



Azim Premji
University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

पढाना
बाला

पद्मप्रिया शिराली

एक व्यावहारिक
दृष्टिकोण

**At
Right
Angles**
A Resource for School Mathematics

घटाना पढ़ाना

देश भर में किए गए ज्यादातर मूल्यांकन इस बात की ओर इशारा करते हैं कि अधिकांश बच्चों के लिए घटाने की संक्रिया सीखना पहली रुकावट होती है और इसके फलस्वरूप बाद में भाग सीखने में भी मुश्किलें होती हैं। गौर से देखने पर हमें पता चलता है कि अक्सर दो अंकों वाली व बड़ी संख्याओं को घटाने में बच्चों को ज्यादा कठिनाई होती है। इन कठिनाइयों के प्रमुख रूप से तीन कारण होते हैं: (i) स्थानीय मान की गलत समझ, (ii) घटाने की व्यवस्थित प्रक्रिया के पीछे के मूल कारण को समझने में कमी, (iii) जोड़ व घटाने के तथ्यों के बीच के सम्बन्ध को न देख पाना।

यह लेख स्थानीय मानों व जोड़ की संक्रियाओं के क्रम का पालन करता है।

घटाने की संक्रिया से बच्चों का परिचय कब कराएँ? शून्य को पढ़ाने के लिए एक के बाद एक चीजें हटाकर हम असल में घटाने की अवधारणा का इस्तेमाल करते हैं: जैसे कि 10 गेंदों से शुरू करके हमें शून्य गेंद तक पहुँचना है। बचपन में मुझे यह एक नर्सरी कविता के रूप में पढ़ाया गया था: 'दस हरी बोतलें लटकी हैं दीवाल पर, गर इनमें से 1 गई गिर तो दीवाल पर बची 9 हरी बोतलें फिर, इत्यादि'।

गतिविधि एक

1-1 के चरण में 10 से 1 तक की उल्टी गिनती गिनना

शुरु में बच्चे अपनी 10 उँगलियाँ दिखाएँ और कहें, '10 उँगलियाँ खुली हैं।' फिर एक उँगली बन्द कर दें और कहें, '9 उँगलियाँ खुली हैं', फिर एक और उँगली बन्द कर दें और कहें, '8 उँगलियाँ खुली हैं', और फिर इसी तरह करते रहें जब तक कि एक उँगली खुली हो। फिर सारी उँगलियाँ बन्द करें और कहें 'शून्य उँगलियाँ खुली हैं'। यह सुनिश्चित करें कि जो वे कह रहे हों और जो वे दिखा रहे हों उनके बीच संगतता हो। कुछ बच्चों में संगतता पर ध्यान न देने और यांत्रिक तरीके से गिनने की प्रवृत्ति होती है। इससे आगे चलकर गिनने में गलती होती है और संख्या की समझ ठीक तरह से विकसित नहीं हो पाती।

1 से लेकर 10 तक की उल्टी गिनती पढ़ने/सुनाने की क्षमता सीधी गिनती में पूरी तरह माहिर होने के कुछ समय बाद आती है। 20 से लेकर 1 तक, या 50 से लेकर 30 तक, या 83 से लेकर 65 तक, आदि की उल्टी गिनती सुनाने को कहकर इस चुनौती को बढ़ाया जा सकता है।

यदि उल्टी गिनती पढ़ने/सुनाने में बच्चे को कोई मुश्किल हो तो बच्चे को संख्या रेखा या संख्या चार्ट या इकाई व दहाई की सामग्री को सहायक सामग्री की तरह इस्तेमाल करने दें। जब तक पैटर्न पूरी तरह बच्चों के दिमाग में न बैठ जाएँ और वे परिवर्तन के बिन्दुओं को ध्यान से न देख लें उन्हें चित्र, तस्वीरें आदि कल्पना करने में मदद करने वाली सामग्री देना जरूरी है। शिक्षक जमीन पर 1 से 20 तक की संख्या रेखा भी बना सकते हैं। बच्चों को जोर से संख्याएँ बोलते हुए इस संख्या रेखा पर 1 और 2 के चरणों में 10 से चलकर 1 तक आना है।

इस गतिविधि को कराते समय शिक्षक अवश्य ही यह देख पाएँगे कि परिवर्तन बिन्दु (60, 59, 50, 49) ही वो जगह हैं जहाँ बच्चे अटक जाते हैं। इन बिन्दुओं पर बच्चों का ध्यान दिलाने के लिए शिक्षक संख्या चार्ट का इस्तेमाल कर सकते हैं।

कक्षा 1, 2, 3 व 4 में कई जगहों पर उल्टी गिनती पढ़ने का बहुत महत्व होता है। यह संख्याओं के क्रम व उनके स्थानीय मान की बच्चों की समझ को मजबूत बनाता है। यह संख्याओं को लचीले ढंग से प्रयोग करने में बच्चों की मदद करता है जो कि मनगणित करने के लिए बहुत जरूरी है।

शिक्षक नीचे दिए विस्तारों में से अलग-अलग उम्र के बच्चों (कक्षा 2 से 4) के हिसाब से सही चुनौती चुन सकते हैं:

- विस्तार 1: 2-2 के चरणों में 10 से 0 तक और 20 से 0 तक की उल्टी गिनती
- विस्तार 2: 10 के चरणों में 100 से 0 तक की उल्टी गिनती
- विस्तार 3: 5 के चरणों में 100 से 0 तक की उल्टी गिनती
- विस्तार 4: 20 के चरणों में 100 से 0 तक की उल्टी गिनती
- विस्तार 5: 25 के चरणों में 300 से 0 तक की उल्टी गिनती
- विस्तार 6: 600 से 0 तक की उल्टी गिनती 75 के चरणों में। (यह काफी चुनौतीपूर्ण होगा।)

घटाने की तीन अलग-अलग स्थितियों से बच्चों को परिचित कराने के लिए शिक्षकों को चाहिए कि वे धीरे-धीरे थोड़े-थोड़े समय के अन्तराल में तीन अलग-अलग सन्दर्भों (ले लेना, तुलना करना, जोड़ के व्युत्क्रम) का इस्तेमाल करें। एक रूप में पूछे गए सवाल को दूसरे रूप में भी पूछा जा सकता है ताकि बच्चे यह देखना शुरू कर सकें कि इन सब स्थितियों में उन्हें एक ही संक्रिया का इस्तेमाल करना है और वे लचीले ढंग से सवालों को हल कर सकें।

‘ले लेने’ वाले सवाल की स्थितियों में ‘घटाना’: शुरुआत में घटाने का परिचय ‘ले लेना’ या एक समूह से ‘हटाने’ की स्थिति के जरिए कराना चाहिए। जैसे: ‘7 बीजों में से 3 बीज हटा दो।’

बच्चा इस सवाल के जवाब पर कैसे पहुँचता है? सामान्यतः वह 7 बीज गिनता है, फिर गिनकर 3 बीजों को हटाता है और फिर बचे हुए बीजों को गिनता और कहता है ‘4’। जब यही सवाल चित्रों के साथ लिखित रूप में दिया जाता है तो वह हटाने की संख्या के बराबर बीजों को काटता है और बाकियों को गिनता है। बची चीजों की गिनती दुबारा 1 से शुरू होती है (जब बच्चे संख्या रेखा का इस्तेमाल करते हैं तो यह सीधी गिनती में बदल जाती है।), तो बच्चा 1, 2, 3, 4 करके गिनता है और उत्तर देता है, ‘7 में से 3 लिए तो बचा 4।’ ले लेने वाली स्थिति को दिखाने के लिए विभिन्न प्रकार के सन्दर्भ इस्तेमाल किए जाने चाहिए। अपनी रोजमर्रा

की जिन्दगी में भी बच्चे अक्सर अपनी चीजों को अपने भाई-बहनों और दोस्तों के साथ बाँटते हैं इसलिए घटाने का यह सन्दर्भ पहले से ही उनके दिमाग में होता है और शिक्षक इस बात का उपयोग कर सकते हैं।

घटाना तुलना करने के रूप में: तुलनात्मक स्थितियाँ घर व स्कूल दोनों ही जगह होती हैं। शिक्षकों को चाहिए कि वे सचेत रूप से इन तुलनात्मक स्थितियों का इस्तेमाल यह दिखाने के लिए करें कि ऐसी स्थितियाँ घटाने की स्थिति को जन्म देती हैं।

बच्चों को भाषा के इस्तेमाल से पूरी तरह परिचित होना चाहिए: ‘कितने और’, ‘कितना कम है’, ‘कितना अन्तर है’ आदि।

जोड़ के व्युत्क्रम के रूप में घटाना: अक्सर हम घटाने के सवालों को जोड़ के सवालों में बदलकर हल करते हैं।

उदाहरण 1: 12 प्राप्त करने के लिए 8 में और कितना जोड़ें?

उदाहरण 2: एक दुकानदार को खुल्ले पैसे वापिस करने हैं। 67 रुपए की खरीददारी के बाद जब ग्राहक उसे 100 रुपए का नोट देता है तो पहले वो 3 रुपए वापिस करता है और फिर 30 रुपए। इसे जोड़ के सवाल में बदलने पर: $67 + 3 + 30 = 100$

गतिविधि तीन

सीधी व उल्टी गिनती

हालाँकि एक स्तर पर पहुँचने के बाद बच्चों को वास्तविक चीजों का इस्तेमाल किए बिना और गिनती गिने बिना घटाने के सवालों को हल करने के लिए संख्याओं की कल्पना करने की जरूरत होगी। संख्याओं के क्रम की कल्पना करने में मदद करने के लिए मोतियों की माला, संख्या रेखा, दस फ्रेम्स और सीधी व उल्टी गिनती सीखने के लिए संख्या चार्ट का इस्तेमाल करना चाहिए। सीधी और उल्टी गिनती का अभ्यास करने के लिए हम यहाँ मोतियों की माला और संख्या रेखा के इस्तेमाल पर चर्चा करेंगे।

उल्टी गिनती : अक्सर उल्टी गिनती का इस्तेमाल तब किया जाता है जब ले लेने वाली संख्या छोटी हो जैसे 2 या 3। यदि बच्चे को 17 मोतियों में से 2 मोती हटाना हों तो वह उल्टी गिनती कर सकता है (शायद वह घटाए जाने वाली संख्या के लिए अपनी उँगलियों का इस्तेमाल करे): 17, 16 और उत्तर हुआ 15। लेकिन इसका इस्तेमाल केवल तभी किया जा सकता है जब घटाने वाली संख्या छोटी हो।

इंसानी संख्या रेखा : यदि आपकी कक्षा में 30 विद्यार्थी हों तो हर बच्चे को क्रम से एक-एक संख्या कार्ड दें। अब शिक्षक बच्चों को घटाने का कोई भी एक सवाल दें, मान लो कि 27-3, तो वो सभी बच्चे अपने कार्डों को ऊपर उठाएँ जिनके पास 27 तक के संख्या कार्ड हों और 28 संख्या कार्ड वाले बच्चे से शुरू करके तीन बच्चे अपने कार्डों को नीचे कर दें।

सीधी गिनती : सीधी गिनती का इस्तेमाल बहुत ज्यादा

होता है। इसलिए यह जरूरी है कि इसे चित्रों का इस्तेमाल करके क्रमिक ढंग से पढ़ाया जाए। इसके लिए मोतियों की ऐसी माला का इस्तेमाल प्रभावी हो सकता है जिसमें अलग-अलग रंग के दस-दस मोतियों के समूह हों क्योंकि रंगों में बदलाव संख्याओं के परिवर्तन बिन्दु जैसे 10, 20 आदि को दर्शाता है।

उदाहरण : 13-8 को इस तरह कर सकते हैं, '13 मोतियों में से शुरू के 8 मोती अलग कर दें।' बाकी बचे मोतियों की सीधी गिनती कर लें जैसे 9, 10, 11, 12, 13 जो कि 5 संख्याएँ हैं। (सीधी गिनती गिनते हुए बच्चे एक-एक करके उँगली खोलें।)

49 से 67 तक की संख्याओं को मोतियों की माला पर दर्शाना:



करीब के दस के रूप में गिनना : 'करीब के दस के रूप में गिनना' और स्थानीय मान की समझ का इस्तेमाल करना भी सीधी गिनती के विस्तार करने की एक विधि है (कक्षा 3 व 4 के लिए)। उदाहरण : 17-8 को इस तरह किया जा सकता है 8+2 (करीब के दस तक पहुँचने के लिए) और सात (क्योंकि 17 को 10+7 लिख सकते हैं)।

$$8 + 2 + 7 = 17, \quad 2 + 7 = 9, \quad 17 - 8 = 9$$

गतिविधि चार

जोड़ व घटाने का सम्बन्ध

जोड़ व घटाने के तथ्यों के बीच के सम्बन्ध को बढ़ावा देना बच्चों को अपने जोड़ के तथ्यों के ज्ञान को घटाने के सवालों को हल करने के लिए इस्तेमाल करने में मदद कर सकता है।

हालाँकि शिक्षकों को इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि वे इसे पढ़ाने के लिए औपचारिक भाषा का इस्तेमाल न करें बल्कि इसे अपनाने और सवालों को हल करने में इसका इस्तेमाल करने में उनकी मदद करें।

(अ) उन्हें दिखाएँ कि घटाने का हर तथ्य घटाने के एक दूसरे तथ्य को जन्म देता है ($5-3=2$, $5-2=3$)

इसे उँगलियों का इस्तेमाल कर दिखा सकते हैं। सारी उँगलियाँ खोल लें। जोर से कहें, यदि मैं दो उँगलियाँ बन्द कर दूँ तो कितनी बचेगी?, ' $10-2=8$ '। यदि मैं 8 उँगलियाँ बन्द कर दूँ तो ' $10-8=2$ '

बच्चों को कुछ और संख्याओं के साथ कोशिश करने दें। हर बार दोनों उत्तरों को बोर्ड पर लिखते जाएँ।

$$\begin{array}{ll} 10-2=8, & 10-8=2 \\ 10-3=7, & 10-7=3 \\ 10-6=4, & 10-4=6 \\ 10-1=9, & 10-9=1 \end{array}$$

बच्चे पैटर्न को देखें और एक दिए गए घटाने के तथ्य के लिए उससे सम्बन्धित दूसरा घटाने का तथ्य बताएँ।

(ब) घटाने व जोड़ के तथ्य के बीच के सम्बन्ध को दर्शाएँ ($5-3=2$, $2+3=5$)।

अक्सर पाठ्यपुस्तकों में इस तरह के अभ्यास प्रश्न दिए जाते हैं जिनमें घटाने से सम्बन्धित जोड़ के तथ्यों को इस तरह दिखाया जाता है :

$$7-2=5, \quad 5+2=7.$$

लेकिन एक बच्चे को इन दोनों तथ्यों के बीच के सम्बन्ध को समझाने के लिए सिर्फ इतना काफी नहीं होता जब तक कि शिक्षक सामग्री या चित्रों के इस्तेमाल के जरिए इस तथ्य पर स्पष्ट रूप से बच्चों का ध्यान नहीं दिलाएँ : 'मेरे पास 7 बीज हैं। यदि मैं इसमें से 3 बीज हटा दूँ तो मेरे पास 4 बीज बचते हैं। लेकिन यदि मैं इन 3 बीजों का वापिस रख दूँ तो

मेरे पास दोबारा 7 (यानी कि $4+3$) बीज होंगे।'

$$\begin{array}{ll} 7-4=3, & 4+3=7 \\ 7-2=5, & 5+2=7 \\ 7-1=6, & 6+1=7 \end{array}$$

यह तथ्य बच्चों के दिमाग में अनुभव के जरिए ही बैठता है कि हटाई गई संख्या और बची हुई संख्या का जोड़ वही संख्या होती है जो हमारे पास शुरुआत में थी।

(स) दिखाएँ कि जोड़ का हर तथ्य घटाने के दो तथ्यों को जन्म देता है।

शिक्षक पूछ सकते हैं, '2 और 6 को जोड़ने पर मुझे कितना मिलेगा?' 8। 'यदि मैं 8 में से 6 ले लूँ तो मेरे पास कितना बचेगा?' 2। 'अब यदि मैं 8 में से दूसरी संख्या (2) ले लूँ तो मेरे पास कितना बचेगा?' 6।

$$\begin{array}{lll} 6+2=8, & 8-6=2, & 8-2=6 \\ 4+5=9, & 9-5=4, & 9-4=5 \end{array}$$



ऐसे कई सारे उदाहरण दिए जा सकते हैं और इन्हें चित्रों सहित बोर्ड पर लिखा जा सकता है।

बच्चे देखेंगे कि जोड़ के हर कथन को घटाने के दो कथनों के रूप में लिखा जा सकता है।

अक्सर यह देखने में आता है कि कक्षा 3 व 4 में भी बच्चे उँगलियों पर या उँगलियों के खण्डों को गिनकर घटाने की कोशिश करते हैं। जल्दी से उत्तर तक पहुँचने व घटाने के तथ्यों को याद रखने के लिए शिक्षकों को चाहिए कि संख्याओं के पूरक व जोड़ के तथ्यों का इस्तेमाल करने में बच्चों की मदद करें।

घटाने के तथ्य : (18-9 से 10-9, 17-8 से 9-8, 16-7 से 8-7 इत्यादि, 9-1 से 2-1 तक)

जिस तरह जोड़ के तथ्यों को सीखने के उद्देश्यों को छोटे उद्देश्यों में तोड़ा जा सकता है। उसी तरह घटाने के तथ्यों को सीखने के उद्देश्यों को भी छोटे उद्देश्यों में तोड़ा जा सकता है। हर उद्देश्य को पूरा करने के लिए लक्ष्य बनाकर अभ्यास करने की जरूरत है।

- 1 का घटाना : यह बच्चों के लिए काफी आसान है क्योंकि इसे वे 'संख्या रेखा पर एक कदम पीछे जाकर' या '1 के चरणों में उल्टी गिनती': 18-1, 17-1, 16-1 .. 2-1 गिनकर देख सकते हैं।
- 2 का घटाना : इसे 2 के चरणों में उल्टी गिनती गिनकर या संख्या रेखा पर 2 कदम पीछे जाकर देखा जा सकता है।
- 0 का घटाना : उदाहरण 7-0। बच्चों को यह बात स्पष्ट रूप से समझने की जरूरत है कि शून्य को घटाने का मतलब है कि कुछ भी हटाया नहीं गया है। शुरुआत में उन्हें यह बतलाने का कोई मतलब नहीं है कि 0 को लिखने की क्या जरूरत है क्योंकि ऐसा करना उन्हें असमंजस में डाल देगा।
- किसी संख्या में से उसी संख्या को घटाना : उदाहरण 8-8। यह भी बच्चों को काफी स्पष्ट है: कि एक संख्या को उसी में से घटाने पर 0 उत्तर आता है।
- ऐसी संख्याओं को घटाना जहाँ पहली संख्या दूसरी संख्या की दुगुनी हो : 18-9, 16-8, 14-7, 12-6, 10-5, 8-4, 6-3।
- 10 का घटाना : उदाहरण 18-10, 12-10। उत्तर देने के लिए यहाँ बच्चों को स्थानीय मान की समझ का इस्तेमाल करना होगा। क्योंकि 18 यानी 10+8 हुआ, और 10 को हटाने पर 8 मिलता है।

- दस के करीब की संख्याओं को घटाना : यहाँ सबसे पहले संख्या में से 10 को घटाएँ और फिर बाद में 1 जोड़ दें उस 1 की कमी को पूरा करने के लिए जिसे पहले हटाया गया था। जैसे 17-9 को दो चरणों में इस तरह कर सकते हैं : पहले 17-10 जिससे 7 मिलता है, और फिर 1 जोड़ा तो उत्तर हुआ 8।
- ऐसी संख्याओं को घटाना जहाँ पहली संख्या दूसरी संख्या के दुगुने से 1 ज्यादा हो : 17-8 को ऐसे कर सकते हैं : 16-8=8, 17, 16 से 1 ज्यादा है इसलिए 17-8 हुआ 9।
- ऐसी संख्याओं को घटाना जहाँ पहली संख्या दूसरी संख्या के दुगुने से 1 कम हो : 9-5, 11-6, 13-7, 15-8। यहाँ दुगुने की समझ को इस्तेमाल कर 11-6 को ऐसे कर सकते हैं : 12-6 =6। चूँकि 11, 12 से 1 कम है तो उत्तर 6 से 1 कम होगा यानी कि उत्तर हुआ 5।

10 पर रुककर घटाना

- मान लो कि 14-9। इसे हम ऐसे करते हैं : 14-9 हुआ 1 (यानी कि 9 से 10 तक 1 संख्या हुई) + 4 (10 से 14 तक 4), तो 14-9=5 हुआ।
- इसी तरह 17-9 हुआ 1 (9 से 10 तक 1) + 7 (10 से 17 तक 7), तो 17-9=8 हुआ।
- 10 पर रुककर 8 को घटाना (इस तथ्य का इस्तेमाल करते हुए कि 8, 10 से 2 कम है): उदाहरण 11-8, 12-8
- उदाहरण : 14-8 हुआ 2 (यानी कि 8 से 10 तक 2 संख्याएँ) + 4 (10 से 14 तक 4 संख्याएँ), तो 14-8=6 हुआ।
- 10 पर रुककर 7 को भी घटाया जा सकता है : 12-7= 3 (7 से 10 तक 3 संख्याएँ) + 2 (10 से 12 तक 2 संख्याएँ) =5 हुआ।

गतिविधि छह

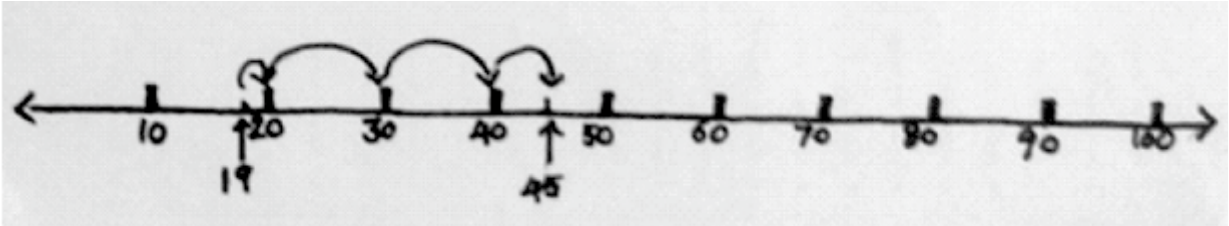
घटाने के लिए संख्या रेखा (100 तक की) का इस्तेमाल करना



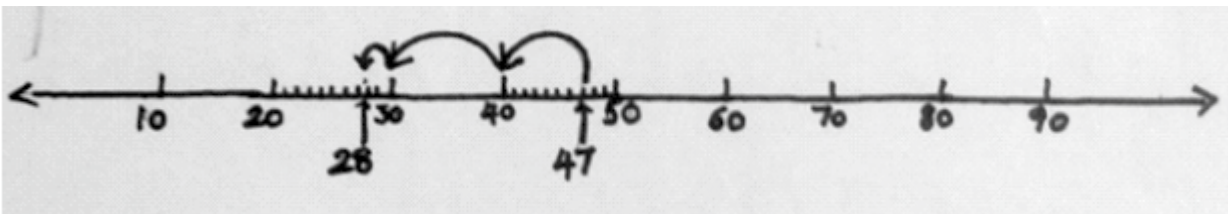
अच्छा होगा यदि हर बच्चा मोड़कर रख सकने वाली एक संख्या रेखा बना ले जैसी कि चित्र में दिखाई गई है। इसे घटाने के सवालों को हल करने के लिए सहायक सामग्री की तरह इस्तेमाल कर सकते हैं।

यह भी अच्छा होगा कि कक्षा की दीवार पर ब्लैकबोर्ड के नीचे की जगह में एक संख्या रेखा बनाई जाए। यह 'सौ' तक की संख्याओं के चार्ट से आसान है क्योंकि संख्या रेखा पर 'आगे और पीछे' दोनों ओर जाया जा सकता है। 1 कदम आगे बढ़ना 1 की बढ़ोत्तरी को दिखाता है और 1 कदम पीछे चलना 1 की कमी को दिखाता है। संख्या रेखा सीधी व उल्टी गिनती दोनों को पुख्ता करती है।

सीधी गिनती : उदाहरण 45-19:



उलटी गिनती : 47-28:

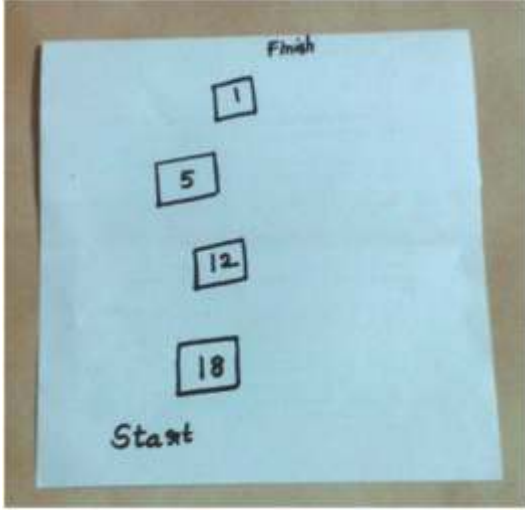


आप ऐसे सवाल पूछ सकते हैं जिनमें घटाने से सम्बन्धित तथ्य शामिल हों। 'यदि तुम 40 से 8 कदम पीछे जाओ तो तुम कहाँ पहुँचोगे?' और 'संख्या रेखा पर यदि तुम 40 पर हो तो तुम्हें 32 पर पहुँचना हो तो तुम्हें कितने कदम पीछे जाना होगा?'

खेल 1

लँगड़ी का खेल

उद्देश्य : घटाने के तथ्यों का अभ्यास करना (मनगणित)



घर के बाहर खेले जाने वाला यह खेल काफी जाना-माना है। हम अपनी सुविधानुसार इसमें बदलाव कर सकते हैं। बच्चे चित्र में दिखाए तरीके से जमीन पर एक चित्र बना सकते हैं। ऐसे एक चित्र का इस्तेमाल 3 या 4 बच्चे कर सकते हैं। संख्याएँ अलग-अलग हो सकती हैं ताकि बच्चे घटाने के अलग-अलग तथ्यों का अभ्यास कर सकें।

‘शुरू’ व ‘अन्त’ का चौकोर तय किया जा सकता है। बच्चे को दिए गए घटाने के तथ्य के अनुसार शुरू के चौकोर से दूसरे चौकोर में कूदना होता है। पहले वह कहेगा $18-6=12$ और ‘12’ पर कूदेगा। यदि वह कोई गलती करता है तो दूसरे बच्चे उसे चुनौती दे सकते हैं और उसकी बारी खत्म हो जाएगी। यदि वह सही होता है तो वह दिए गए अगले घटाने के तथ्य का उत्तर देकर अगले चौकोर पर कूदेगा, $12-7=5$ । ऐसा तब तक चलता रहेगा जब तक कि वह ‘1’ वाले चौकोर पर न पहुँच जाए। फिर वह कहेगा $1-1=0$ और ऐसा कहकर बाहर आ जाएगा और दूसरा पैर भी जमीन पर रख लेगा।

कड़क कागज पर ऐसा एक चित्र बनाकर इस खेल को घर पर भी खेला जा सकता है। हर बच्चा अलग-अलग रंगों के काउंटर इस्तेमाल कर सकता है। जैसे ही बच्चा चौकोर पार कर अपने काउंटर में पहुँचता है उसे सही घटाने के तथ्य को बताना होगा।

सौ का संख्या चार्ट भी घटाने के सवाल को हल करने के लिए एक अच्छी सहायक सामग्री है। चार्ट पर रास्ता बनाते समय बच्चे घटाने की प्रक्रिया के पैटर्न व संख्याओं के व्यवस्थापन के पैटर्न को देख सकेंगे। और यह उनकी कल्पनाशक्ति व संख्याओं से सम्बन्धित सौन्दर्य बोध दोनों जरूरतें पूरी करता है। हर बच्चे के पास घटाने के सवालों को हल करने के लिए सहायक सामग्री की तरह इस्तेमाल करने के लिए सौ का संख्या चार्ट होना चाहिए।

हालाँकि सौ का चार्ट संख्या रेखा से काफी अलग होता है। सौ के चार्ट में संख्याओं के व्यवस्थापन पर बच्चों का ध्यान दिलाने के लिए शिक्षकों को पर्याप्त समय लगाना चाहिए। यदि हम आड़े (बाईं से दाईं ओर) में एक-एक खाने आगे बढ़ें तो संख्या में 1 की बढ़ोत्तरी होती जाती है। यदि हम खड़े में नीचे की ओर बढ़ें तो संख्या में 10 की बढ़ोत्तरी होती जाती है। यदि हम तिरछे में आगे बढ़ें तो एक अलग ही पैटर्न दिखाई देता है। शिक्षक कुछ सवालों के जरिए बच्चों को यह देखने में मदद कर सकते हैं कि अलग-अलग तरह से आगे बढ़ने पर किस-किस तरह के पैटर्न दिखते हैं। बाद में शिक्षक अलग-अलग कक्षाओं के हिसाब से इन पैटर्नों का इस्तेमाल सवालों को हल करने में कर सकते हैं।

- दस के किसी गुणज में से 10 को घटाना; उदाहरण : 40-10, 20-10, 30-10। बच्चा यह समझ जाता है कि सौ के चार्ट में खड़े में एक खाना ऊपर बढ़ने पर संख्या 10 घट जाती है और दहाई के स्थान की संख्या 1 घट जाती है।

- किसी भी संख्या में से 10 को घटाना; उदाहरण : 45-10, 28-10, 33-10। बच्चा यह देख पाता है कि किसी भी संख्या में से 10 को घटाने पर इकाई की संख्या वही रहती है। बदलती नहीं है।

- दस के गुणजों को आपस में घटाना; उदाहरण : 50-20

- बड़ी संख्याओं के घटाने को दो चरणों में बाँटा जा सकता है और दो तरीकों से किया जा सकता है। उदाहरण : 45 में से 22 को घटाना :

पहले बच्चा 45 पर अपनी उँगली रखता है, फिर 2 खाने ऊपर की ओर बढ़ता है (20 को घटाने के लिए) और 25 पर पहुँचता है और फिर 2 खाने (2 को घटाने के लिए) बाईं ओर बढ़ता है और 23 पर पहुँचता है। या फिर पहले बच्चा 45 पर अपनी उँगली रखता है फिर 2 खाने बाईं ओर बढ़ता है (2 को घटाने के लिए) और 43 पर पहुँचता है और फिर 2 खाने (20 को घटाने के लिए) ऊपर की ओर बढ़ता है और 23 पर पहुँचता है।

- 10 के गुणजों के करीब की संख्याओं को घटाना; उदाहरण 45-19

- बच्चा अपनी उँगली 45 से 25 पर ले जाता है (20 को घटाने के लिए) और फिर 1 खाने (जिस अतिरिक्त 1 को घटाया था उसकी कमी की पूर्ति के लिए) दाईं ओर बढ़ता है और 26 पर पहुँचता है।

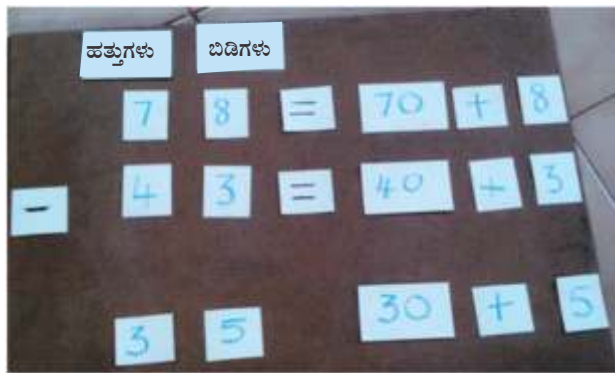
विस्तार के लिए क्षमता वृद्धि

गणित शिक्षण का एक मूलभूत सिद्धान्त है ज्ञात तथ्यों से अज्ञात तथ्यों को निकालना। घटाने के तथ्यों को पढ़ाते हुए इन्हें जोड़ के तथ्यों (जो कि बच्चे पहले ही सीख चुके हैं) से जोड़कर हम ऐसा ही करते हैं। इसमें हम उनकी स्थानीय मान की समझ को भी शामिल करते हैं। हम सहचारिता की उनकी सहज समझ को भी इस्तेमाल करते हैं। उन्हें ऐसे सवाल देना बहुत जरूरी है जो उन्हें यह देखने में मदद करें कि घटाने का कोई भी एक तत्व हर स्थिति में वही उत्तर देता है।

उदाहरण : $7-4 = 3$ । $17-4$ कितना होगा? $47-4$ कितना होगा? $70-40$ कितना होगा?



यहाँ इकाई व दहाई की सामग्री का इस्तेमाल कर 78 लिखा गया है। नीचे इसे स्थानीय मान के साथ-साथ विस्तारित रूप में भी लिखा गया है और नीचे उस संख्या को लिखा गया है जिसे घटाया जाना है। जैसा कि बताया गया है कि शिक्षकों को लगातार इस बात पर बच्चों का ध्यान दिलाने की जरूरत है कि इकाई को इकाई और दहाई को दहाई में से ही घटाया जाता है।



इसे इस तरह पढ़ा जाना चाहिए : '8 इकाई में से 3 इकाई घटाई तो बची 5 इकाइयों', '7 दहाई में से 4 दहाई घटाई तो बची 3 दहाई'।

इसे पुख्ता करने के लिए शुरुआत में कुछ सवालों को उनके विस्तारित रूप में लिख सकते हैं।

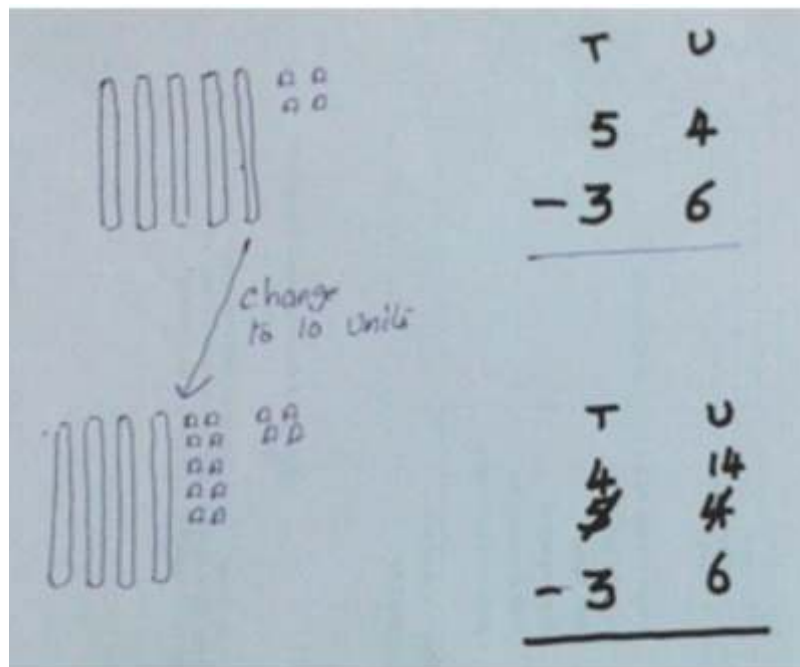
शुरु में अभ्यास के सवालों के साथ चित्र जरूर होने चाहिए। साथ ही बच्चों को सामग्री (इकाई व दहाई की) का इस्तेमाल करने दें जब तक कि उन्हें खुद पर पूरी तरह विश्वास न हो जाए और वे खुद ब खुद सामग्री इस्तेमाल करना बन्द न कर दें।

गतिविधि नौ

अदला-बदली (उधार लेकर) करके इकाई व दहाई को घटाना

जरूरी सामग्री : स्थानीय मान किट

54-36 जैसे घटाने के सवाल में दहाई को इकाइयों में बदलने की और उत्तर को ठीक तरह से लिखने की जरूरत होती है। बच्चों से कहें कि वे 54 के अनुरूप इकाई व दहाई की सामग्री उठाएँ और उन्हें स्थानीय मान कार्ड में रखें। संख्या को इकाई व दहाई के शीर्षकों के साथ भी लिखा जाना चाहिए। बच्चों को इस समूह में से 36 को घटाना है। घटाने वाली संख्या को वे स्थानीय मान कार्ड की दूसरी पंक्ति में लिखें। फिर यह समझने पर कि इकाई की संख्या को घटाने के लिए उनके पास पर्याप्त इकाई नहीं है वे एक दहाई को दस इकाइयों में बदल लेते हैं। अदला-बदली की प्रक्रिया पूरी होने पर इसके साथ-साथ ही लिखने का काम करने में बच्चों की मदद के लिए शिक्षक 5 दहाई को काटकर उसके ऊपर 4 और 4 इकाई को काटकर उसके ऊपर 14 लिख दें। (कुछ शिक्षक इकाई की संख्या को काटे बिना उसके ऊपर 10 लिखने की परम्परा को भी अपना सकते हैं।)



विस्तार : उधार लेकर इकाई (इकाई के स्थान पर 0 हो) व दहाई को घटाना

उदाहरण : 50-36

इसे भी पिछले वाले सवाल की तरह ही हल किया जा सकता है। जरूरी है कि एक दहाई को इकाइयों में बदलने पर जोर दिया जाए।

शून्य से घटाने में कई बच्चे अकसर गलती कर जाते हैं। जिन बच्चों को घटाना सीखते समय सामग्री का इस्तेमाल करने के पर्याप्त अवसर मिले हों उनके इस तरह की गलतियाँ करने की सम्भावना कम होती है।

खेल 2

शून्य दौड़

उद्देश्य : उधार वाले घटाने के सवालों का अभ्यास, घटाने की प्रक्रिया की अवधारणा की समझ में सहायता करना।

जरूरी सामग्री : किट जिसमें चौरस, पट्टियाँ व वर्ग हों (सैकड़े, दहाई, इकाई की सामग्री) और दो पासे।

खिलाड़ियों की संख्या : 4 खिलाड़ी, 1 बैंकर और 1 दुकानदार

शुरुआत में सारी सामग्री बैंकर के पास रहेगी। फिर वह हर खिलाड़ी को एक चौरस (सौ चौकोर वाला बोर्ड) देगा। एक बच्चा दोनों पासे फेंकेगा और दोनों पासों में आई संख्याओं को जोड़ लेगा (मान लो कि 9)। अब उसे उतनी राशि दुकानदार को देनी होगी। क्योंकि उसके पास केवल सैकड़ा है इसलिए वह बैंकर के पास जाकर इसे 10 दहाइयों से बदल लेगा और यदि जरूरत पड़ी तो 1 दहाई को 10 इकाइयों से बदल लेगा। इस लेन-देन को वो अपनी कॉपी में लिख लेगा जैसे $100-9=91$ । अब वो इस राशि (9) को दुकानदार को दे देगा।

इसी प्रक्रिया को बाकी के तीन बच्चे भी बारी-बारी से करेंगे। हर बच्चा अपने लेन-देन को कॉपी में लिख लेगा।

पहले दौर का खेल खत्म हो जाने पर दुबारा पहले बच्चे की बारी आ जाएगी। खेल को जारी रखने पर लेन-देने करने वाली व लेन-देन न करने वाली दोनों ही तरह की स्थितियाँ आएँगी। यह दोनों स्थितियाँ बच्चों की स्थानीय मान की और सैकड़े के दहाई के साथ व दहाई के इकाई के साथ सम्बन्ध की समझ को पुख्ता करेंगी।

हो सकता है कि आखिर-आखिर में बच्चे के पास जो संख्या बची हो वह पासा फेंकने पर आने वाली संख्या से छोटी हो जैसे कि 6। इस स्थिति में बच्चा अपनी बारी को छोड़ देगा जब तक कि उसे जरूरी संख्या न मिल जाए।

जो बच्चा सबसे पहले शून्य पर पहुँचेगा वह विजेता होगा।

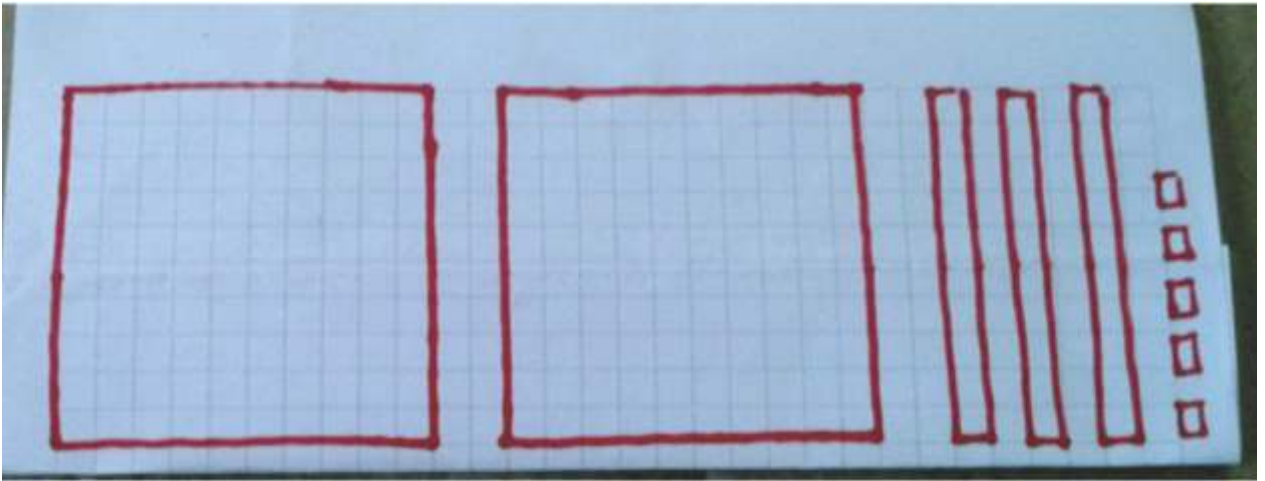
(यदि खेल कुछ ज्यादा ही लम्बा हो रहा हो तो आप कोई दूसरा लक्ष्य भी रख सकते हैं, जैसे 50।)

गतिविधि दस

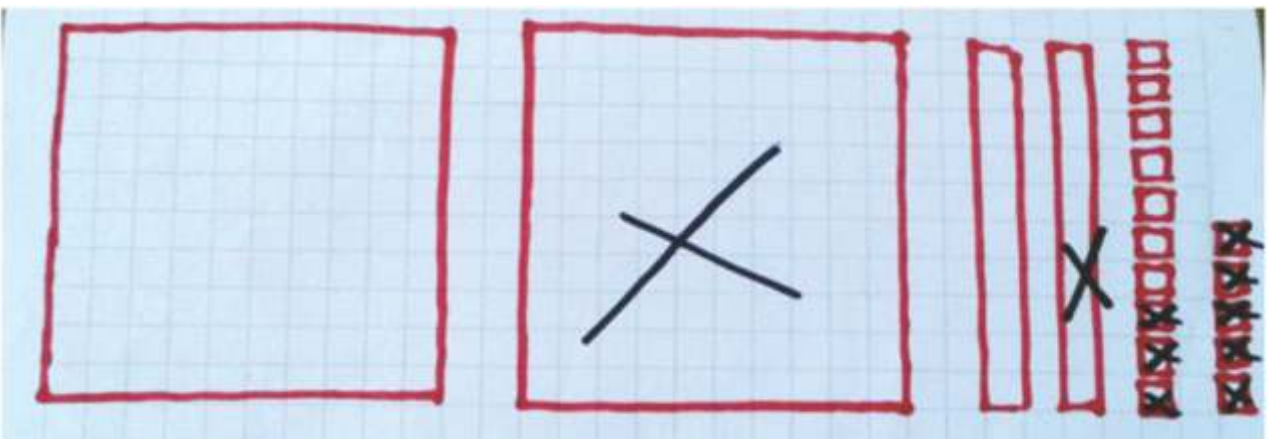
अदला-बदली करके (उधार लेकर) सैकड़े, दहाई व इकाई का घटाना
जरूरी सामग्री : स्थानीय मान किट

घटाने के सवालों को क्रमिक रूप से पढ़ाया जाना जरूरी है : शुरुआत ऐसे सवालों से करें जिनमें दहाई को इकाई में बदलने की जरूरत हो, उदाहरण 235-118, और फिर ऐसे सवाल पढ़ाएँ जिनमें सैकड़े को दहाई में बदलने की जरूरत हो, उदाहरण 342-161। और इसके बाद वे सवाल पढ़ाने चाहिए जिनमें सैकड़े को दहाई में और दहाई को इकाई में बदलने की जरूरत हो, जैसे 245-168।

235 को दर्शाना



उल्टी गिनती का उदाहरण 47-28



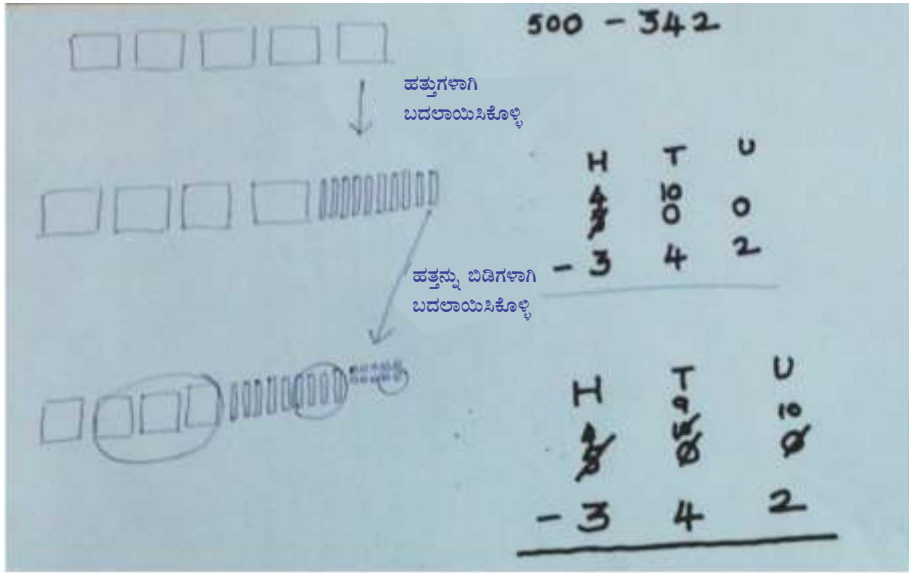
गतिविधि ग्यारह

घटाने के ऐसे सवाल जिनमें इकाई व दहाई के स्थान पर शून्य हो

शून्य वाले घटाने के सवाल पढ़ाने के लिए पहले ऐसे सवालों से शुरुआत की जा सकती है जिनमें सिर्फ इकाई के स्थान पर शून्य हो और इसके बाद ऐसे सवाल दिए जा सकते हैं जिनमें इकाई व दहाई दोनों स्थानों पर शून्य हो।

अक्सर बच्चे इकाई व दहाई दोनों स्थानों पर शून्य वाले सवाल स्पष्ट रूप से समझ नहीं पाते क्योंकि इनमें क्रमिक रूप से दो बार उधार लेने की जरूरत होती है। जब तक इन्हें बार-बार करके न दिखाया जाए व सामग्री का इस्तेमाल करके बच्चों को इन्हें करने के मौके न दिए जाएँ यह सवाल समझ नहीं आएँगे। और बच्चे केवल यांत्रिक रूप से प्रक्रिया को अपनाएँगे और गलतियाँ करते रहेंगे।

उदाहरण 500-342



पहले शिक्षक 5 सौ चौकोर वाले चौरस लें और पूछें, 'मैं इसमें से 342 को कैसे घटा सकती हूँ?' सवाल को आमतौर पर लिखे जाने वाले तरीके खड़े स्तम्भों में बोर्ड पर लिखें और ऊपर स्थानीय मान भी लिखें। साथ ही साथ 5 चौरसों को दिखाने के लिए एक चित्र भी बनाया जा सकता है। 'मुझे 2 इकाइयों को घटाना है पर मेरे पास तो कोई इकाई है ही नहीं। तो पहले मैं 1 सैकड़े को 10 दहाइयों से बदल लेती हूँ। इसे मैं इस तरह लिखूँगी।' शिक्षक चित्र में बनाए एक चौरस को काटकर उसे 10 दहाइयों से बदल देती है, और लिखित रूप में भी वो सैकड़े के स्थान पर लिखे 5 को काटकर उसकी जगह 4 लिख देती है और दहाई के स्थान पर 10 लिख देती है।

सावधानी : कई सारी किताबें व शिक्षक इस महत्वपूर्ण चरण को छोड़ देते हैं और सीधे दहाई के स्थान पर 9 और इकाई के स्थान पर 10 लिख देते हैं। इस चरण को बिलकुल भी छोड़ना नहीं चाहिए क्योंकि बच्चों को यह स्पष्ट नहीं होता कि दहाई के स्थान का अंक 9 कैसे बन गया।

अब शिक्षक बच्चों को दिखाएँ कि 1 दहाई को 10 इकाइयों से बदलने की जरूरत है और साथ ही साथ चित्र में 1 दहाई को काटकर उसकी जगह 10 इकाइयों बना दें और लिखित रूप में दहाई के स्थान पर लिखे 10 को काटकर 9 लिख दें और इकाई के स्थान पर 10 लिख दें।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली ऋषिवैली स्कूल, आन्ध्रप्रदेश के कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर में 1983 से कार्यरत हैं। वे गणित, कम्प्यूटर, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण विज्ञान तथा तेलुगु भाषा का अध्यापन करती रहीं हैं। आजकल वे आउटरीच कार्यक्रम के तहत एस. सी. ई. आर. टी., आन्ध्रप्रदेश के साथ उनके पाठ्यक्रम सुधार तथा प्राथमिक स्तर की गणित पाठ्यपुस्तकों के निर्माण में संलग्न हैं। 1990 के दशक में उन्होंने जाने माने गणितज्ञ श्री पी.के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे ऋषिवैली स्कूल की मल्टीग्रेड लर्निंग प्रोग्राम टीम का हिस्सा भी रही हैं, जिसे 'स्कूल इन ए बाक्स' के नाम से जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है।

यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर, ऋषिवैली की संयुक्त पत्रिका At Right Angles (a resource for school mathematics) Volume 2, No.3 November 2013 में प्रकाशित Teaching Subtraction (A Practical Approach) का हिन्दी अनुवाद है।

अनुवाद : कविता तिवारी

सम्पादन : राजेश उत्साही