೊಡಗಿದರು. ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸುತ್ತಾ, ಒಂದೇ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ ಪಡೆದ ರೂಪಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸುತ್ತಾ ಹಾಗೆಯೇ ಪುನರಾವರ್ತಿತ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆ ಹಚ್ಚುವ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಮೂಲಕ ಅವರ ಚರ್ಚೆ ಮುಂದುವರೆಯಿತು.

ಈ ಚರ್ಚೆಗಳ ಮೂಲಕ, ಕೇವಲ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು ಮಾತ್ರ ಇವೆ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಂಡುಕೊಂಡರು.



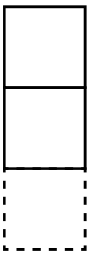
ಚಿತ್ರ 3: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಂಡುಕೊಂಡ ಎರಡು ವಿಭಿನ್ನ ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು

ನಂತರ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ **ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊ**ಗಳನ್ನು (ನಾಲ್ಕು ಚೌಕಗಳ ಆಕೃತಿ) ರಚಿಸಲು ಹೇಳಲಾಯಿತು. ಭ್ರಮಣೆ ಹಾಗೂ ಪ್ರತಿಬಿಂಬಗಳನ್ನು ಗಣನೆಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೆ, ಒಟ್ಟು **ಐದು ಅನನ್ಯ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು** ಮಾತ್ರ ಇರಲು ಸಾಧ್ಯ ಎಂಬುದನ್ನು ಅವರು ಒಟ್ಟಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಿ ಕಂಡುಕೊಂಡರು.



ಚಿತ್ರ 4: ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ರಚಿಸಿದ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು

ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ, ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು, ಡೊಮಿನೊಗೆ ಮತ್ತೊಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಟ್ರೊಮಿನೊ ಮಾಡಬಹುದೆಂದು ಹೇಳಿದನು (ಚಿತ್ರ 5).

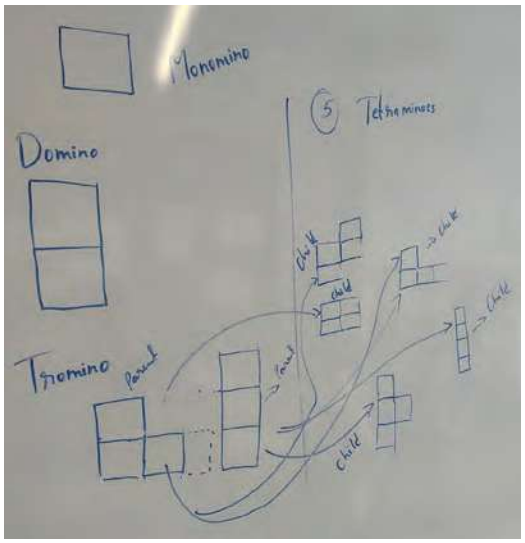


ಚಿತ್ರ 5: ಡೊಮಿನೊವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ರಚಿಸಲು ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ ಮಾಡಿದ ಪ್ರಯತ್ನದ ಉದಾಹರಣೆ

ಒಂದು ಚೌಕವನ್ನು ಸೇರಿಸಿ ಹೊಸ ಆಕಾರವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು ಎಂಬ ಸಲಹೆಯನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ನೀಡಿದಾಗ, ಸಣ್ಣ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳಿಂದ ದೊಡ್ಡ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ನಿರ್ಮಿಸುವ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ, ಈಗಾಗಲೇ ಇರುವ ಒಂದು ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗೆ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸಿದರೆ ಹೊಸ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊ ಉಂಟಾಗುತ್ತದೆ. ಈ ಹಿನ್ನಲೆಯಲ್ಲಿ, ಈಗಾಗಲೇ ಇರುವ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊವನ್ನು ಮೂಲ (Parent) ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊ ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದಕ್ಕೆ ಒಂದು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಸೇರಿಸುವುದರಿಂದ, ಹೊಸತೊಂದು ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊವನ್ನು ಪಡೆಯಬಹುದು. ಹೀಗೆ ರಚಿಸಲ್ಪಟ್ಟ ದೊಡ್ಡ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊವನ್ನು ಉತ್ವನ್ನ (Child) ಎಂದು ಕರೆಯಲಾಗುತ್ತದೆ. ಇದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕೆಲವು ಆಳವಾದ ಅಂಶಗಳನ್ನು ಗಮನಿಸುವಂತೆ ಮಾಡಿತು. ಅವುಗಳಲ್ಲಿ ಎರಡು ಪ್ರಮುಖವಾದವು:

- ಒಂದೇ ಮೂಲ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊ ಹಲವು ಉತ್ವನ್ನಗಳನ್ನು ಹುಟ್ಟುಹಾಕಬಹುದು
- ಒಂದು ಉತ್ವನ್ನ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲಗಳಿಂದ ಹುಟ್ಟುಕೊಳ್ಳಬಹುದು

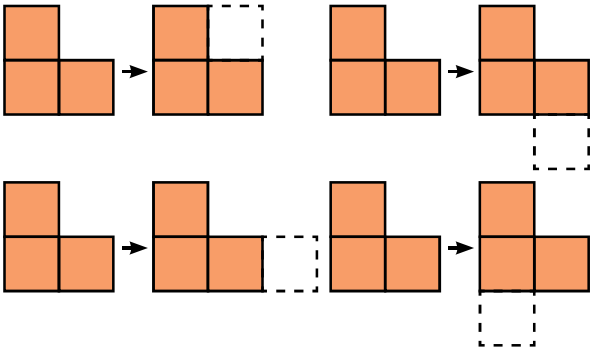
ಅವರು ಈ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಬಳಸುವ ಮೂಲಕ ದೃಶ್ಯ ರೂಪದಲ್ಲಿ ಪ್ರಸ್ತುತಪಡಿಸಿದರು. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ 6 ರಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.



ಚಿತ್ರ 6: ಬೋರ್ಡ್ ಮೇಲೆ ಪಾರಿಭಾಷಿಕ ಪದಗಳ ಪರಿಚಯ. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳನ್ನು ಬಳಸಿ ತೋರಿಸಿದ ಮೂಲ–ಉತ್ವನ್ನ ಸಂಬಂಧವನ್ನೂ ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು.

ಅವರು ಗಮನಿಸಿದ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸೋಣ.

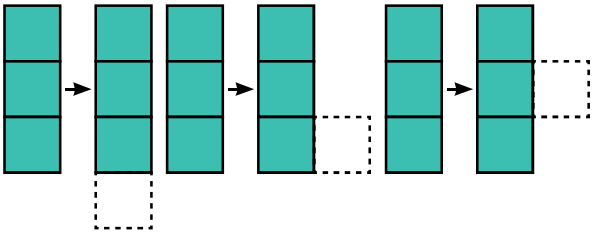
ಹೆಚ್ಚುವರಿ ಚೌಕವನ್ನು ಎಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ ಎಂಬುದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, 'L' ಆಕಾರದ ಟ್ರೊಮಿನೊ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಿನ್ನ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳಿಗೆ ಮೂಲವಾಗಿ ಕಾರ್ಯನಿರ್ವಹಿಸಬಹುದು, ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಗಮನಿಸಿದರು (ಚಿತ್ರ 7).



ಚಿತ್ರ 7: L–ಆಕಾರದ ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ಬಳಸಿ ರಚಿಸಿದ ನಾಲ್ಕು ವಿಭಿನ್ನ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು

ಒಂದೇ ಒಂದು ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊದಿಂದ ಹಲವು ಉತ್ತನ್ನ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮನಗಾಣಲು ಇದು ಸಹಕಾರಿಯಾಯಿತು.

ಅದೇ ರೀತಿ, **I–ಆಕಾರದ ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು** ಮೂಲ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊ ಎಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿದಾಗ, ಅದರಿಂದ **ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು** ರಚಿಸಬಹುದು ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಂಡರು (ಚಿತ್ರ 8).



ಚಿತ್ರ 8: I–ಆಕಾರದ ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ಬಳಸಿ ರಚಿಸಿದ ಮೂರು ವಿಭಿನ್ನ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳು

ಚಿತ್ರ 7 ಮತ್ತು 8ರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮತ್ತೊಂದು ಮುಖ್ಯವಾದ ವಿಷಯವನ್ನು ಗಮನಿಸಿದರು: **L ಮತ್ತು T ಆಕಾರದ** ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು L ಮತ್ತು I ಆಕಾರದ ಎರಡೂ ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳಿಂದಲೂ ರಚಿಸಬಹುದು. ಒಂದು ಉತ್ತನ್ನ (Child) ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗೆ ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಮೂಲ (Parent) ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳು ಇರಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಇದು ನೆರವಾಯಿತು.

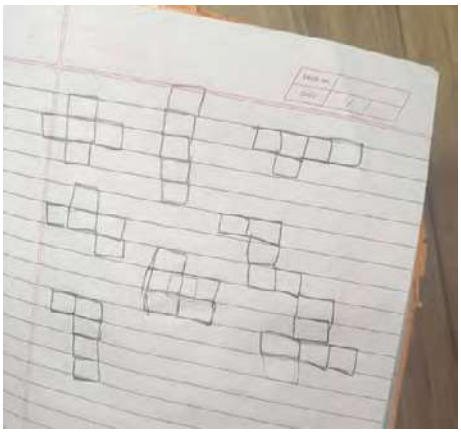
ಒಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯ ಗಮನಾರ್ಹ ಹೊಳಹಿನೊಂದಿಗೆ ಈ ಚರ್ಚೆ ಮುಕ್ತಾಯವಾಯಿತು:

> ***"ಮೊನೊಮಿನೊವೇ ಎಲ್ಲಾ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳ ಮೂಲ ಆಗಿದೆ."***

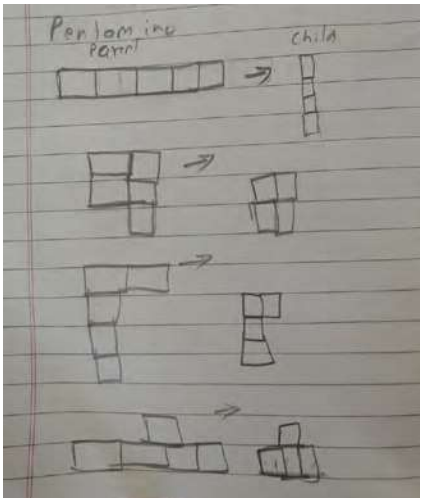
ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆ: ವಿವಿಧ ವಿಧಾನಗಳು

ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳನ್ನು (ಐದು ಚೌಕಗಳ ಆಕೃತಿ) ಬಿಡಿಸಲು ಹೇಳಿದಾಗ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ವಿಭಿನ್ನ ಕಾರ್ಯತಂತ್ರಗಳನ್ನು ಅಳವಡಿಸಿಕೊಂಡರು. ಕೆಲವರು ವಿವಿಧ ಸಂಯೋಜನೆಗಳನ್ನು ಅನ್ವೇಷಿಸಲು ಐದು ಚೌಕಗಳನ್ನು ಹಲವು ಬಾರಿ ಜೋಡಿಸಿ–ಮರು ಜೋಡಿಸಿದರೆ, ಇನ್ನೂ ಕೆಲವರು ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಮೂಲವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಿ ಅವುಗಳನ್ನು ವಿಸ್ತರಿಸುವ ಮೂಲಕ ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಉತ್ತನ್ನಗಳಾಗಿ ಪಡೆದರು. ಹಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿದ ನಂತರ, ಬಾಣದ ಗುರುತುಗಳು ಮತ್ತು ಕರಡು ಚಿತ್ರಗಳನ್ನು (rough work) ಬಳಸಿ ಮೂಲ–ಉತ್ತನ್ನ ಸಂಬಂಧಗಳನ್ನು ಕೂಡ ತೋರಿಸಿದರು (ಚಿತ್ರಗಳು 9 ರಿಂದ 11).

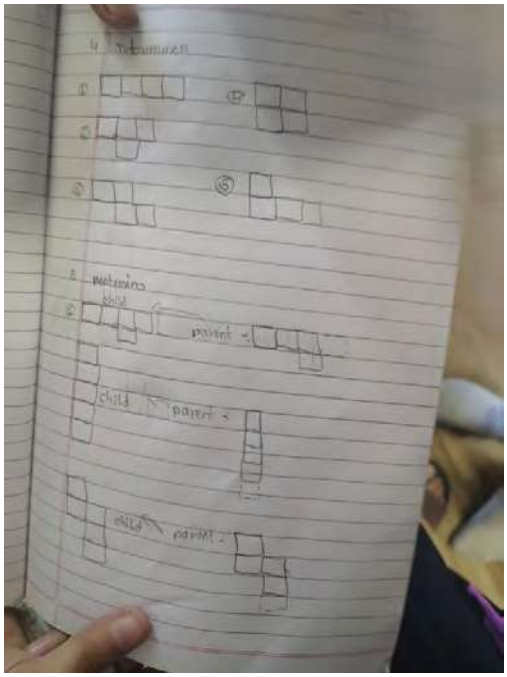
ಈ ವೈವಿಧ್ಯಮಯ ವಿಧಾನಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ತಾರ್ಕಿಕ ಚಿಂತನೆ, ದೃಶ್ಯೀಕರಣ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ (spatial visualization) ಮತ್ತು ಭ್ರಮಣಾ ಸಮಾನತೆಯನ್ನು (rotational equivalence) ಗುರುತಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಹೆಚ್ಚುತ್ತಿರುವುದನ್ನು ಎತ್ತಿ ತೋರಿಸಿದವು.



ಚಿತ್ರ 9: ಈ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಮೂಲ–ಉತ್ತನ್ನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸದೆ ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿದ್ದಾನೆ



ಚಿತ್ರ 10: ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಮೂಲ ಮತ್ತು ಉತ್ತನ್ನ ಎಂಬ ಹೆಸರುಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಬದಲಾಯಿಸಲಾಗಿದೆ. (ಬಹುಶಃ, ಮೂಲವು ಉತ್ತನ್ನಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರಬೇಕು ಎಂದು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಯು ಭಾವಿಸಿದ್ದಿರಬಹುದು.)



ಚಿತ್ರ 11: ಈ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ, ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಚುಕ್ಕೆಗಳ ಗೆರೆಗಳನ್ನು ಕರಡು ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಬಳಸಲಾಗಿದೆ

ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ತಾವು ಎಲ್ಲಾ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿ ಮುಗಿಸಿದ್ದೇವೆ ಎಂದು ಅನ್ನಿಸಿತು (ಅವರು ಅದಾಗಲೇ ರಚಿಸಿದ್ದನ್ನೇ ಪುನಃ ಬಿಡಿಸುತ್ತಿದ್ದರು). ಆಗ, 'ಇನ್ನು ಯಾವುದೇ ಹೊಸ ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳು ಇಲ್ಲ ಎಂದು ಖಚಿತವಾಗಿ ಹೇಗೆ ಹೇಳಬಹುದು?' ಎಂದು ನಾನು ಕೇಳಿದೆ. ಇದು ಅವರ ಆಲೋಚನೆಯನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಮೊದಲ ಪ್ರಯತ್ನಗಳಿಗೆ ಪ್ರೇರಣೆ ನೀಡಿತು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಐದು ಚೌಕಗಳ ಸ್ಥಾನಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಪ್ರಾರಂಭಿಸಿದರು. ತಾವು ಬಿಡಿಸಿದ ಹೊಸ ಚಿತ್ರವು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿದೆಯೇ ಅಥವಾ ಈಗಾಗಲೇ ಇರುವ ಚಿತ್ರದ ಭ್ರಮಣೆಯಿಂದ ಪಡೆದ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಫಲನದ ರೂಪವೇ ಎಂದು ನೋಡಲು ಆಕಾರಗಳನ್ನು ಹೋಲಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು. ಆ ಸಮಯದಲ್ಲಿ ಈ ತಾರ್ಕಿಕ ಚಿಂತನೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವ್ಯವಸ್ಥಿತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ, ಈ ಚರ್ಚೆಯು ಸಮಮಿತಿಯ (symmetry) ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ನಕಲುಗಳನ್ನು ಪತ್ತೆಹಚ್ಚುವ ವಿಧಾನವನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿತು. ಅಲ್ಲದೆ, ಕೇವಲ ಟ್ರಯಲ್ ಅಂಡ್ ಎರರ್ ವಿಧಾನವನ್ನು ಮೀರಿ ಯೋಚಿಸಲು ಅವರನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿತು.

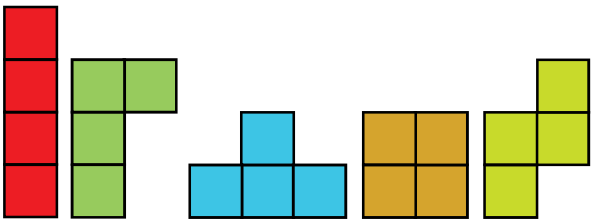
ಅವಧಿ 2: ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತುವುದು

ಎರಡನೇ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಸುತ್ತುವುದರ ಮೇಲೆ ಗಮನ ಹರಿಸಲಾಯಿತು. ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ, "ಸುತ್ತುವುದು" ಎಂದರೆ ಕೆಲವು ಮುಖಗಳು ಮುಚ್ಚಲ್ಪಡದೆ ಉಳಿದಿದ್ದರೂ ಸಹ, **ಎಷ್ಟು ಸಾಧ್ಯವೋ ಅಷ್ಟು** ಮುಖಗಳನ್ನು ಮುಚ್ಚುವುದು ಎಂದು ವ್ಯಾಖ್ಯಾನಿಸಿಕೊಳ್ಳೋಣ; ಆದರೆ, ಒಂದು ಮುಖವನ್ನು ಒಂದಕ್ಕಿಂತ ಹೆಚ್ಚು ಬಾರಿ ಮುಚ್ಚುವಂತಿಲ್ಲ, ಅಂದರೆ ಒಂದರ ಮೇಲೊಂದು ಪದರ ಹಾಕಲು ಅವಕಾಶವಿಲ್ಲ. ಆರಂಭದಲ್ಲಿ, ಅನೇಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು "ಸುತ್ತುವುದು" ಎಂದರೆ **ಚೌಕ ಘನದ ಎಲ್ಲಾ ಆರು ಮುಖಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಒಂದು ಬಾರಿ ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಮುಚ್ಚುವುದು** ಎಂದು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಂಡರು. ಇದರಿಂದ ಅವರು **ಅಪವರ್ತ್ಯ ಮತ್ತು ಅಪವರ್ತನಗಳನ್ನು** ಆಧರಿಸಿ ಯೋಚಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು. ಅದರ ಪರಿಣಾಮವಾಗಿ ಅವರು ಈ ಕೆಳಗಿನ ತೀರ್ಮಾನಗಳಿಗೆ ಬಂದರು:

- ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ಎರಡು ಬಾರಿ ಬಳಸಿದರೆ ಘನದ ಆರು ಮುಖಗಳನ್ನು ಮುಚ್ಚಬಹುದು.
- ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ಬಳಸಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ಕೆಲವು ಮುಖಗಳು ಮುಚ್ಚದೆ ಉಳಿಯುತ್ತವೆ.

ಹೀಗಿದ್ದರೂ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಈ ತಪ್ಪು ತಿಳುವಳಿಕೆ ಉಪಯುಕ್ತವಾಗಿಯೇ ಪರಿಣಮಿಸಿತು. ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ವಾದವನ್ನು ಹೇಗೆ ಆಕೃತಿಗಳ ದಿಕ್ಕಿನ (orientation) ಹಿನ್ನಲೆಯಿಂದ ಸಂಖ್ಯಾತ್ಮಕ ಗುಣಲಕ್ಷಣಗಳ (numerical properties) ಕಡೆಗೆ ಬದಲಾಯಿಸಿಕೊಂಡರು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಇದು ತೋರಿಸಿಕೊಟ್ಟಿತು. ನಂತರ, ಈ ಸಂದರ್ಭದಲ್ಲಿ "ಸುತ್ತುವುದು" ಪದದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟಪಡಿಸಲಾಯಿತು. ಇದರ ಉದ್ದೇಶ, ಮೂಲ–ಉತ್ಪನ್ನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ಚೌಕ ಘನದ ಜಾಲಗಳಾಗಬಹುದಾದ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದಾಗಿತ್ತು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಗ್ರಿಡ್ ಪೇಪರ್ ಮೇಲೆ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಬಿಡಿಸಲು ಹೇಳಲಾಯಿತು. ನಂತರ ಶಿಕ್ಷಕರು ಅವುಗಳನ್ನು ಕತ್ತರಿಸಿ, ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತಲು ಪ್ರಯತ್ನಿಸಿದರು. ಕೈಯಲ್ಲಿ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳು ಇದ್ದುದರಿಂದ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು **ಆಕೃತಿಯ ದಿಕ್ಕು (orientation) ಮತ್ತು ಸ್ಥಳಾವಕಾಶದ ಹೊಂದಾಣಿಕೆಯ (spatial fit)** ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಯೋಚಿಸಲು ಆರಂಭಿಸಿದರು. ಈ ಅನ್ವೇಷಣೆಯ ಮೂಲಕ, **ಐದು ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಹೊರತು ಪಡಿಸಿ ಉಳಿದ ನಾಲ್ಕನ್ನು** ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತಬಹುದು ಎಂಬುದನ್ನು ಅವರು ಕಂಡುಕೊಂಡರು (ಚಿತ್ರ 12).



ಚಿತ್ರ 12: ಕಿತ್ತಳೆ ಬಣ್ಣದ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊ ಮಾತ್ರ, ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಏಕೈಕ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊ ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಮನಗಂಡರು.

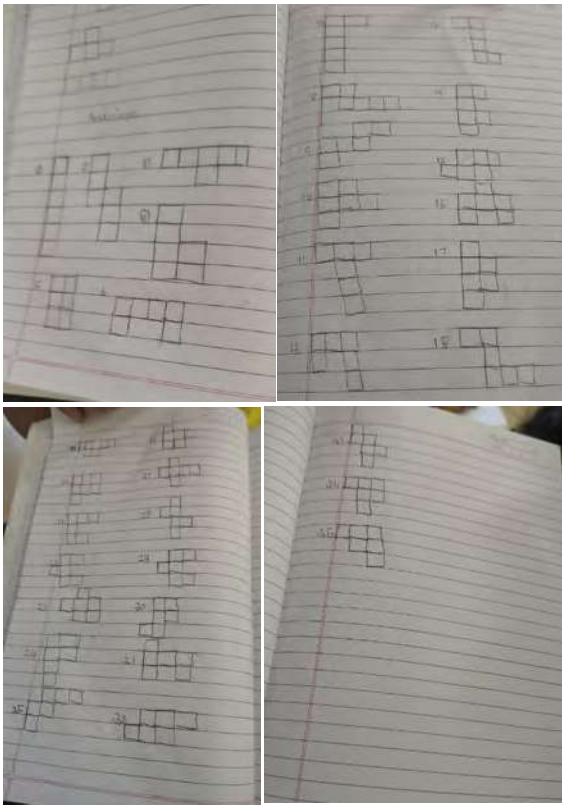
ಕತ್ತರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಬಳಸಿದ್ದರಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಚೆನ್ನಾಗಿ ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಲು ಸಾಧ್ಯವಾದರೂ, ಪ್ರತಿಯೊಬ್ಬ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗೂ ಕತ್ತರಿ ನೀಡಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಕಾರಣ, ಈ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯು ಹೆಚ್ಚು ಸಮಯ ತೆಗೆದುಕೊಳ್ಳುತ್ತಿತ್ತು.

ಅವಧಿ 3: ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳು ಮತ್ತು ಘನಾಕೃತಿಯ ಜಾಲಗಳು

ಮೂರನೇ ಅಧಿವೇಶನದಲ್ಲಿ ಸಮಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚು ಪರಿಣಾಮಕಾರಿಯಾಗಿ ಬಳಸಲು, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ನೋಟ್‌ಪುಸ್ತಕಗಳಲ್ಲೇ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸಿದರು. ಜೊತೆಗೆ ಅದಾಗಲೇ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿದ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನೂ ಸಹ ಅವರಿಗೆ ನೀಡಲಾಯಿತು. ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರಿಸುವುದು ಸವಾಲಿನ ಕೆಲಸವೇ ಆಗಿತ್ತು.

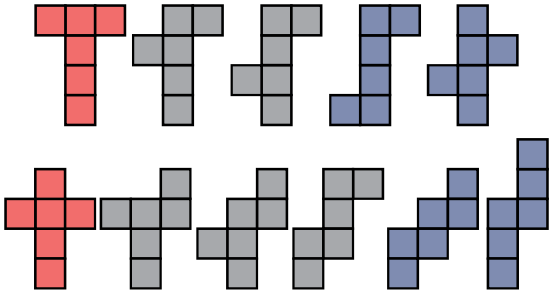
ಆದರೂ, ಚರ್ಚೆಗೆ ಉತ್ತೇಜನ ನೀಡುವ ಉದ್ದೇಶದಿಂದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಜೋಡಿಯಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡಲು ತಿಳಿಸಲಾಯಿತು. ಒಂದು ಆಕೃತಿಯು ಮತ್ತೊಂದರ ಭ್ರಮಾಣಾ ರೂಪವೇ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಾ, ನಕಲು ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಗುರುತಿಸಿದರು.

ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಈ ಕೆಲಸಕ್ಕಾಗಿ ಸುಮಾರು **35 ನಿಮಿಷ**ಗಳನ್ನು ನೀಡಲಾಗಿತ್ತು. ವಿಶೇಷವೆಂದರೆ, ಕೆಲವು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು **ಎಲ್ಲಾ 35 ಅನನ್ಯ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳನ್ನು** ಯಶಸ್ವಿಯಾಗಿ ರಚಿಸಿದರು (ಚಿತ್ರ 13).



ಚಿತ್ರ 13: ಇಲ್ಲಿ ನೀಡಿರುವ ನಾಲ್ಕು ಚಿತ್ರಗಳು ಸಾಧ್ಯವಿರುವ ಎಲ್ಲಾ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ತೋರಿಸುತ್ತವೆ.

ಕತ್ತರಿಸಿದ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊ ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು ಚೌಕ ಘನಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು, ಯಾವ ಆಕಾರಗಳು ಚೌಕ ಘನದ ಸುತ್ತ ಸುತ್ತಬಲ್ಲವು ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಪರೀಕ್ಷಿಸಿದರು. ಸುತ್ತಲು ಸಾಧ್ಯವಾಗದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಪ್ರತ್ಯೇಕವಾಗಿ ಇರಿಸಿದರು. **ಸಾಧ್ಯವಿರುವ 35 ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳಲ್ಲಿ** ಕೇವಲ 11 ಮಾತ್ರ ಚೌಕ ಘನವೊಂದನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲವು ಎಂಬುದನ್ನು ಅವರು ಕಂಡುಕೊಂಡರು. ಈ ಹಂತದಲ್ಲಿ, **ಚೌಕ ಘನದ ಜಾಲ** ಎಂಬ ಪರಿಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಔಪಚಾರಿಕವಾಗಿ ಪರಿಚಯಿಸಲಾಯಿತು.



ಚಿತ್ರ 14: ಚೌಕ ಘನದ ಜಾಲಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸಬಲ್ಲ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳು

ನಂತರ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಮ್ಮ ಜಾಲಗಳನ್ನು ಮಡಚಿದರು. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ, **2-ಆಯಾಮದ (2D) ಆಕೃತಿಗಳು 3-ಆಯಾಮದ (3D) ಘನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ರೂಪುಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನು** ಅವರು ನೇರವಾಗಿ ಕಂಡು ಅನುಭವಿಸಿದರು. ಸಮತಲ ಆಕೃತಿಗಳು ಚೌಕ ಘನಗಳಾಗಿ ರೂಪಾಂತರಗೊಳ್ಳುವುದನ್ನು ನೋಡುವುದು ಅವರಲ್ಲಿ ತೀವ್ರ ಉತ್ಸಾಹ ಮತ್ತು ಸಾಧನೆಯ ಭಾವನೆಯನ್ನು ಮೂಡಿಸಿತು. ಹೀಗೆ ಪೂರ್ಣಗೊಂಡ ಚೌಕ ಘನಗಳು ಕೇವಲ ಗಣಿತದ ವಸ್ತುಗಳಾಗಿ ಉಳಿಯದೆ, ಅವರ ಅನ್ವೇಷಣೆ ಮತ್ತು ಕಲಿಕೆಯ ಸ್ಪಷ್ಟ ಫಲವಾಗಿ ಪರಿಣಮಿಸಿದವು. ಇದು ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯಿಂದ ಅವರಿಗೆ ದೊರೆತ ಅತ್ಯಂತ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಅನುಭವವಾಗಿತ್ತು.

ಇಡೀ ಅವಧಿಯಲ್ಲಿ, ಜೋಡಿಯಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ, "ನಾವು ಚೌಕವನ್ನು ಇನ್ನೊಂದು ಜಾಗದಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಿದರೆ ಏನಾಗುತ್ತದೆ?" ಎಂಬಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳುವುದು, ಎರಡು ಆಕೃತಿಗಳು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿವೆಯೇ ಅಥವಾ ಒಂದು ಇನ್ನೊಂದರ ಭ್ರಮಾಣಾ ಅಥವಾ ಪ್ರತಿಫಲನಾ ರೂಪವೇ ಎಂಬುದರ ಕುರಿತು ಅವರು ಪರಸ್ಪರ ಚರ್ಚಿಸುತ್ತಿದ್ದದ್ದನ್ನು ಕಾಣುವುದು ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿತ್ತು.

ಸುತ್ತುವಿಕೆ ಮತ್ತು ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳ ಚಟುವಟಿಕೆಗಳ ಸಮಯದಲ್ಲಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ತಾವು ಮಾಡಿದ ರಚನೆಗಳನ್ನು ಪರೀಕ್ಷಿಸಲು ಸಹಾಯವಾಗಲಿ ಎಂದು ನಾನು 'ಲಿಂಕಿಂಗ್ ಕ್ಯೂಬ್ಸ್'ಗಳನ್ನು (ಒಂದಕ್ಕೊಂದು ಜೋಡಿಸಬಹುದಾದ ಸಣ್ಣ ಘನಗಳು) ನೀಡಿದ್ದೆ. ಆದರೆ, ಈ ಲಿಂಕಿಂಗ್ ಕ್ಯೂಬ್ಸ್‌ಗಳ ಗಾತ್ರವು ಕಾಗದದ ಆಕೃತಿಗಳ (cut-outs) ಅಳತೆಗೆ ಯಾವಾಗಲೂ ಹೊಂದಿಕೆಯಾಗದ ಕಾರಣ, ಇದು ಕೆಲವು ಬಾರಿ ಗೊಂದಲಕ್ಕೆ ಕಾರಣವಾಯಿತು. ಆದ್ದರಿಂದ, ನಿಖರವಾದ ಗಾತ್ರದ ಬಗ್ಗೆ ಹೆಚ್ಚು ಗಮನ ಕೊಡದೆ, ಅಗತ್ಯಕ್ಕೆ ತಕ್ಕಂತೆ ಗಾತ್ರವನ್ನು ಬದಲಾಯಿಸಿದರೆ ಆ ಆಕೃತಿಯು ಘನದ ಮೇಲ್ಮೈಯನ್ನು ಮಡಚಿ ಮುಚ್ಚಲು ಸಾಧ್ಯವೇ ಎಂಬುದರ ಬಗ್ಗೆ ಯೋಚಿಸುವಂತೆ ನಾನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಪ್ರೋತ್ಸಾಹಿಸಿದೆ.

ಘನದ ಜಾಲಗಳನ್ನು ಮಡಚುವ ಪ್ರಯತ್ನದಲ್ಲಿ, ಯಾವುದಾದರೂ ಒಂದು ಚೌಕ ಮುಚ್ಚದೆ ಉಳಿದಾಗ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕತ್ತರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಯನ್ನು ತಿರುಗಿಸಿ, ಮೊದಲು ಹೊರಗೆ ಉಳಿದ ಭಾಗವನ್ನು ಬೇರೆ ಸ್ಥಾನದಲ್ಲಿ ಇರಿಸಿ, ನಂತರ ಮತ್ತೊಮ್ಮೆ ಮಡಚಿ ನೋಡುತ್ತಿದ್ದರು. ಈ ರೀತಿಯ ಯತ್ನಿಸಿ ಹೊಂದಿಸುವ (trial-and-adjust) ವಿಧಾನಗಳು, ಅವರಲ್ಲಿ ಬೆಳೆಯುತ್ತಿದ್ದ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶದ ತಾರ್ಕಿಕ ಚಿಂತನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು (spatial reasoning) ಮತ್ತು ನಿರಂತರ ಪ್ರಯತ್ನದ ಮನೋಭಾವವನ್ನು ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸುತ್ತವೆ.

ಅವಲೋಕನಗಳು ಮತ್ತು ಕಲಿಕಾ ಫಲಗಳು

ಒಟ್ಟಾರೆಯಾಗಿ, ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ತೊಡಗಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದರ ಜೊತೆಗೆ ಅವರ ಚಿಂತನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಿಸಿತು. ಈ ಚಟುವಟಿಕೆಯ ಮೂಲಕ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸಾಮರ್ಥ್ಯಗಳನ್ನು ಪ್ರದರ್ಶಿಸಿದರು:

- ಆಕೃತಿಗಳ ಭ್ರಮಣೆ ಮತ್ತು ಅವುಗಳ ಅನನ್ಯತೆಯ ಬಗ್ಗೆ ಸ್ಪಷ್ಟ ತಿಳುವಳಿಕೆ
- ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಸುತ್ತುವಾಗ ಸ್ಥಳಾವಕಾಶದ ಚಿಂತನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯದಲ್ಲಿ (spatial reasoning) ಅಭಿವೃದ್ಧಿ
- 2D ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು 3D ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ

- ಸಹಯೋಗದಲ್ಲಿ ಯೋಚಿಸುವುದು ಹಾಗೂ ಗಣಿತದ ವಿಚಾರಗಳನ್ನು ಪರಸ್ಪರ ಹಂಚಿಕೊಳ್ಳುವ ಮತ್ತು ಚರ್ಚಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ

ತರಗತಿಯಲ್ಲಿ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳುವವರಿಗೆ ಸಲಹೆಗಳು

ತರಗತಿಯ ಅವಲೋಕನಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ, ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸುಧಾರಣೆಗಳನ್ನು ಸೂಚಿಸಲಾಗಿದೆ:

- ಸಮಯವನ್ನು ಉಳಿಸಲು ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಕಾಪಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು, ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳ ಕತ್ತರಿಸಿದ ಆಕೃತಿಗಳನ್ನು ಮುಂಚಿತವಾಗಿಯೇ ಸಿದ್ಧಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.
- ಎಲ್ಲಾ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸಕ್ರಿಯವಾಗಿ ಭಾಗವಹಿಸಲು ಅನುಕೂಲವಾಗುವಂತೆ ಸಾಕಷ್ಟು ಸಂಖ್ಯೆಯಲ್ಲಿ ಚೌಕ ಘನದ ಜಾಲಗಳು ಇರುವುದನ್ನು ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಿ.
- ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಆಳವಾಗಿ ಯೋಚಿಸುವಂತೆ ಮಾಡುವ ಹೆಚ್ಚಿನ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳನ್ನು ಕೇಳಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ:
  - → ಒಂದು ಆಕಾರವು ಮತ್ತೊಂದರ ಭ್ರಮಾಣಾ ರೂಪ ಎಂದು ನೀವು ಹೇಗೆ ಹೇಳುತ್ತೀರಿ?
  - → ಎರಡು ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳು ನಿಜವಾಗಿಯೂ ವಿಭಿನ್ನವಾಗಿವೆ ಎಂದು ನಾವು ಹೇಗೆ ಖಚಿತಪಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು?
  - → ಉತ್ಪನ್ನವು ಮೂಲಕ್ಕಿಂತ ದೊಡ್ಡದಾಗಿರುವ ಬೇರೆ ಸಂದರ್ಭಗಳನ್ನು ನೀವು ನೋಡಿದ್ದೀರಾ?

ಇಂತಹ ಪ್ರಶ್ನೆಗಳು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಪರಿಕಲ್ಪನಾ ಜ್ಞಾನವನ್ನು ಇನ್ನಷ್ಟು ಆಳಗೊಳಿಸುವುದರ ಜೊತೆಗೆ, ತಮ್ಮ ಗಣಿತೀಯ ಆಲೋಚನೆಗಳನ್ನು ಸಮರ್ಥಿಸಿಕೊಳ್ಳುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನೂ ಬೆಳೆಸುತ್ತವೆ.

ಉಪಸಂಹಾರ

ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಬಳಸಿಕೊಂಡು ನಡೆಸಿದ ಈ ಮೂರು ಅವಧಿಗಳ ಅನ್ವೇಷಣೆಯು, 4ನೇ ತರಗತಿಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗೆ ಅವರ ಅಧಿಕೃತ ಪಠ್ಯಕ್ರಮದಲ್ಲಿ ಪರಿಚಯಿಸುವ ಮುನ್ನವೇ ಚೌಕ ಘನದ ಜಾಲಗಳನ್ನು ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳಲು ಒಂದು ಅತ್ಯಂತ ಪರಿಣಾಮಕಾರಿ ಮತ್ತು ಸಹಜವಾದ ಮಾರ್ಗವನ್ನು ಒದಗಿಸಿತು. ಸರಳ ಪಾಲಿಯೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದರಿಂದ ಆರಂಭಿಸಿ, ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳನ್ನು ಘನದ ಸುತ್ತ ಮಡಚುವವರೆಗೆ ಸಾಗಿದ ಈ ಕಲಿಕಾ ಪ್ರಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ, ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಸ್ಥಳಾವಕಾಶದ ಚಿಂತನಾ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನು (spatial reasoning) ಉತ್ತಮವಾಗಿ ಬೆಳೆಸಿಕೊಂಡರು. ಜೊತೆಗೆ, ಭ್ರಮಣೆ (rotation), ಸಮಾನತೆ (equivalence) ಹಾಗೂ ಗಣಿತದಲ್ಲಿರುವ ವಿವಿಧ ಸಾಧ್ಯತೆಗಳನ್ನು ಕ್ರಮಬದ್ಧವಾಗಿ ಅನ್ವೇಷಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯವನ್ನೂ ಅಭಿವೃದ್ಧಿಪಡಿಸಿಕೊಂಡರು. **ಮೂಲ–ಉತ್ಪನ್ನ (Parent–Child)** ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸುವುದರಿಂದ ಅವರ ರಚನಾತ್ಮಕ ಚಿಂತನೆ (structural thinking) ಮತ್ತು ವಿನ್ಯಾಸಗಳನ್ನು (patterns) ಗುರುತಿಸುವ ಸಾಮರ್ಥ್ಯ ಇನ್ನಷ್ಟು ವೃದ್ಧಿಯಾಯಿತು.

ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾಗಿ, ಸ್ವತಃ ಅನ್ವೇಷಣೆ ನಡೆಸುವ ಮೂಲಕ **35 ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳಲ್ಲಿ ಕೇವಲ 11 ಮಾತ್ರ ಘನದ ಜಾಲಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುತ್ತವೆ** ಎಂಬುದನ್ನು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳು ಕಂಡುಕೊಂಡದ್ದು, ಅವರ ಕಣ್ಣಿಗೆ ಕಾಣದ ಅಮೂರ್ತ ಕಲ್ಪನೆಯನ್ನು ಸ್ಪಷ್ಟವಾದ ಮೂರ್ತ ತಿಳುವಳಿಕೆಯಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸಿತು. ಯಶಸ್ವಿ ಜಾಲಗಳನ್ನು ಘನಾಕೃತಿಗಳಾಗಿ ಮಡಚುವುದು ಅವರ ಈ ಕಲಿಕೆಯ ಪ್ರಯಾಣಕ್ಕೆ ಒಂದು ಸಂಭ್ರಮದ ಮುಕ್ತಾಯವನ್ನು ನೀಡಿತು. ಜೊತೆಗೆ, 2–ಆಯಾಮದ (2D) ಆಕೃತಿಗಳು ಮತ್ತು 3–ಆಯಾಮದ (3D) ವಸ್ತುಗಳ ನಡುವಿನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ದೃಢಪಡಿಸಿತು ಹಾಗೂ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಲ್ಲಿ ಆತ್ಮವಿಶ್ವಾಸ, ಕುತೂಹಲ ಮತ್ತು ಗಣಿತದ ಬಗ್ಗೆ ಅರ್ಥಪೂರ್ಣ ಆಸಕ್ತಿಯನ್ನು ಬೆಳೆಸಿತು.

ಪರಾಮರ್ಶನ

- ಚಿತ್ರ 3: ಟ್ರೊಮಿನೊಗಳ ಚಿತ್ರಗಳು. ಮೂಲ: Wikipedia contributors, 2025, *Tromino*.
- ಚಿತ್ರ 4: ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳ ಚಿತ್ರಗಳು. ಮೂಲ: Alchetron, 2024, Tetromino.
- ಚಿತ್ರ 6: ಮೂಲ–ಉತ್ಪನ್ನ ಸಂಬಂಧದ ಕುರಿತು ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳ ಅವಲೋಕನ. ಮೂಲ: ಲೇಖಕರ ತರಗತಿ, 2026.
- ಚಿತ್ರ 7: L–ಆಕಾರದ ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ಬಳಸಿ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳ ರಚನೆ. ಮೂಲ: Wikipedia contributors, 2025, *Tromino* ಇಂದ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
- ಚಿತ್ರ 8: I–ಆಕಾರದ ಟ್ರೊಮಿನೊವನ್ನು ಬಳಸಿ ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳ ರಚನೆ. ಮೂಲ: Wikipedia contributors, 2025, *Tromino* ಇಂದ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.
- ಚಿತ್ರ 9: ಮೂಲ–ಉತ್ಪನ್ನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸದೆ ಚಿತ್ರಿಸಿದ ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳು. ಮೂಲ: ಲೇಖಕರ ತರಗತಿ, 2026.
- ಚಿತ್ರಗಳು 10–11: ಮೂಲ–ಉತ್ಪನ್ನ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ಬಳಸಿ ಚಿತ್ರಿಸಿದ ಪೆಂಟೊಮಿನೊಗಳು. ಮೂಲ: ಲೇಖಕರ ತರಗತಿ, 2026.
- ಚಿತ್ರ 12: ಟೆಟ್ರೊಮಿನೊಗಳ ಚಿತ್ರಗಳು. ಮೂಲ: Puzzle Genius, ದಿನಾಂಕ ಲಭ್ಯವಿಲ್ಲ (*n.d.*), *Tetromino*.
- ಚಿತ್ರ 13: ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳ ಚಿತ್ರಗಳು. ಮೂಲ: ಲೇಖಕರ ತರಗತಿ, 2026.
- ಚಿತ್ರ 14: ಘನದ ಜಾಲಗಳನ್ನು ರೂಪಿಸುವ ಹೆಕ್ಸೊಮಿನೊಗಳ ಚಿತ್ರಗಳು. ಮೂಲ: Wikipedia contributors, 2025, *Hexomino* ಇಂದ ಅಳವಡಿಸಿಕೊಳ್ಳಲಾಗಿದೆ.



ಅಸ್ಮಾ ಮೆಮನ್ ಅವರು ಬೆಂಗಳೂರಿನ ಅಜೀಂ ಪ್ರೇಮ್‌ಜಿ ವಿಶ್ವವಿದ್ಯಾಲಯದ ಹಳೆಯ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿ. ಪ್ರಸ್ತುತ ಅವರು ಮುಂಬೈನ ಶಿಖಾ ಅಕಾಡೆಮಿಯಲ್ಲಿ ಪ್ರಾಥಮಿಕ ಶಾಲೆಯ ಗಣಿತ ಶಿಕ್ಷಕರಾಗಿ ಕೆಲಸ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದಾರೆ. ಅವರು ಶಾಲಾ ಗಣಿತವನ್ನು ಪ್ರಾಯೋಗಿಕ ಅನುಭವ ಹಾಗೂ ದೃಶ್ಯ ಮಾದರಿಗಳ ಮೂಲಕ ಕಲಿಸಲು ಸಾಧನಗಳು ಮತ್ತು ಚಟುವಟಿಕೆಗಳನ್ನು ವಿನ್ಯಾಸಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ಮತ್ತು ಅನುಷ್ಠಾನಗೊಳಿಸುವಲ್ಲಿ ಆಸಕ್ತರಾಗಿದ್ದಾರೆ. ತಮ್ಮ ಕಾಲೇಜು ದಿನಗಳಲ್ಲಿ ಅವರು ದತ್ತ ಅಂಕಿ–ಅಂಶಗಳ ಮಾದರಿ ಹಾಗೂ ವಿತರಣೆಯ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಯನ್ನು ಬಹಳ ಆಸಕ್ತಿಯಿಂದ ಮಾಡುತ್ತಿದ್ದರು.
ಸಂಪರ್ಕ: asma.memon20ug@apu.edu.in

● ಅನುವಾದ: **ಯತಿರಾಜ್ ಶರ್ಮ** | ಪರಿಶೀಲನೆ: **ಮಧುಕರ ಎಸ್. ಪುಟ್ಟಿ**