सांख्यिकी की एक महत्वपूर्ण तकनीक का आविष्कार एक बीयर कारखाने में हुआ था

सुशील जोशी, भास बापट व हिमांशु श्रीवास्तव

कई अध्ययनों में किसी आबादी के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए यह सम्भव नहीं होता है कि आबादी के एक-एक करके हर सदस्य की जानकारी एकत्रित की जाए। ऐसी स्थिति में उस आबादी के एक नमूने के बारे में जानकारी हासिल की जाती है और माना जाता है कि वह हमें पूरी आबादी के बारे में अनुमान लगाने में मदद करेगी। सवाल यह उठता है कि क्या वह नमूना हमें पूरी आबादी के बारे में सटीकता से कुछ बता सकता है। सांख्यिकी में यह देखने की एक तकनीक है कि जो नमूना आपने चुना है, वह पूरी आबादी का प्रतिनिधित्व करता है या नहीं। इसे टी-टेस्ट कहते हैं और इसका आविष्कार 1908 में बीयर बनाने के एक कारखाने - गिनेस आसवनी (ब्रूअरी) - में हुआ था। किस्सा निहायत रोमांचक है और बताता है कि वैज्ञानिक खोजें कई अजीबोगरीब रास्तों से होती हैं।

दरअसल, इस आसवनी की स्थापना एक गणितज्ञ से शराब निर्माता बने आर्थर गिनेस ने की थी। आपका अनुमान सही है - मशहूर गिनेस बुक ऑफ वर्ल्ड रिकॉर्ड्स भी इसी आसवनी की देन है। यह आसवनी शुरुआत से ही कई नवाचारों का अड्डा रही थी, जैसे बीयर को उसका जाना-माना झाग देने की विधि का आविष्कार भी यहीं हुआ था।

बहरहाल, जैसे-जैसे कारोबार फैला, आसवनी के मालिकों को गुणवत्ता की चिन्ता सताने लगी। अपनी स्थापना के लगभग 150 वर्ष बाद यानी बीसवीं सदी के शुरू तक यह दुनिया की सबसे बड़ी आसवनी थी। वे चाहते थे कि दुनियाभर में फैली उनकी कलालियों पर बीयर की गुणवत्ता एक-जैसी रहे। पहले तो आँखों से परखकर और कुछ सामान्य से परीक्षण करके काम चल जाता था। परन्तु फिर बढ़ते कारोबर के साथ इस चिन्ता में से निकली, सांख्यिकी की महत्वपूर्ण विधि 'टी-टेस्ट'।



आर्थर गिनेस

इसके लिए कम्पनी ने कुछ होशियार लोगों को नियुक्त करके, उन्हें शोध कार्य करने की छूट दे दी। इसके साथ ही आसवनी तमाम किस्म के सवालों के जवाब खोजने की प्रयोगशाला बन गई - जैसे जौं की सबसे बढ़िया किस्में कहाँ उगती हैं, माल्ट के सत में सेकेरीन का सर्वोत्तम स्तर क्या होगा, या उनके विज्ञापनों का बिक्री पर क्या असर हो रहा है वगैरह।

इन सारे सवालों के साथ एक महत्वपूर्ण सवाल यह था कि किसी छोटे-से नमूने के आधार पर आँकड़ों को कैसे समझा जाए। जैसे गिनेस बीयर का एक महत्वपूर्ण घटक था हॉप (*Humulus lupulus*) नामक लता के मादा फूल। ये फूल बीयर को उसका जाना-पहचाना कड़वापन देने के अलावा कुदरती परिरक्षक का काम भी करते हैं। कौन-से फूल बीयर बनाने के लिहाज़ से सर्वोत्तम होंगे, यह पता करने के लिए शराब निर्माता उस लता में सॉफ्ट रेज़िन की मात्रा को देखते थे।

जैसे मान लीजिए कि सॉफ्ट रेज़िन की 8 प्रतिशत मात्रा को यथेष्ट माना गया। अब यह तो बहुत महँगा सौदा होगा कि पूरे बगीचे के हर फूल (यानी पूरी आबादी) में इसकी मात्रा नापी जाए। तो उन्होंने कुछ नमूनों का परीक्षण करके पूरी आबादी के बारे में अनुमान लगाने की कोशिश की - जैसा कि कोई भी वैज्ञानिक करेगा।

उनके वास्तविक आँकड़े तो हमें उपलब्ध नहीं हैं, इसलिए कुछ काल्पनिक आँकड़ों से बात को समझने की कोशिश करेंगे। मान लेते हैं कि उन्होंने 9 नमूनों में सॉफ्ट रेज़िन की मात्रा नापी। यह मात्रा 4 प्रतिशत से लेकर 10 प्रतिशत के बीच थी। औसत (माध्य) 6 प्रतिशत था। तो क्या करेंगे? क्या पूरी फसल को खारिज कर देंगे?

जो कम औसत माप मिला है, उसके दो कारण हो सकते हैं। हो सकता है कि पूरी फसल में सॉफ्ट रेज़िन की मात्रा वास्तव में यथेष्ट (8 प्रतिशत) से कम हो। यह भी सम्भव है कि उन्होंने बेतरतीबी से यानी randomly जो फूल चुने

थे, उनमें किसी कारण से यह मात्रा असाधारण रूप से कम रही हो। इसी बात को इस तरह भी कहा जा सकता है – क्या उनके नमूने में पाई गई सॉफ्ट रेज़िन की मात्रा को 8 प्रतिशत से उल्लेखनीय रूप से कम माना जाए, या यह स्वाभाविक उतार-चढ़ाव यानी वास्तविक विविधता की द्योतक है?

हमें यह समझना होगा कि 'सांख्यिकीय रूप से उल्लेखनीय' होने का मतलब क्या है। नमूना बड़ा हो तो निष्कर्ष निकालना आसान होगा। लेकिन छोटे-छोटे नमूनों के साथ काम करने में दिक्कत आती है। और गिनेस आसवनी में काम करने वाले विलियम सीली गोसेट ने इसी समस्या का हल सुझाया था।

सम्भाविता और सांख्यिकी

आगे बढ़ने से पहले हमें सांख्यिकी के दो मान समझने होंगे। पहला मान है औसत जो आँकड़ों के किसी समूह के प्रातिनिधिक मध्य को सटीक दर्शाता है। औसत मिलता है, आँकड़ों के मान के जोड़ में आँकड़ों की संख्या का भाग देने से। दूसरा मान है मानक विचलन (standard deviation) जो यह दर्शाता है कि औसत से बड़ी संख्याएँ और औसत से छोटी संख्याएँ औसत से कितनी दूर हैं।

फिर से हॉप्स फूलों के उदाहरण पर लौटते हैं। नमूने के फूलों में सॉफ्ट रेज़िन की औसत मात्रा 6 प्रतिशत थी। और हम यह जानना चाहते हैं कि क्या पूरी फसल में रेज़िन की मात्रा यथेष्ट (8 प्रतिशत) से वास्तव में कम होगी या यह महज़ हमारे नमूने की समस्या है। तो यह सवाल पूछा जा सकता है: इस बात की कितनी सम्भाविता है कि पूरी फसल में औसतन 8 प्रतिशत रेज़िन होने के बावजूद किसी नमूने में 6 प्रतिशत का औसत मिलेगा? इस सम्भाविता को सांख्यिकी की भाषा में *P* मान (यानी सम्भाविता या probability) कहते हैं। पारम्परिक रूप से माना जाता है कि यदि *P* मान 0.05 से कम हो तो हम मानेंगे कि यह अन्तर सांख्यिकीय रूप से उल्लेखनीय है। *P* मान पता लगाना गणितीय दृष्टि से कठिन है, लेकिन चूँकि इसे अक्सर काम में लाया जाता है, इसकी मानक तालिकाएँ उपलब्ध हैं।

P मान पर अक्सर दो चीज़ों का असर पड़ता है – पहला है कि कोई भी नमूना पूरी आबादी में अपेक्षित परिणाम से कितना भिन्न है और दूसरा है कि आँकड़ों के बीच बड़ी-बड़ी भिन्नताएँ कितनी आम हैं। यदि मानक विचलन कम होगा तो सारे आँकड़े औसत के नज़दीक ही रहेंगे लेकिन यदि मानक विचलन ज़्यादा है तो औसत की तुलना में भिन्नताएँ कहीं ज़्यादा रहेंगी।

मज़ेदार बात है कि यदि मानक विचलन अधिक है, यानी फूलों में रेज़िन

के आँकड़े औसत से काफी बिखरे हुए हैं, तो ज़्यादा चिन्ता की बात नहीं मानी जाएगी लेकिन यदि अधिकांश आँकड़े औसत के नज़दीक हैं (यानी मानक विचलन कम है) तो सम्भावना है कि वास्तव में रेज़िन की मात्रा 8 प्रतिशत से काफी अलग है।

गोसेट का हल

गोसेट का सबसे पहला पर्चा 1907 में *बायोमेट्रिका* नामक पत्रिका में प्रकाशित हुआ था। यह उन्होंने छद्मनाम 'स्टूडेंट' के रूप में लिखा था क्योंकि गिनेस ब्रुअरी में शोध पत्र प्रकाशित करने की अनुमति नहीं थी। यह पर्चा बीयर की अम्लीयता को लेकर था। गोसेट की मान्यता थी कि बीयर की अम्लीयता के मान सामान्य रूप में वितरित होंगे। सामान्य वितरण का मतलब होता है कि सारे आँकड़े औसत के आसपास एक तय नियम से (बॉक्स देखें) बराबर (symmetric) वितरित हों। सामान्य वितरण को दो कसौटियों के आधार पर परिभाषित किया जाता है – औसत और मानक विचलन। आँकड़े बहुत थोड़े हों (जैसे 3 या 5) तो भी ये दोनों मूल्य निकाले जा सकते हैं। लेकिन दिक्कत यह थी कि इतने छोटे नमूने से निकाला गया मानक विचलन भरोसेमन्द नहीं होता। लिहाज़ा, छोटे नमूने से निकाले गए ये मान उस सामान्य वितरण को नहीं परिभाषित करते जो बीयर की अम्लीयता को सटीक दर्शाता हो। तो गोसेट के सामने समस्या यह थी कि अत्यन्त कम संख्या में किए गए मापन से निकले मानों से कैसे सटीक निष्कर्ष निकालें।

इस समस्या को सुलझाने के लिए गोसेट ने एक तरीका विकसित किया जिसकी मदद से दो समूहों के औसतों के बीच के अन्तर और समूहों के अन्तर्गत फैलाव की तुलना करके, उन समूहों के भिन्न होने या न होने के बारे में कुछ ठोस निष्कर्ष निकाले जा सकते थे। इस प्रक्रिया को स्टूडेंट्स टी-टेस्ट कहते हैं।

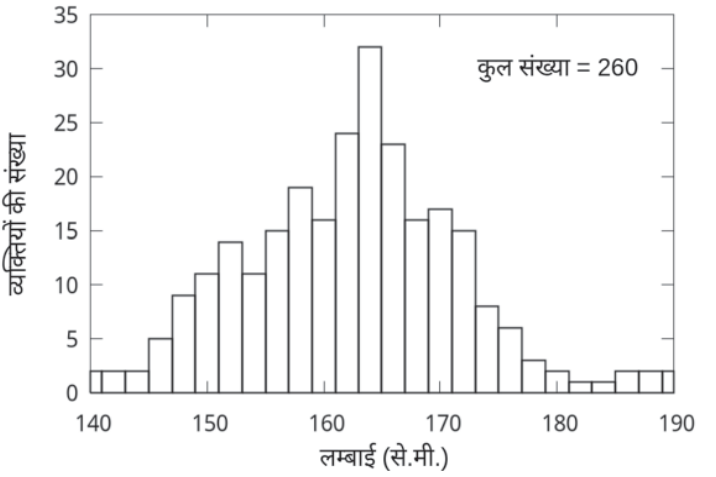
मान लीजिए कि दो समूहों के बीच अन्तर को लेकर आपने कोई परिकल्पना बनाई है और आप यह देखना चाहते हैं कि वह परिकल्पना सही है या नहीं। तो आपको यह देखना होगा कि दो समूहों के औसतों के बीच अन्तर किसी एक समूह के अन्तर्गत फैलाव से ज़्यादा है या नहीं। ज़ाहिर है कि हमारा निष्कर्ष गणितीय समीकरण की तरह निश्चित नहीं हो सकता। हम केवल सम्भाविता की बात कर सकते हैं। गणितीय समीकरण में तो सारे मान निश्चित रूप से पता होते हैं और इसलिए निष्कर्ष एकमेव होता है। जब वास्तविक आँकड़ों के साथ काम करते हैं, तो उनमें कमीबेशी का असर परिणाम पर दिखना स्वाभाविक है। लिहाज़ा, आँकड़ों की अनिश्चितता परिणाम में भी

सांख्यिकीय वितरण

सांख्यिकी में वितरण का मतलब किसी मापन में मिलने वाली संख्याओं के फैलाव से है। मान लीजिए, आप एक विशाल जनसमुदाय के सदस्यों का कद नाप रहे हैं। आप देखते हैं कि समुदाय में बहुत लम्बे या बहुत नाटे सदस्य कम हैं तथा मध्यम लम्बाई के अधिक हैं। यानी अधिकांश लोग औसत कद के आसपास हैं। यदि हम यह पता लगाएँ कि हर 2-2 से.मी. के अन्तराल में कितने सदस्य हैं तो यह दिखेगा कि हर अन्तराल में सदस्यों की संख्या अलग-अलग है, तथा औसत से कम और ज़्यादा, दोनों ही तरफ सदस्य हैं। इसे हम कद का वितरण कहते हैं। चित्र-1 से यह बात अधिक स्पष्ट हो जाएगी। ऐसे चित्र को स्तम्भालेख या हिस्टोग्राम कहते हैं।

सामान्य या नॉर्मल वितरण की अवधारणा को विकसित करने में जिन गणितज्ञों ने महत्वपूर्ण योगदान दिया, उनमें एक प्रमुख नाम है - कार्ल फ्रीडरिश गाउस, जिन्होंने सन् 1809 में खगोलीय मापन में आने वाली त्रुटियों का मॉडल बनाने के लिए इसे विकसित किया था। उनके सम्मान में इस वितरण को गाउसियन वितरण (Gaussian Distribution) भी कहा जाता है।

मान लीजिए, हमारे पास किसी आबादी में लोगों के कद के आँकड़े उपलब्ध



चित्र-1

हैं। हम पता करना चाहते हैं कि किसी भी कद के व्यक्ति होने की सम्भाविता क्या है। इसके लिए निम्नलिखित समीकरण की मदद ले सकते हैं।

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

इसमें,

x = कद का वह मान है जिसकी सम्भाविता हम देखना चाहते हैं,

μ = औसत (mean),

σ = मानक विचलन (standard deviation),

e = गणित का एक स्थिरांक (लगभग 2.718)।

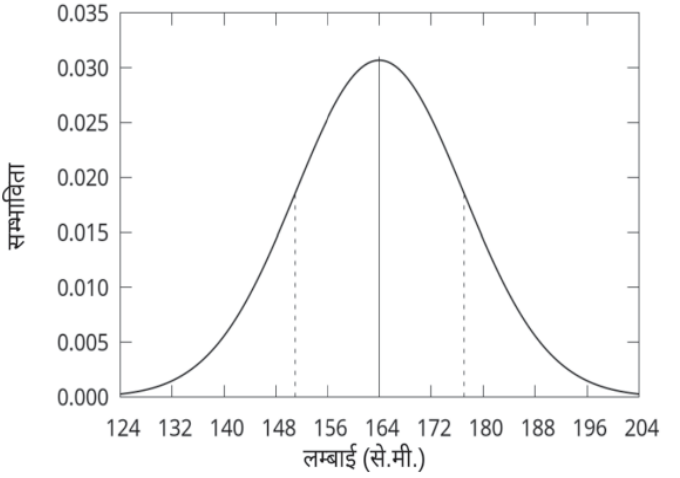
इसी वितरण को एक ग्राफ के रूप में भी दिखाया जा सकता है। ग्राफ में x-अक्ष पर कद के मान दर्शाएँगे और y-अक्ष पर प्रत्येक कद के लोगों की संख्या। यदि कद के सारे आँकड़े औसत के दोनों ओर बराबर-बराबर हों, तो ग्राफ घण्टी के आकार का बनेगा। ऐसे वितरण को सामान्य वितरण कहते हैं और ऐसे ग्राफ को 'घण्टी वक्र' (Bell curve) भी कहा जाता है। इस वक्र में बीच का हिस्सा (औसत के पास) सबसे ऊँचा होता है, जिससे पता चलता है कि औसत मान मिलने की सम्भाविता सबसे ज़्यादा है। जैसे-जैसे हम औसत से दूर जाते हैं, सम्भाविता धीरे-धीरे घटती जाती है। यह वक्र हमें बताता है कि कौन-सा मान आम है और कौन-सा दुर्लभ।

किसी समूह या आबादी में किसी गुण (जैसे कि कद) का मान किसी एक आँकड़े के बराबर होने की सम्भाविता इस वक्र से पता की जा सकती है।

सम्भाविता की गणना कुछ ऐसी होगी। इस वितरण के लिए हमारे जनसमुदाय के आँकड़ों से हमें पता चलता है कि औसत (μ) 164 तथा मानक विचलन (σ) 13 के बराबर है (इसकी गणना के बारे में हम आगे के लेख में बात करेंगे।)। सबसे पहले $\sigma\sqrt{(2\pi)}$ की गणना कर लेते हैं, जो होगी 32.59. मानिए कि हम x का मान औसत के बराबर यानी 164 होने की सम्भाविता जानना चाहते हैं। तो $(x-\mu)$ का मान होगा 0, जिससे कि $e^{[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]}$ का मान होगा 1. अर्थात् $f(x)$ का मान होगा 1/32.59 अर्थात् 0.031. यदि हम x का मान औसत से σ की दूरी पर होने की सम्भाविता जानना चाहते हैं तो x होगा $\mu+\sigma$ (अर्थात्, 164+13=177) के बराबर या $\mu-\sigma$ (अर्थात्, 164–13=151) के बराबर। यानी $(x-\mu)$ का मान होगा $+\sigma$ या $-\sigma$. दोनों के लिए

ही $e^{[-(x-\mu)^2/2\sigma^2]}$ का मान होगा $e^{[-1/2]}$ जो कि 0.61 है। इससे $f(x)$ का मान निकल आता है 0.019.

इन तीन गणनाओं के मान ग्राफ में खड़ी रेखाओं से दर्शाए गए हैं (चित्र-2)।



चित्र-2

दिखती है। तो हम बात करते हैं कि उस परिणाम के सही होने की सम्भाविता क्या है।

कम अवलोकनों से निकले औसत और लगभग मानक विचलन के आधार पर बीयर की अम्लीयता के मानों का जो वितरण निकलता था, वह सामान्य वितरण नहीं होता था। सामान्य वितरण वह होता है जब सारे आँकड़ों के मान औसत के दोनों ओर लगभग बराबर वितरित हों तथा औसत से बहुत दूर न हों। गोसेट ने इसे टी-वितरण नाम दिया। टी-वितरण कुल अवलोकनों की संख्या पर काफी हद तक निर्भर करता है। लिहाज़ा, इस वितरण की आकृति अवलोकनों की संख्या के आधार पर बदलती रहती है। दरअसल, अवलोकनों की संख्या बढ़ने पर टी-वितरण सामान्य वितरण जैसा दिखने लगता है।

t-परीक्षण का उदाहरण

दरअसल, गोसेट के काम से पहले भी सांख्यिकी के महत्व की बात पता

थी और उसकी गणना भी की जाती थी लेकिन गोसेट ने छोटे नमूनों पर इसे लागू करने की विधि का आविष्कार किया। गोसेट ने किया वही जो एक जर्मन गणितज्ञ एफ.आर. हेलमर्ट दरअसल 1876 में कर चुके थे लेकिन गोसेट को उसकी कोई जानकारी नहीं थी।

एक उदाहरण से बात साफ हो जाएगी। मान लीजिए, बीयर की दो किस्में ली गईं (किस्म A और किस्म B)। दोनों किस्मों के कई पीपों को कुछ महीनों तक संग्रहित किया गया। देखना यह है कि क्या संग्रह करने से उनमें मौजूद किसी वांछित पदार्थ के अंश में कोई अन्तर पड़ता है। हमारी प्रारम्भिक परिकल्पना है कि दोनों समूहों के बीच वांछित पदार्थ की मात्रा के बीच अन्तर शून्य होगा। अब वास्तविक आँकड़ों पर टी-टेस्ट लागू करके देखा जाएगा कि क्या यह परिकल्पना सही है।

दोनों किस्मों के बेतरतीब ढंग से चुने 5-5 पीपों में से 10-10 मि.ली. बीयर परीक्षण के लिए निकाली गई। प्रथम किस्म के नमूनों में वांछित पदार्थ के अंश थे: 137, 135, 136, 138 और 142 मि.ग्रा., तथा द्वितीय किस्म के नमूनों में अंश थे: 124, 126, 131, 126, 141 मि.ग्रा.। ये तालिका-1 के प्रथम स्तम्भ में दर्शाए गए हैं।

गणना के चरण इस प्रकार होंगे-

1. दोनों किस्म के नमूनों में औसत मात्रा निकाल ली जाए। तालिका-1 में इसे दोनों समूहों के लिए पहले स्तम्भ की अन्तिम पंक्ति में दर्शाया गया है। औसत मात्रा है - किस्म A के लिए 137.6 और किस्म B के लिए 129.6 मि.ग्रा.।

   इतनी गणना से तो लगेगा कि किस्म A में वांछित पदार्थ की औसतन मात्रा अधिक है। लेकिन मात्र औसत देखकर हम नहीं कह सकते कि मापे गए मानों में फैलाव कितना है। क्योंकि सम्भव है कि औसत में अन्तर सिर्फ इस वजह से है कि किसी एक समूह में कोई एक सदस्य औसत से बहुत कम या ज़्यादा मान दर्शाता है।

2. गणना के दूसरे चरण में हम दोनों नमूनों में मानक विचलन की गणना करते हैं। मानक विचलन निकालने की प्रक्रिया थोड़ी जटिल है। इसमें करना यह होता है कि मात्रा के प्रत्येक मान में से उस समूह के औसत को घटाया जाए (स्तम्भ-2) और उसका वर्ग निकाला जाए (स्तम्भ-3)। और बाद में इन वर्गों का औसत निकाल लेते हैं, यानी इन वर्गों के जोड़ में प्रत्येक समूह के कुल सदस्यों की संख्या का भाग दे देते हैं। ये मान तालिका के तीसरे स्तम्भ की अन्तिम पंक्ति में दर्शाए गए हैं।

तालिका-1

किस्म A				
	विभिन्न पीपों में वांछित पदार्थ की मात्रा (मि.ग्रा./10 मि.ली.) x_A	औसत से अन्तर $x_A - \bar{x}_A$	औसत से अन्तर का वर्ग $(x_A - \bar{x}_A)^2$	मानक विचलन A $\sigma_A = \sqrt{\sum \frac{(x_A - \bar{x}_A)^2}{n_A}}$
	137	-0.60	0.36	2.42
	135	-2.6	6.76	
	136	-1.6	2.56	
	138	0.4	0.16	
	142	4.4	19.36	
योग	688		29.2	
योग/5	$\bar{x}_A$ = 137.6		5.84	

किस्म B				
	विभिन्न पीपों में वांछित पदार्थ की मात्रा (मि.ग्रा./10 मि.ली.) x_B	औसत से अन्तर $x_B - \bar{x}_B$	औसत से अन्तर का वर्ग $(x_B - \bar{x}_B)^2$	मानक विचलन B $\sigma_B = \sqrt{\sum \frac{(x_B - \bar{x}_B)^2}{n_B}}$
	124	-5.6	31.36	6.15
	126	-3.6	12.96	
	131	1.4	1.96	
	126	-3.60	12.96	
	141	11.4	129.96	
योग	648		189.2	
योग/5	$\bar{x}_B$ = 129.6		37.84	

x = वांछित पदार्थ की मात्रा, $\bar{x}$ = औसत का मान, σ = मानक विचलन

3. अन्त में, वर्गों के औसत का वर्गमूल निकालते हैं, जो चौथे स्तम्भ की अन्तिम पंक्ति में दर्शाए गए हैं। इसे ही मानक विचलन कहते हैं।

तो अब हमारे पास कई आँकड़े हैं - दोनों समूहों में नमूनों की संख्या, दोनों समूहों में वांछित पदार्थ की औसत मात्रा, और समूहों के मानक विचलन। इनकी मदद से हम एक मान निकाल सकते हैं जिसे *t*-मूल्य कहते हैं। दरअसल, हमें एक ऐसे मान की तलाश है जो हर समूह के आन्तरिक विचलन को मद्देनज़र रखते हुए उन समूहों के बीच अन्तर को इंगित करे।

t-मूल्य की गणना नीचे दिए तरीके से की जाती है,

$$
\begin{aligned}
t &= \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_B}{\sqrt{\sigma_A^2/n_A + \sigma_B^2/n_B}} \\
&= \frac{137.6 - 129.6}{\sqrt{(5.84/5) + (37.84/5)}} \\
&= \frac{8}{\sqrt{1.16 + 7.56}} \\
&= \frac{8}{2.95} \\
&= 2.71
\end{aligned}
$$

गोसेट ने इस सवाल का हल निकाला कि यदि t का कोई मान हो तो इस मान से क्या हम इस बात की सम्भाविता बता पाएँगे कि औसतों के बीच का अन्तर वास्तविक नहीं किन्तु केवल आँकड़ों में बेतरतीब उतार-चढ़ाव की वजह से है। इसका हल ढूँढने में गोसेट ने ऐसी तालिकाओं का निर्माण किया जिनसे t मान पता होने से P का मान पता चल जाता है। t का मान बड़ा होने पर कहा जाएगा कि दो किस्मों में अन्तर वास्तविक है, यह केवल बेतरतीबी की वजह से सम्भव नहीं है।

टी-टेस्ट तालिका से हमें इस उदाहरण के लिए P मान का पता चलता है, 0.13. इसका मतलब यह हुआ कि नमूनों के बीच का अन्तर 87% निश्चितता से वास्तविक है। इससे पता चलता है कि बीयर की दो किस्में वांछित पदार्थ के मामले में एक-दूसरे से काफी अलग हैं। यदि t का मान 3.2 के करीब होता तो P का मान होता 0.01 और हम कहते कि नमूनों के बीच अन्तर 99% निश्चितता से वास्तविक है। यानी कि दोनों नमूने यकीनन बहुत ही अलग हैं।

अन्य उपयोग

ऐसी स्थितियाँ वैज्ञानिक अनुसंधान में बार-बार उभरती हैं। जैसे किसी दवा या उपचार के क्लीनिकल परीक्षण की ही बात करें। किसी उपचार का परीक्षण करना है। मरीज़ों के दो समूह बनाए गए हैं। एक समूह को औषधि दी जाती है जबकि दूसरे को उसी जैसी दिखने वाली कोई चीज़ दी जाती है जिसमें वह औषधि मौजूद नहीं है। दूसरे समूह को हम 'प्लेसिबो समूह' या 'कंट्रोल समूह' कहते हैं। परिणाम यह निकलता है कि 'औषधि समूह' का प्रदर्शन थोड़ा बेहतर रहा। क्या इसके आधार पर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि वह औषधि कारगर है? यहाँ भी वही सवाल उठता है कि कितने अन्तर को सांख्यिकीय रूप से उल्लेखनीय माना जाए। टी-टेस्ट यहाँ फिर काम आता है।

दो समूहों की तुलना वैज्ञानिक अनुसंधान में अक्सर की जाती है। इस प्रकार के उदाहरणों में किए जाने वाले टी-परीक्षण को **स्वतंत्र दो-नमूना टी-परीक्षण** कहा जाता है। ऐसा परीक्षण यह निर्धारित करने के लिए किया जाता है कि दो स्वतंत्र समूहों के माध्य के बीच कोई उल्लेखनीय अन्तर है या नहीं। इससे यह आकलन करने में सहायता मिलती है कि समूहों के बीच देखे गए अन्तर वास्तविक प्रभाव के कारण हैं या केवल बेतरतीब संयोग के कारण हैं। इसका एक और उदाहरण देखते हैं।

उच्च रक्तचाप के इलाज के लिए एक नई खोजी गई दवा के असर के बारे में निष्कर्ष निकालने के लिए इसी तरह का परीक्षण किया जा सकता है। मरीज़ों के दो समूह बनाए गए; इनमें से प्रथम समूह (उपचार समूह) को वह दवा दी गई जबकि दूसरे को उसी जैसी दिखने वाली कोई चीज़ दी गई (प्लेसिबो समूह या कंट्रोल समूह)। परिणाम निम्नानुसार रहे:

- उपचार समूह (सदस्य संख्या 120); रक्तचाप में औसत गिरावट 15.3 तथा मानक विचलन 4.2 मि.मी. Hg
- कंट्रोल समूह (सदस्य संख्या 120); रक्तचाप में औसत गिरावट 8.7 तथा मानक विचलन 3.9 मि.मी. Hg

इन आँकड़ों को देख यह निष्कर्ष निकलता दिखता है कि 'औषधि समूह' का प्रदर्शन बेहतर रहा। क्या इसके आधार पर यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि वह औषधि कारगर है? यहाँ भी वही सवाल उठता है कि प्रदर्शन में कितने अन्तर को सांख्यिकीय रूप से उल्लेखनीय माना जाए।

इन आँकड़ों से t मान की गणना इस तरह की जाएगी,

$$t = \frac{15.3 - 8.7}{\sqrt{(4.2^2/120) + (3.9^2/120)}}$$
$$= \frac{6.6}{\sqrt{0.147 + 0.126}}$$
$$= \frac{6.6}{0.522}$$
$$= 12.64$$

t के इस मान के लिए P का मान 0.001 से कम होता है। यानी उपचार समूह में रक्तचाप में गिरावट बेतरतीबी से नहीं बल्कि दवा के कारण है। दूसरे शब्दों में, हम यह कहेंगे कि रक्तचाप में गिरावट सांख्यिकीय रूप से उल्लेखनीय है, अर्थात् दवा असरदार है।

युग्मित टी-परीक्षण

टी-परीक्षण का एक और प्रकार है जिसे युग्मित टी-परीक्षण या आश्रित टी-परीक्षण कहा जाता है। इसका उपयोग होता है जब एक ही समूह के सदस्यों के किसी गुण को दो अलग-अलग समय पर या दो अलग-अलग परिस्थितियों में मापा जाता है। युग्मित टी-परीक्षण की पद्धति स्वतंत्र दो-नमूना टी-परीक्षण से थोड़ी अलग है। यह बात एक उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगी।

एक अध्ययन की कल्पना करें जहाँ आप एक नई शिक्षण पद्धति की प्रभावशीलता का परीक्षण कर रहे हैं। आप 20 विद्यार्थियों का परीक्षा स्कोर नए तरीके का उपयोग करने से पहले और बाद में मापते हैं। युग्मित टी-परीक्षण का उपयोग यह निर्धारित करने के लिए किया जा सकता है कि नई पद्धति के उपयोग के बाद छात्रों के अंकों में सांख्यिकीय रूप से उल्लेखनीय सुधार हुआ है या नहीं। इस परीक्षण में हम हर सदस्य के स्कोर के बीच नया तरीका अपनाने के पूर्व और पश्चात् अन्तरों पर ध्यान देते हैं। हर सदस्य के लिए अन्तर की व्याख्या होगी:

$d =$ *पश्चात् स्कोर – पूर्व स्कोर*

मान लीजिए कि हमारे पास 20 मान हैं: d_1, d_2 ... d_{20}. अब हम इनके औसत $\bar{d}$ तथा मानक विचलन σ की गणना करेंगे।

परीक्षण के लिए t का मान होगा:

$$t = \bar{d}\,\sigma/\sqrt{n}$$

इस t मान से हम मानक तालिका से P के मान का पता लगाएँगे जैसे पहले लगाया था। यदि P मान कम हो तो हम यह कहेंगे कि पूर्व और पश्चात् स्कोर के बीच का अन्तर वास्तविक है, बेतरतीब ढंग से नहीं।

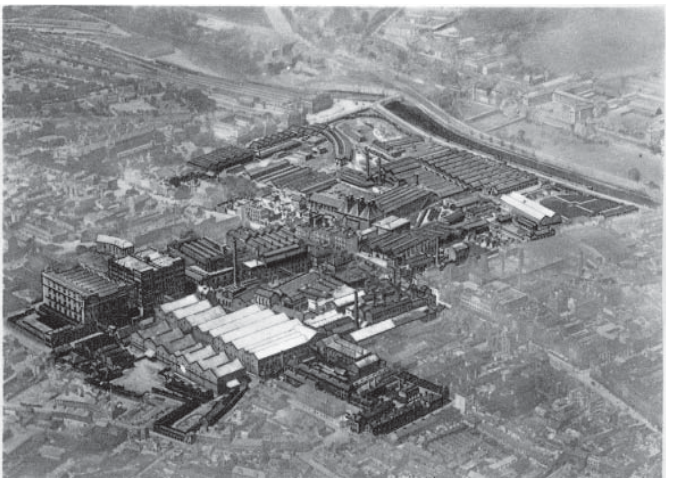
समापन

संक्षेप में, टी-परीक्षण एक ऐसी सांख्यिकीय पद्धति है जिससे हम कम सदस्य वाले समूहों के (यानी छोटे नमूनों के) किसी गुण में दिखाई देने वाले अन्तर के वास्तविक होने या बेतरतीबी से होने का अनुमान लगा सकते हैं। वैज्ञानिक अनुसंधान, औद्योगिक निर्माण या स्वास्थ्य परीक्षण जैसे कई क्षेत्रों में यह परीक्षण पद्धति काम आती है। मज़ेदार बात यह है कि इस पद्धति की खोज किसी वैज्ञानिक या गणितज्ञ ने नहीं बल्कि आसवनी में काम करने वाले एक जिज्ञासु व्यक्ति ने की थी।

सुशील जोशी: *एकलव्य* द्वारा संचालित स्रोत फीचर सेवा से जुड़े हैं। विज्ञान शिक्षण व लेखन में गहरी रुचि।

भास बापट: भारतीय विज्ञान शिक्षा एवं अनुसंधान संस्थान (IISER) पुणे में भौतिकी पढ़ाते हैं। भास भारत के सौर मिशन 'आदित्य-L1' का हिस्सा रहे और विज्ञान शिक्षा में अथाह रुचि रखते हैं। एक लम्बे अरसे से *एकलव्य* संस्था के साथ जुड़े हैं।

हिमांशु श्रीवास्तव: *एकलव्य* फाउंडेशन के विज्ञान समूह से जुड़े हैं।



दुनिया की सबसे बड़ी गिनेस ब्रुअरी का हवाई दृश्य।