



Azim Premji
University

A publication of Azim Premji University
together with Community Mathematics Centre,
Rishi Valley

शिक्षण

इब्यारती सवालुुं का

पद्मप्रिया शिराली

एक व्यावहारिक
दृष्टिकोण

**At
Right
Angles**
A Resource for School Mathematics

बहुत-से बच्चों के लिए इबारती सवाल किसी अवरोध की तरह होते हैं। इनमें वे बच्चे भी शामिल हैं जो संक्रियात्मक (संक्रियाओं का इस्तेमाल कर गणना करना) और प्रक्रियात्मक कौशलों में निपुण होते हैं। कई बच्चे संकेत शब्दों जैसे कुल मिलाकर, अन्तर, जोड़ इत्यादि की तलाश के आधार पर इबारती सवालों को हल करने का तरीका विकसित कर लेते हैं। लेकिन इस तरीके का महत्त्व बहुत ही सीमित होता है। सवाल हल करने के लिए कौन-सी संक्रिया इस्तेमाल करनी है यह जानने के लिए ऐसे बच्चे आमतौर पर अनुमान का सहारा लेते हैं। इबारती सवालों से सामना होने पर ऐसे बच्चे गणित को लेकर और भी ज्यादा चिन्ता का अनुभव करते हैं। ऐसा क्यों है?

प्राथमिक कारण

इस गणितीय चिन्ता के पीछे के कुछ प्रमुख कारण इस प्रकार हैं :

1. परिचय और शिक्षण के दौरान समस्या की स्थितियों और समस्या के सन्दर्भों से रूबरू होने का अभाव।
2. समस्या की कल्पना करने के लिए सहायक सामग्री के रूप में ठोस वस्तुओं के इस्तेमाल का अभाव।
3. चित्रों व पुनर्निर्माण के अन्य माध्यमों के ज़रिए समस्या को दर्शाने में अपर्याप्त प्रशिक्षण।
4. एक ही समय में विभिन्न कथनों व निर्देशों का पालन करने में कठिनाई।
5. शब्दावली पर दिए जाने वाला बेवज़ह का ज़ोर और अवधारणाओं व उनसे जुड़े शब्दों के बीच कमज़ोर सम्बन्ध।
6. सवालों के बारे में बातचीत व चर्चा न करना; चाहे वह अँग्रेज़ी में हो या मातृभाषा में।
7. बच्चों द्वारा हल को अपने शब्दों में लिखने के अवसर न होना। अधिकांश शिक्षक इबारती सवालों के वाक्य लिखने के लिए कठोर तरीके अपनते हैं। शुरुआती कुछ सालों में इबारती सवालों का लेखन बच्चों की अपनी समझ व अनुभव पर आधारित होना चाहिए। यह किन्हीं भी नियमों के अनुसार नहीं होना चाहिए। इसके बजाए यह पूरी तरह निजी तरीके पर आधारित होना चाहिए।

यह सभी कारण कमज़ोर शिक्षण विधियों की ओर इशारा करते हैं।

इसके साथ ही एक और तथ्य यह है कि अधिकांश पाठ्यपुस्तकें बच्चों के लिए विशेष तौर पर सहायक नहीं होतीं। कक्षा 4 या 5 में पहुँचने तक बच्चे को बुनियादी साक्षरता कौशल आ जाने चाहिए। फिर भी कुछेक बच्चे ही लिखी हुई सामग्रियों को पढ़ पाते हैं। इसके निम्न कारण हैं :

1. उपयोग की गई भाषा बच्चे के अनुभव के करीब की नहीं होती।
2. इबारत वाले सवाल वास्तविक जीवन और प्रचलित स्थितियों पर आधारित नहीं होते।
3. सवाल दिलचस्प से तरीके से नहीं पूछे गए होते और बच्चों को समस्या की ओर आकर्षित नहीं करते।
4. उनके साथ चित्र नहीं दिए जाते; यह उन बच्चों के लिए अत्यन्त महत्त्वपूर्ण है जो अँग्रेज़ी नहीं बोलते।
5. उनमें अक्सर विविधता नहीं होती और दोहराव काफ़ी ज्यादा होता है और इसलिए उनमें कुछ ख़ास चुनौतियाँ भी नहीं रह जातीं।

सवाल अक्सर उस श्रेणीबद्ध क्रमिक तरीके से नहीं रखे जाते जैसे कि रखे जाने चाहिए।

भाषा का महत्त्व

गणित सीखने में भाषा बहुत महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। इसके कुछेक कारण इस प्रकार हैं :

1. गणित शिक्षण के सन्दर्भ में देखें तो शिक्षक अवधारणाओं व प्रक्रियाओं को बताने, व्याख्या करने, विकल्पों की तुलना करने, कारण व आश्रित सम्बन्धों (causal and dependent relationships) की चर्चा करने और उत्तर को सही ठहराने के लिए भाषा का इस्तेमाल करते हैं।
2. हमारे जैसे देश में, जहाँ कक्षा में इस्तेमाल होने वाली भाषा बच्चे की मातृभाषा हो यह अनिवार्य नहीं है, ऐसे में विशेषकर प्राथमिक स्कूलों में, गणित शिक्षकों के लिए ज़रूरी है कि वे सवाल का बच्चे की भाषा में अनुवाद करें ताकि बच्चे को उसे समझने में मदद मिल सके।
3. बच्चे के लिए भी यह महत्वपूर्ण है कि वह भाषा के ज़रिए अपनी समझ को स्पष्ट रूप से व्यक्त करे, ताकि शिक्षक के लिए भी यह जानने की एक खिड़की खुले कि बच्चे ने समस्या को किस तरह से समझा व व्यक्त किया है। भाषा व चर्चा बच्चे को समस्या की पुनर्चना करने में सक्षम बनाते हैं।
4. गणित सवालों के सन्दर्भ में शब्दों के विशेष अर्थ होते हैं। माप, अंश, भाग, गुणन, बराबर, सतह, पहाड़े और आयतन जैसे शब्द सामान्य, रोज़मर्रा की भाषा में अलग मायने रखते हैं, लेकिन गणित की कक्षा में इनका एक अलग ही अर्थ हो सकता है। कुछ शब्दों के गणित में एक से ज़्यादा मायने हो सकते हैं उदाहरण के लिए आधार, अन्तर, वर्ग। बच्चों के लिए गणित के सन्दर्भों में इनके इस्तेमाल से वाक़िफ़ होना ज़रूरी है। शिक्षण के दौरान शिक्षकों द्वारा सही भाषा का इस्तेमाल करना ज़रूरी है। [जैसे अँग्रेज़ी में कुछेक कारणों से भारत में पहाड़े पढ़ाते समय 'टाइम्स' की जगह 'इनटू' का इस्तेमाल करने का चलन है। इसलिए '2 मल्टीप्लाईड बाइ 3' को ज़ोर-ज़ोर से 'टू टाइम्स थ्री' (न कि 'टू इनटू थ्री' जो कि भाग को इंगित करता है) पढ़ा जाना चाहिए।] इसी तरह घटाने के सवालों में 'उधार लेना' शब्द के बजाए इकाई के लिए दहाई या दहाई के लिए सैकड़े से 'लेन-देन' शब्द का इस्तेमाल करना सही होगा।
5. गणितीय चिन्हों को शुरुआत में शब्दों के ज़रिए समझाया जाना चाहिए और बच्चों को इस बारे में स्पष्टता होनी चाहिए। 'बराबर' का चिन्ह एक ऐसा चिन्ह है जिसे आमतौर पर सबसे ज़्यादा गलत समझा जाता है। इस चिन्ह का मतलब 'उत्तर लिखना' नहीं होता। एक दिए गए सवाल $2 + 5 = _ + 4$ के खाली स्थान में बहुत-से बच्चे '7' भर सकते हैं।

बच्चे को इबारती सवालों को पढ़ना, समझना और उनकी व्याख्या करना सीखना होगा।

एक महत्वपूर्ण बात मैं ज़ोर देकर कहना चाहती हूँ, वह यह है कि इबारती सवालों को हल करने में कमज़ोर होना या असमर्थ होना कोई अलग समस्या नहीं है। शिक्षकों को यह समझने की ज़रूरत है कि इस समस्या की जड़ शिक्षण प्रक्रिया में ही कहीं निहित है। अक्सर जब बच्चे किसी इबारती सवाल को हल करने में कठिनाई महसूस करते हैं तो यह इस बात की ओर एक इशारा होता है कि या तो अवधारणा या फिर गणितीय शब्दावली को ठीक तरह से समझाया/बताया नहीं गया है। बतौर शिक्षक, जब मैं कक्षा में किसी विषय को शुरू करती हूँ, तो वास्तविक जीवन व कक्षा में दी जा रही समस्याओं के बीच के सम्बन्ध को विशिष्ट रूप से दर्शाने के लिए मुझे वास्तविक जीवन के विभिन्न सन्दर्भों व स्थितियों के उदाहरण देने की ज़रूरत होती है। मेरी कोशिश होती है कि एक समस्या को देखने या किसी समस्या की संरचना का विश्लेषण करने के विविध तरीकों को बोलकर उन्हें बताऊँ। जब मैं प्रक्रियाओं का वर्णन करूँ या चित्र बनाऊँ तो इस दौरान अपने कार्यकलापों व सवाल के शब्दों के बीच के सम्बन्ध को दर्शाने के लिए मुझे लगातार उसके बारे में कमेंट्री भी करनी होती है। सबसे ज़्यादा महत्वपूर्ण बात कि मुझे बच्चे को उस 'समस्या के अन्दर उतरने' में मदद करनी चाहिए।

बच्चों को इबारती सवालों को अपने तरीके से अनुभव करने देने में मदद कब शुरू होती है?

घर पर मिलने वाले तमाम अवसरों के अलावा प्राथमिक व पूर्व-प्राथमिक विद्यालय में लगभग पहले ही दिन से इसकी शुरुआत हो जाती है। पूर्व-प्राथमिक कक्षाओं में आमतौर पर ऐसे संसाधन होते हैं जो खुद ही नाटक-खेल गतिविधियों (तैयार होना, खाना पकाना, खरीददारी करना) में योगदान देते हैं और इनका इस्तेमाल गणितीय शब्दावली से परिचय कराने के लिए किया जा सकता है। जैसे “आर्य के पास दिशा से बड़ा गिलास है”, “वरद ने सार्थक से लम्बा कुर्ता पहना है”, “मिताली की दुकान में श्रेयान की दुकान से ज़्यादा फूल हैं” इत्यादि।

किसी गणितीय परिस्थिति को लेकर, संख्याओं वाली कविताओं का अभिनय करवाना चाहिए ताकि बच्चा जो कह रहा है और उससे जुड़ा जो कार्यकलाप कर रहा है उनके बीच का सम्बन्ध देख सके। जो कविताएँ संख्याओं की अवधारणाएँ, क्रमवार संख्याएँ, संख्याओं के घटते-बढ़ते क्रम सिखाती हैं उन्हें उनमें निहित सरल अवधारणाओं को दिखाने के लिए एक्शन गीत की तरह सिखाया जा सकता है।

एक बच्चे के स्कूल में बिताए समय के दौरान जो भी वास्तविक समस्याएँ होती हैं (जैसे प्रार्थना के लिए लाइन लगाना, पुस्तकालय का समय, खेल का समय, लंच ब्रेक जब खाना खाया जाता है) उनका उपयोग उचित शब्दावली को सिखाने और गणितीय अवधारणाओं से परिचय कराने के लिए किया जाना चाहिए। रोजमर्रा की इन स्थितियों का बाद में कक्षा के दौरान बातचीत में भी उल्लेख किया जा सकता है।

मापन सम्बन्धी शब्दावली (बड़ा, उससे बड़ा, सबसे बड़ा), तुलनात्मक शब्दावली (कम, ज़्यादा), और मात्रा की शब्दावली (संख्याएँ) व अन्य ऐसे ही शब्द गतिविधियों व कार्यकलापों के ज़रिए सिखाने चाहिए।

समय की धारणा सीखना थोड़ा मुश्किल होता है, और इससे जुड़ी शब्दावली (बीता हुआ कल, आज, आने वाला कल) सबसे अच्छी तरह तब सीखी जा सकती है जब बच्चे कक्षा में अपने अनुभवों को साझा करना शुरू करते हैं। शिक्षक उस दिन व आने वाले दिनों के लिए तयशुदा गतिविधियों आदि की चर्चा करके इस अवधारणा को पुख्ता करते हैं।

यह बेहद महत्वपूर्ण है कि कार्यकलाप करने की व्यवस्था मनोरंजक व ऐसी बनाई जाए जहाँ बच्चे सुरक्षित महसूस करें और सवाल पूछने के लिए स्वतंत्र हों। इससे बच्चों को बातचीत करने, करवाई जा रही गतिविधि पर अपने विचार व्यक्त करने और सवाल पूछने के अवसर मिलते हैं। जब वे अपने विचार व्यक्त करने में कठिनाई महसूस कर रहे हो तो शिक्षक को सही गणितीय शब्दावली बताकर उनकी मदद ज़रूर करनी चाहिए।

खेल की व्यवस्था

खेल बातचीत, प्रतिक्रियाओं और तर्क-वितर्क को बढ़ावा देते हैं। यह अवधारणाओं व उनसे जुड़ी शब्दावली को पुख्ता करने के लिए उत्कृष्ट मंच प्रदान करते हैं।

बोगी खेल : फ़र्श की फ़र्शियों पर कोई भी संख्याएँ लिखें।



चित्र-1

बच्चे उपयुक्त गणितीय शब्दों का इस्तेमाल करते हुए एक वाक्य कहकर किसी एक बोगी से अगली बोगी में जा सकते हैं। पहली फ़र्शी पर खड़ा बच्चा कहता है, 'मुझे अगली बोगी में जाने के लिए सात और अंक चाहिए', दूसरी फ़र्शी पर खड़ा बच्चा कहता है, 'मेरे पास अगली बोगी से 3 अंक ज़्यादा हैं', तीसरी फ़र्शी पर खड़ा बच्चा कहता है, 'अगली बोगी में जाने के लिए मुझे 4 अंक देने होंगे' इत्यादि। चूँकि खेल का फोकस भाषा के इस्तेमाल पर है इसलिए यदि कोई बच्चा गिनने में किसी तरह की गलती करता है तो उसकी गलती को सुधारकर उसे आगे की बोगी में जाने दिया जा सकता है।

यहाँ मैं कुछ ऐसे तरीके साझा कर रही हूँ जिन्हें मैंने बच्चों को इबारती सवाल हल करने में मदद करने के लिए इस्तेमाल किया है। इन सभी तरीकों में एक महत्वपूर्ण पहलू है इबारत वाले सवालों को धीरे-धीरे पढ़ना। बच्चों को एक बार में बहुत सारे वाक्यों को याद रखने में मुश्किल होती है। यह तरीके इबारती सवालों को हिस्सों में तोड़ने में उनकी मदद करते हैं। वे तथ्यों को सुव्यवस्थित करना और हर वाक्य का अलग-अलग अर्थ निकालना सीखते हैं। पुनर्निर्माण की प्रक्रिया के ज़रिए वे समस्या को एक पूर्ण के रूप में और भाग एक-दूसरे से किस तरह जुड़े हैं यह समझना शुरू करते हैं।

मैंने निम्न प्राथमिक विद्यालय के विभिन्न स्तरों से चयनित उदाहरणों के ज़रिए इबारती सवालों को हल करने के विभिन्न तरीकों की व्याख्या की है।

एक नाटकीय रूपान्तरण व मूक अभिनय

अधिकांश बच्चों को नाटक में भूमिका अदा करने में मजा आता है। किसी परिस्थिति में निर्धारित एक इबारती सवाल का अभिनय करने में न तो ज्यादा समय लगता है और न ही ज्यादा संसाधन। छोटी संख्याओं को दर्शाने के लिए ब्लॉक्स इस्तेमाल किए जा सकते हैं। आपस में फँस जाने वाले घनाकार ब्लॉक्स इसके लिए ज्यादा उपयुक्त होते हैं क्योंकि इनके क्रमबद्ध ढेर अच्छे से बनते हैं और यह ढेर बनाकर तुलना करने के लिए आसानी से इस्तेमाल किए जा सकते हैं। इनका एक और फायदा यह है कि इन्हें आसानी से फैला सकते हैं और कार्यकलाप वाले दृश्यों में इकट्ठा भी कर सकते हैं।

नोट : दहाई के लिए बड़े ब्लॉक्स इस्तेमाल कर बड़ी संख्याओं को भी दर्शाया जा सकता है।

स्तर : कक्षा 3, 4

कोई बच्चा या शिक्षक इबारती सवाल को जोर से बोलकर पढ़ सकता है। छोटे बच्चों के साथ शिक्षक को सवाल पढ़ने की जरूरत हो सकती है या सवाल पढ़ने में उनका मार्गदर्शन करना पड़ सकता है।

मेहर के पास तीन अमरूद हैं। आर्यमन के पास मेहर से चार अमरूद ज्यादा हैं। उनका दोस्त अद्वैद दो अमरूद लेकर आया। उन्होंने आपस में बराबर-बराबर अमरूद बाँटे। प्रत्येक को कितने अमरूद मिले?

यह सवाल अमरूदों के बारे में है। अमरूद बच्चों को बहुत पसन्द होते हैं। उन्हें अमरूद के पेड़ों पर चढ़ना व अमरूद तोड़ना अच्छा लगता है। बच्चों से सवाल की कहानी का अभिनय करने की उम्मीद करने से पहले सवाल में बच्चों की दिलचस्पी बढ़ाने के लिए शिक्षक को उनसे चर्चा करनी चाहिए। चर्चा की शुरुआत ऐसे किसी सवाल से हो सकती है, जैसे : 'तुम्हारा पसन्दीदा फल कौन-सा है?' 'क्या हम फलों के बागीचे से कुछ अमरूद तोड़कर लाएँ?' समस्या वास्तविक लगे इसके लिए बच्चों को समस्या के सन्दर्भ की ओर आकर्षित करना बेहद महत्वपूर्ण है।

तीन बच्चों से पूरे दृश्य का अभिनय करने को कहें। वे किसी बागीचे में होने और पेड़ से अमरूद तोड़ने का नाटक करें। पहले मेहर अपने तीन अमरूदों को ब्लॉक्स के ज़रिए दिखाएँ और कहे, 'मेरे पास तीन अमरूद हैं।' फिर आर्यमन अपने सात ब्लॉक्स दिखाकर कहे, 'मेरे पास मेहर से तीन अमरूद ज्यादा हैं।' बाक्री के बच्चे जाँच सकते हैं कि उसने सही संख्या में ब्लॉक्स लिए हैं या नहीं। यदि सवाल को ध्यान से नहीं पढ़ा गया हो या फिर बच्चा उसमें कही गई बात को ठीक तरह से समझ न पाया हो तो वह केवल 4 ब्लॉक्स दिखा सकता है।

इस समय या तो बाक्री के बच्चे गलती की ओर ध्यान दिला सकते हैं या फिर शिक्षक हस्तक्षेप कर सकते हैं। अब अद्वैद ब्लॉक्स के रूप में दो अमरूद लेकर आए। अब उन्हें साथ मिलकर यह देखना होगा कि इन्हें आपस में बराबर-बराबर कैसे बाँटें। आखिर में वे कह सकते हैं 'हमारे पास

कुल मिलाकर 12 अमरूद हैं। हम तीनों को 4-4 अमरूद मिलेंगे क्योंकि तीन 4 मिलकर 12 होते हैं।' इस गतिविधि में निम्न बातों पर फोकस किया गया है : (i) वाक्यों का सही तरीके से अर्थ लगाने में, (ii) अपने कार्यकलापों के अनुसार उपयुक्त बात कह पाने में।



चित्र-2

सवाल में परिवर्तन : बागीचे में समय बिताने से बच्चे इस विषय की ओर आकर्षित होते हैं। इस दौरान शिक्षक सवालियों की संख्याएँ बदलकर या फिर कुछ अन्य संक्रियाओं को शामिल कर उनके साथ सवालियों के खेल खेल सकते हैं। इसके कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं : 'यदि आर्यमन को दो अमरूदों में इल्ली मिले और वह उन्हें फेंक दे तो क्या होगा?' 'अब आर्यमन के पास मेहर से कितने अमरूद ज्यादा होंगे?' (उत्तर मालूम करने के लिए दोनों अपने अमरूदों का ढेर लगाकर देख सकते हैं।)

'क्या अभी भी उनके पास बराबर-बराबर बाँटने के लिए पर्याप्त अमरूद होंगे?'

- 'यदि उन्हें कक्षा में 15 अमरूद लेकर आने हों तो उन्हें और कितने अमरूद तोड़ने पड़ेंगे?'
- किसी समस्या का नाटकीय रूपान्तरण करने से क्या होता है? इससे समस्या को समझने में मदद मिलती है।
- इससे उन बच्चों को मदद मिलती है जिनके पढ़ने का स्तर कमजोर हो। इससे बच्चों में भागीदारी की समझ पैदा होती है।
- इससे शिक्षक को भी बच्चे की समझ का आकलन करने में मदद मिलती है।
- शिक्षक किसी समस्या को सरल करके या उसे और चुनौतीपूर्ण बनाकर गलतियों को सुधारने की कार्यवाही जल्दी शुरू कर सकते हैं।

दो

ठोस सामग्रियों का इस्तेमाल

ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल कर सवालों को हल करने में नाटकीय रूपान्तरण के कुछ पहलुओं के साथ ही गणितीय प्रतिरूपण (mathematical modelling) के भी कुछ पहलू होते हैं। हालाँकि यह उन इबारती सवालों के लिए विशेष तौर पर प्रासंगिक हैं जिनमें प्रतिरूपण के लिए खास सामग्री चाहिए होती है, उदाहरण के लिए स्थानीय मान सामग्री, गत्ते की घड़ी, मुद्रा के खेल या ज्यामितीय आकृतियाँ।

स्तर : कक्षा 3

वैष्णवी और अमेय के पास त्रिभुज की आकृतियाँ बनाने के लिए 16 स्ट्रॉ हैं। हर त्रिभुज के लिए उन्होंने तीन स्ट्रॉ इस्तेमाल कीं। यदि वे कुल 6 त्रिभुज बनाना चाहते हों तो उन्हें और कितनी स्ट्रॉ की ज़रूरत होगी ?

बच्चे इस सवाल के प्रतिरूपण के लिए छड़ियों का इस्तेमाल कर सकते हैं। इस स्थिति में होता यह है कि जैसे ही बच्चे प्रतिरूपण करना शुरू करते हैं वे समस्या की कल्पना करना शुरू कर देते हैं और प्रतिरूपण का कार्य समाप्त करने से पहले ही समस्या का हल निकाल लेने में सक्षम हो जाते हैं। ऐसे मामलों में यह महत्वपूर्ण है कि बच्चे को उसी समय अपना जवाब बताने दें और बाद में प्रतिरूपण का कार्य समाप्त कर अपने उत्तर की जाँच करने दें।

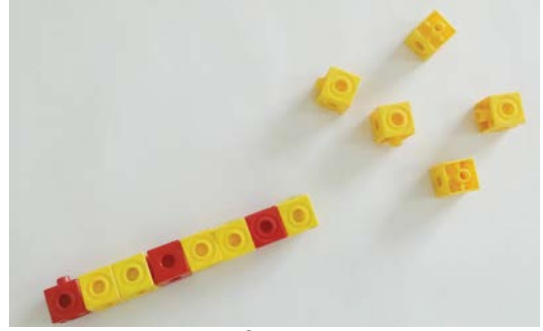


चित्र-3

स्तर : कक्षा 4

समृद्धि ने मोतियों की एक माला बनाई। माला में एक लाल मोती के बाद दो पीले मोती लगाए। तेरहवाँ मोती किस रंग का होगा ? (चित्र-4)

इस समस्या का प्रतिरूपण करने के लिए बच्चे रंगीन काउंटर इस्तेमाल कर सकते हैं और जवाब मालूम कर सकते हैं।



चित्र-4

जब बच्चे प्रतिरूपों (models) से खेल रहे हों तो शिक्षक उन्हें संख्याओं के कुछ और संयोजन बनाने की कोशिश करने को कह सकते हैं। जैसे, क्या होगा यदि तुम एक ऐसी माला बनाओ जिसमें दो लाल मोतियों के बाद तीन पीले मोती हों? तब दसवाँ मोती कौन-से रंग का होगा? वे इस समस्या के लिए प्रतिरूप बना सकते हैं और अपने जवाब को वाक्य के रूप में लिख सकते हैं।

मेरी माला में दो लाल मोतियों के बाद तीन पीले मोती हैं। तेरहवाँ मोती रंग का है।

बच्चे अपने खुद के संयोजन बनाने की भी कोशिश कर सकते हैं और परिणाम को वाक्य के रूप में लिख सकते हैं।

ठोस वस्तुओं का इस्तेमाल करने से क्या होता है?

- इससे स्पर्श के ज़रिए सीखने में मदद मिलती है और प्रायोगिक बुद्धिमत्ता (kinesthetic intelligence) का विकास होता है।
- यह समस्या का सरलीकरण करता है और उसे समझने में मदद करता है।
- यह समस्या को हल करने के लिए उसकी कल्पना करने में मदद करता है।
- इससे जुड़े कार्यकलाप जैसे चीज़ों को जोड़ना या उनकी तुलना करना बच्चे को यह जानने में मदद करते हैं कि इसमें कौन-सी संक्रिया शामिल है।
- इसमें फोकस केवल हल निकालने पर नहीं होता बल्कि समस्या को समझने व उसके प्रतिरूपण पर होता है।

तीन चित्रों का इस्तेमाल करना

कुछ इबारती सवालों को चित्रों के जरिए दर्शाकर बेहतर रूप से समझा जा सकता है।

स्तर : कक्षा 3

दिवा चौकोर और गोलों से एक बॉर्डर का पैटर्न बना रही थी। उसने 10 चौकोर बनाए और हर 2 चौकोरों के बीच में 2 गोले बनाए। उसने कुल कितने गोले बनाए?

स्तर : कक्षा 5

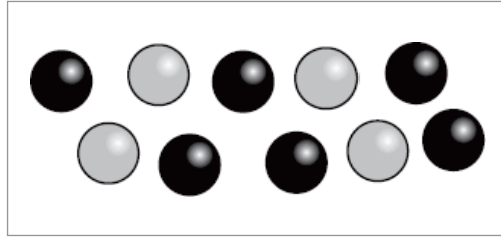
लकड़ी के एक लट्टे को दो टुकड़ों में काटने में 10 मिनट लगते हैं। उसी लट्टे को चार टुकड़ों में काटने में कितना समय लगेगा?

इन कुछ सवालों में समस्या को समझने के लिए बच्चों को उपयुक्त चित्र बनाने की आवश्यकता होगी। समस्या का हल निकालने से पहले उन्हें पैटर्न व सम्बन्धों को समझने की जरूरत है।

चित्रों के रूप में दर्शाने से समस्या को समझने में मदद मिलती है। किसी सवाल को हल करने के लिए चित्रों को सहायक सामग्री के रूप में कैसे इस्तेमाल करें यह सीखने में मदद से बच्चों को लाभ हो सकता है। चित्रों के जरिए शिक्षक इबारत वाले सवालों को दर्शाने के अलग-अलग तरीके दिखा सकते हैं। चित्र किस प्रकार के होंगे यह चुनाव समस्या की परिस्थिति पर आधारित होगा। इसके कुछेक नमूने आगे दिए गए हैं।

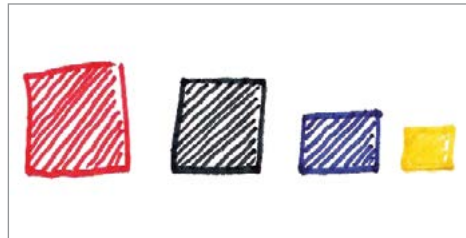
पिक्टोरियल ड्राइंग्स :

स्तर : कक्षा 2



चित्र-5

जान्हवी के पास काले और ग्रे रंग के कंचे हैं। उसके पास कुल 10 कंचे हैं। यदि उनमें से 6 काले रंग के हों तो ग्रे रंग के कितने होंगे?



चित्र-6

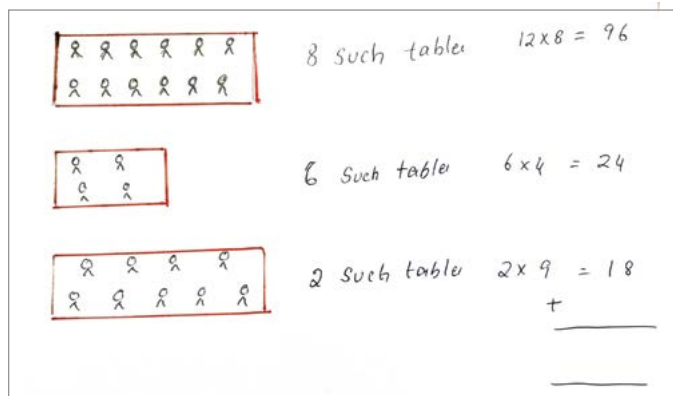
नीला बक्सा पीले बक्से से बड़ा है। नीला बक्सा काले बक्से से छोटा है। काला बक्सा लाल बक्से से छोटा है। तो कौन-सा बक्सा सबसे बड़ा होगा और कौन-सा सबसे छोटा?

इन सवालों को हल करने से पहले बच्चों को इनके लिए सांकेतिक चित्र बनाने को प्रेरित किया जा सकता है।

चूँकि आमतौर पर इस स्तर पर बच्चे पढ़ने में सक्षम नहीं होते तो बाद की कक्षाओं में शिक्षक बच्चों को चित्रात्मक वर्कशीट्स दे सकते हैं।

स्तर : कक्षा 4

स्कूल के भोजन कक्ष में 8 मेजों में प्रत्येक पर 12 लोग बैठे हैं, 6 मेजों में प्रत्येक पर 4 लोग और 2 मेजों में प्रत्येक पर 9 लोग बैठे हैं। वहाँ कुल कितनी मेज और कुल कितने लोग हैं?

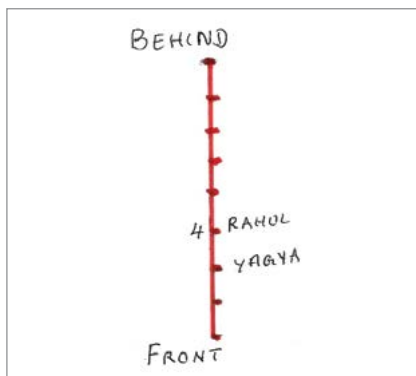


चित्र-7

संख्या रेखा चित्र : कई तरह के सवालों में आड़ी या खड़ी रेखाएँ इस्तेमाल की जा सकती हैं।

स्तर : कक्षा 4

कतार में राहुल यज्ञ के पीछे खड़ा है। सामने से देखने पर राहुल कतार में चौथा बच्चा है। और पीछे से गिनने पर यज्ञ कतार में सातवाँ बच्चा है। कतार में कुल कितने बच्चे हैं?

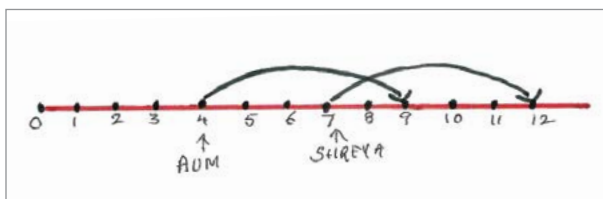


चित्र-8

स्तर : कक्षा 4

ओम की उम्र चार साल है। उसकी बहन श्रेया सात साल की है। पाँच साल बाद श्रेया ओम से कितने साल बड़ी होगी?

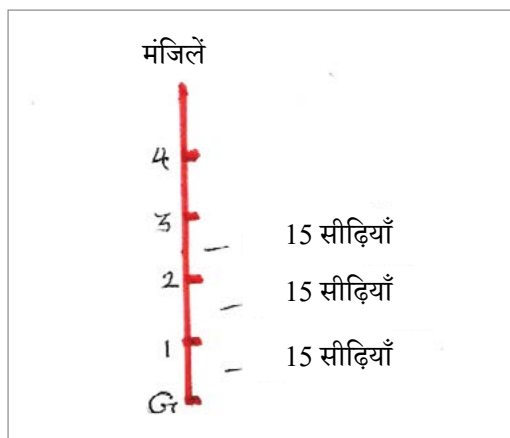
यह सवाल सहज बुद्धि पर आधारित है। लेकिन ज्यादातर बच्चे इसे हल करने के लिए संख्याओं को जोड़ने की मदद लेते हैं और गलत या निरर्थक जवाब देते हैं, क्योंकि वे सवाल को ठीक तरह से समझ नहीं पाते। एक संख्या रेखा सवाल की अमूर्तता को कुछ कम करती है और यह समझने में उनकी मदद करती है कि उम्र का अन्तर तो समान ही रहेगा।



चित्र-9

स्तर : कक्षा 4

सुजॉय का घर एक अपार्टमेंट की तीसरी मंजिल पर है। प्रत्येक दो फ्लैटों के बीच में 15 सीढ़ियाँ हैं। सुजॉय को सबसे निचली मंजिल से अपने घर जाने के लिए कितनी सीढ़ियाँ चढ़नी होंगी?



चित्र-10

स्तर : कक्षा 5

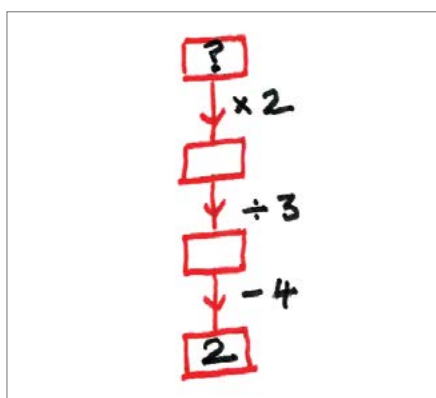
किताबों की एक अलमारी में पाँच खाने हैं। तीसरे खाने में दूसरे खाने से 10 किताबें ज़्यादा हैं। दूसरे खाने में पहले खाने से चार किताबें कम हैं। चौथे और पाँचवें खानों में मिलाकर उतनी ही किताबें है जितनी कि तीसरे खाने में हैं। यदि पहले खाने में 18 किताबें हों तो पूरी अलमारी में कुल कितनी किताबें होंगी ?

फ्लोचार्ट चित्र :

कुछ सवालों को फ्लोचार्ट के जरिए बेहतर रूप से समझा जा सकता है जैसे कि चित्र-11 में दिखाया गया है।

स्तर : कक्षा 5

मैंने एक संख्या सोची। उसे 2 से गुणा किया फिर जवाब को 3 से भाग दिया और फिर मिली संख्या में से 4 को घटा दिया तो उत्तर आया 2। मैंने कौन-सी संख्या सोची?



चित्र-11

स्तर : कक्षा 5

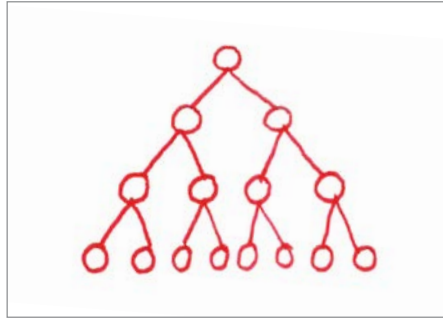
चिन्मई के पास 1 रुपए के चार सिक्के, 2 रुपए के दो सिक्के और 5 रुपए का एक सिक्का है। 9 रुपए के एक फल के लिए वह किस-किस तरह से क्रीमत अदा कर सकती है?

सिक्कों की संख्या	1	2	4
	5	2	1
	1	2	-
	1	1	2
	1	-	4

चित्र-12

शाखा चित्र :

समर्थ और उसके दोस्त अपने स्कूल के खेल दिवस के लिए एक पिरामिड की संरचना बना रहे हैं। समर्थ दो बच्चों के ऊपर खड़ा होकर अपना सन्तुलन बनाएगा। वे दोनों बच्चे दो अन्य बच्चों के ऊपर खड़े होंगे और यह दोनों बच्चे भी अन्य दो बच्चों के ऊपर खड़े होंगे। पूरी संरचना में कुल कितने बच्चे होंगे?



चित्र-13

बार चित्र :

बार चित्र समस्या को हल करने का बहुत ही उपयोगी साधन है जिसे हाई स्कूल तक के विभिन्न स्तरों पर इस्तेमाल किया जा सकता है। यह बहु-उपयोगी है क्योंकि इसे सवालियों के प्रकार के हिसाब से रूपान्तरित किया जा सकता है। इस विधि से बच्चों का परिचय उनकी कक्षा के स्तर अनुसार करवाना चाहिए जैसे कि यहाँ वर्णन किया गया है। प्रत्येक स्तर पर उन्हें कई तरह के सवालियों का अभ्यास करवाना चाहिए ताकि सवाल के हिसाब से परिवर्तन करने में उन्हें आसानी हो।

चरण 1 : किसी एक संक्रिया को दिखाने के लिए रेखीय चित्र इस्तेमाल करना।

उदाहरण : जोड़

अश्विन के पास 4 कपकेक हैं और आकृति के पास 6 कपकेक हैं। दोनों के पास कुल कितने कपकेक हैं?



चित्र-14

सारणी चित्र :

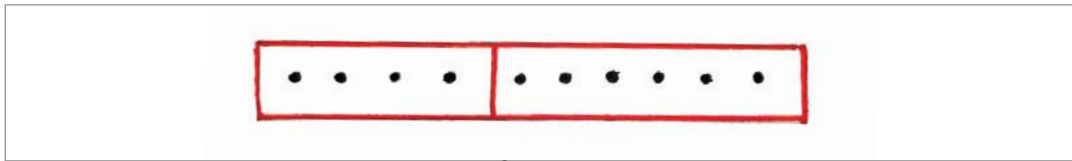
कुछ सवालों के लिए सारणी बनाकर उन्हें बेहतर समझा जा सकता है। एक सारणी का इस्तेमाल कर सभी सम्भावित संयोजन बनाकर देखे जा सकते हैं जैसे कि चित्र-15 में दर्शाया गया है।

चरण 2 : चित्र के चारों ओर बार बनाएँ। इससे भाग-पूर्ण का सम्बन्ध फोकस में लाया जाता है। भागों में 4 और 6 कपकेक हैं। साथ मिलकर वह जो पूर्ण बनाते हैं उसमें 10 कपकेक हैं।



चित्र-15

चरण 3 : चित्रों की जगह बिन्दुओं का इस्तेमाल करें। बिन्दु चित्रों के लिए एक तरह का प्रतीकात्मक चित्रण हैं। पूर्ण पर फोकस करने के लिए बार के नीचे तीर बनाएँ।

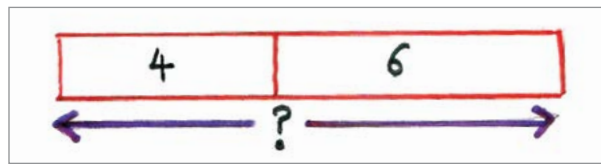


चित्र-16

इससे अर्द्ध ठोस (तस्वीर) से संख्या रूप में परिवर्तित करने में मदद मिलती है।

चरण 4 : भागों के स्थान में बिन्दुओं की जगह संख्याएँ इस्तेमाल करें। बार के नीचे के तीर पूर्ण को दर्शाते हैं।

इस स्तर पर जिस बार का मान ज्यादा हो उसके लिए बड़े बार बनाने का ध्यान रखें। इससे कल्पना करने में मदद मिलेगी।

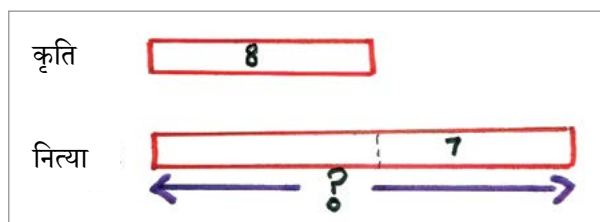


चित्र-17

चरण 5 : तुलना करने के लिए विभिन्न बार बनाएँ। बार के भागों को दर्शाने के लिए तीरों का इस्तेमाल किया जा सकता है। कुल संख्या या जोड़ को भी स्पष्ट रूप से दर्शाया जा सकता है जैसे कि इन चित्रों में दर्शाया गया है।

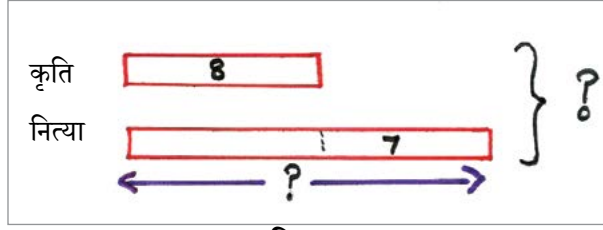
उदाहरण : तुलना

कृति के पास 8 टॉफियाँ हैं। नित्या के पास कृति से 7 टॉफियाँ ज्यादा हैं। नित्या के पास कितनी टॉफियाँ हैं?



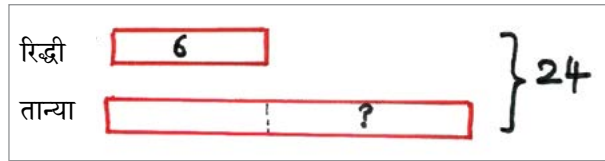
चित्र-18

कृति के पास 8 टॉफियाँ हैं। नित्या के पास कृति से 7 टॉफियाँ ज़्यादा हैं। दोनों के पास मिलाकर कुल कितनी टॉफियाँ हैं?



चित्र-19

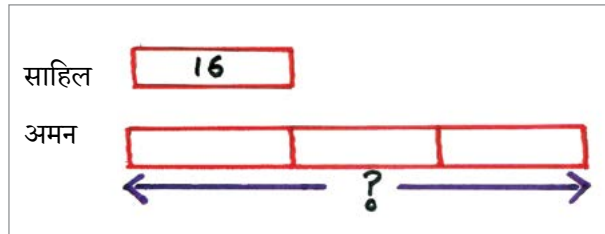
तान्या और रिद्धी दोनों के पास मिलाकर कुल 24 रंगीन पेंसिलें हैं। रिद्धी के पास 6 पेंसिल हैं। तान्या के पास रिद्धी से कितनी पेंसिलें ज़्यादा हैं?



चित्र-20

उदाहरण : गुणा

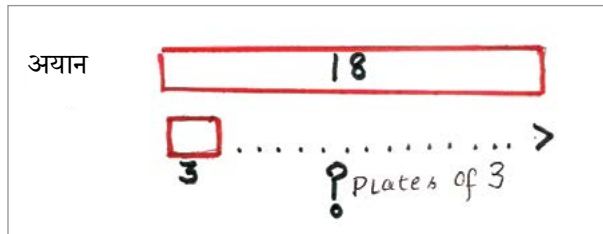
साहिल के पास 16 सीप हैं। अमन के पास साहिल से 3 गुना सीप हैं। अमन के पास कितनी सीप हैं?



चित्र-21

उदाहरण : भाग

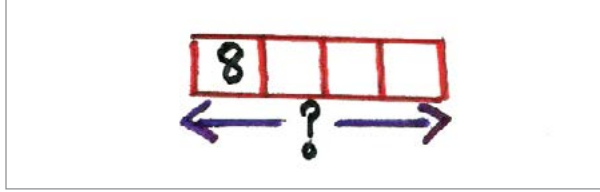
अयान के पास 18 बिस्किट हैं। उसने हर प्लेट में 3 बिस्किट रखे। उसने कुल कितनी प्लेटें भरीं?



चित्र-22

उदाहरण : भिन्न

एक संख्या का एक चौथाई ($1/4$) भाग 8 है। वह संख्या क्या होगी?

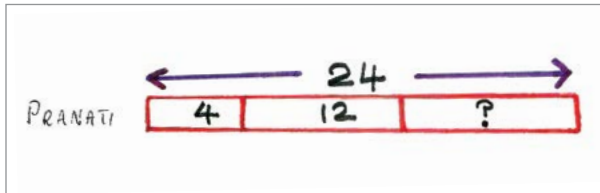


चित्र-23

चरण 6 : कई सारी समस्याएँ एक पूर्ण व उसके भागों से सम्बन्धित होती हैं। एक उपयुक्त चित्र इन भागों और पूर्ण के सम्बन्ध को स्पष्ट रूप से सामने लाता है। मुश्किल समस्याओं जिनमें आगे बार को भी विभाजित करना हो उनके लिए संख्याओं को बार के बाहर लिखना बेहतर रहेगा।

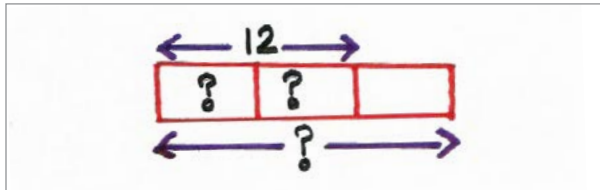
उदाहरण : विभिन्न संक्रियाएँ

प्रणीति ने 24 कपकेक बनाए। उनमें से 4 उसने खुद खा लिए और 12 अपने दोस्तों को दे दिए। अब उसके पास कितने कपकेक बचे?



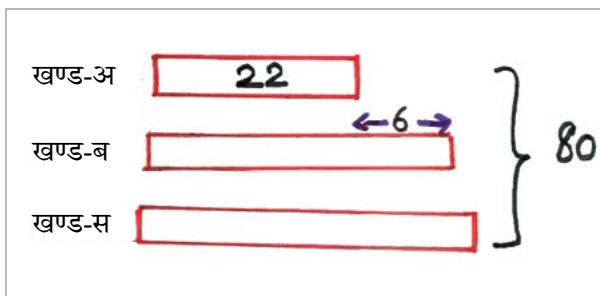
चित्र-24

एक संख्या का दो तिहाई ($2/3$) भाग 12 है। संख्या क्या होगी?



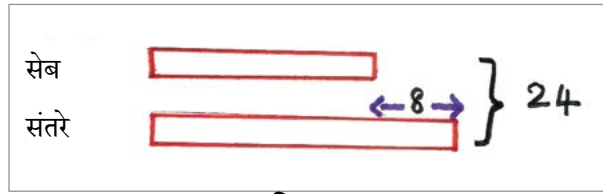
चित्र-25

कक्षा 5 में 80 विद्यार्थी हैं जिन्हें तीन वर्गों में बाँटा गया है। वर्ग ए में 22 विद्यार्थी हैं, वर्ग सी में वर्ग ए से 6 विद्यार्थी ज्यादा हैं। वर्ग बी में कितने विद्यार्थी होंगे?



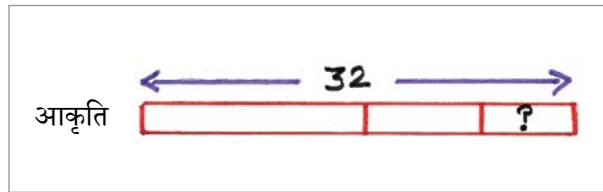
चित्र-26

एक टोकरी में सेबों से 8 सन्तरे ज़्यादा हैं। टोकरी में कुल 24 फल हैं। तो टोकरी में कुल कितने सेब होंगे?



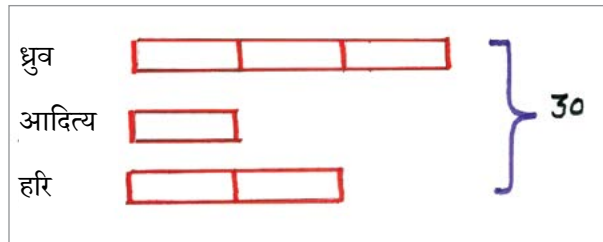
चित्र-27

आकृति के पास 32 कंचे थे। उसमें से आधे कंचे उसने अपने भाई को दे दिए। उसके बाद बचे हुए कंचों में से आधे कंचे उसने अपनी खास दोस्त को दे दिए। अब उसके पास कितने कंचे बचे?



चित्र-28

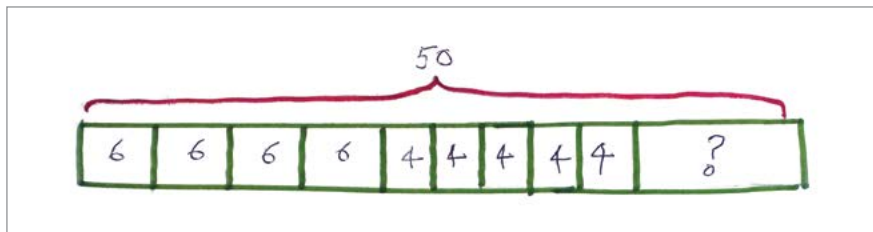
ध्रुव की उम्र आदित्य की उम्र की तिगुनी है और हरि की उम्र आदित्य की उम्र की दुगुनी है। तीनों की उम्रों का योग 30 है। प्रत्येक बच्चे की उम्र क्या होगी?



चित्र-29

वास्तव में यह समस्या बीजगणितीय रूप से सोचने के तरीके का पूर्व लक्षण (precursor) है। इस तरीके का इस्तेमाल कर बच्चा अमूर्त रूप से सोचने के पहले ही समस्या को अच्छी तरह से हल करने में सक्षम हो जाएगा।

श्रीमती कपूर ने चार बड़े आम 6 रुपए प्रति आम और पाँच छोटे आम 4 रुपए प्रति आम की दर से खरीदे। उन्होंने दुकानदार को पचास का एक नोट दिया। दुकानदार उन्हें कितने रुपए वापिस करेगा?

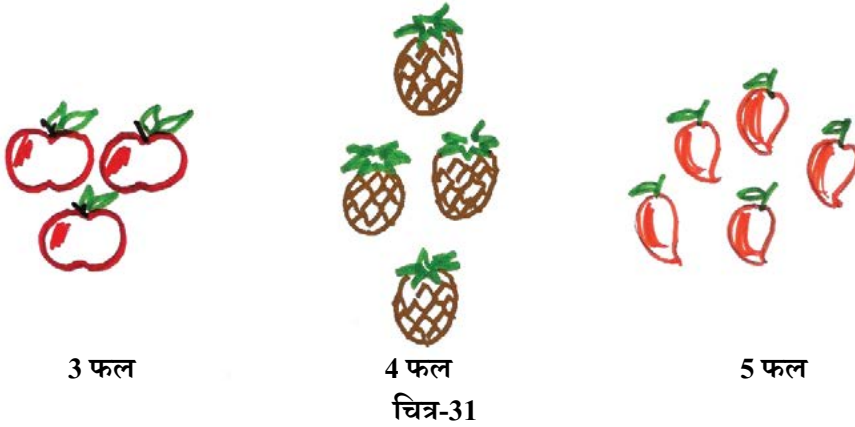


चित्र-30

चार विचारों को व्यक्त करने का तरीका

कुछ समस्याओं पर अपने विचार व्यक्त करते हुए हल करने से मदद मिलती है। यदि शिक्षक किसी सवाल को धीरे-धीरे अपने विचार व्यक्त करते हुए हल करते हैं तो बच्चे भी सवाल हल करने की बेहतर तकनीकें जल्दी सीख पाएँगे। इसके साथ ही उनकी अपनी सोचने की प्रक्रिया को साझा करने और स्पष्ट रूप से व्यक्त करने की क्षमता भी बढ़ेगी। हालाँकि छोटे बच्चों को खुद को अभिव्यक्त करने में कठिनाई हो सकती है। शिक्षक द्वारा ध्यानपूर्वक सोचे गए कुछ सवालों को पूछने से वे अपनी सोच को शब्दों में बताना शुरू करेंगे। अपने साथियों को सुनना अक्सर एक समस्या को देखने के विविध तरीकों पर गौर करने में बच्चों की मदद करता है। इससे शिक्षकों को भी अवधारणा व प्रक्रिया की बच्चे की समझ व बच्चों की गलतफहमियों के बारे में पता चलता है।

स्तर : कक्षा 2



यहाँ फलों के तीन समूह दिए गए हैं। किन दो समूहों में मिलाकर 8 फल हैं?

शिक्षक अपने विचार व्यक्त करते हैं।

क्या पहले और तीसरे समूह की संख्याएँ जोड़ने से 8 मिलता है? नहीं, 3 और 4 मिलकर तो 7 होते हैं।

क्या दूसरे और तीसरे समूह की संख्याएँ जोड़ने पर 8 मिलता है? नहीं, 4 और 5 मिलकर 9 होते हैं।

यदि पहले और तीसरे समूह की संख्याएँ जोड़ें तो? हाँ 3 और 5 का जोड़ 8 होता है।

स्तर : कक्षा 3



चित्र-32 : पहली टोकरी में 6 फल, दूसरी टोकरी में 10 फल

पहली टोकरी में से कितने फल निकालकर दूसरी टोकरी में डालें कि दूसरी टोकरी में फलों की संख्या पहली टोकरी में फलों की संख्या की तिगुनी हो जाए?

क्या होगा यदि मैं पहली टोकरी में से 1 फल निकालकर दूसरी टोकरी में डाल दूँ?

तब पहली टोकरी में 5 फल होंगे और दूसरी में 11। लेकिन 11 तो 5 का तीन गुना नहीं होता।

यदि मैं पहली टोकरी में से निकालकर 2 फल दूसरी टोकरी में डाल दूँ तब क्या होगा?

तब पहली टोकरी में 4 फल होंगे और दूसरी में 12। और 12 तो 4 का तीन गुना होता है।

एक किसान के पास 14 से ज्यादा लेकिन 20 से कम अण्डे थे। यदि वह अण्डों को दो-दो की संख्या में गिनता है तो एक अण्डा बच जाता है। यदि वह अण्डों को तीन-तीन की संख्या में गिनता है तो दो अण्डे बच जाते हैं। किसान के पास कितने अण्डे थे?

क्या किसान के पास 15 अण्डे हो सकते हैं? तब दो-दो की संख्या में गिनने पर उसके पास एक अण्डा अतिरिक्त बच जाएगा। लेकिन यदि वह तीन-तीन की संख्याओं में गिनता है तो कोई अण्डा नहीं बचता। तो 15 अण्डे तो नहीं हो सकते।

क्या उसके पास 16 अण्डे हो सकते हैं? इत्यादि।

पाँच

दिए गए चित्रों व संख्याओं की संक्रियाओं के लिए इबारती सवाल (कहानी) लिखना

शिक्षक बच्चों को कोई एक तस्वीर दे सकते हैं जिसमें किसी समस्या को चित्रित किया गया हो। बच्चे उस तस्वीर से मिलता-जुलता एक इबारती सवाल बना सकते हैं। यदि बच्चे अभी लिखने की स्थिति में न हों तो वे अपनी कहानी मौखिक सुना सकते हैं और शिक्षक उनकी कहानी को बोर्ड पर लिख सकते हैं। जब बच्चे किसी एक तस्वीर के लिए सवाल बनाते या रखते हैं तो अलग-अलग कहानियाँ सामने आती हैं। उन्हें इन समस्याओं को देखने के विविध तरीके पता चलते हैं। यह तरीका सम्भवतः काफ़ी कारगर है। यह बच्चे को सवाल बनाने का अवसर देता है।

शिक्षक कुछ आसान-से व्यंजक (expression) भी दे सकते हैं जिनमें दो या दो से ज्यादा संक्रियाएँ शामिल हों और बच्चों से कह सकते हैं कि वे इसके लिए कोई इबारती सवाल लिखें। उदाहरण के लिए :

15-(5+7) के एक इबारती सवाल लिखो और 15-5+7 के लिए एक और इबारती सवाल लिखो। दोनों ही कहानियों की कक्षा में चर्चा करें। दोनों में क्या अन्तर है?



चित्र-33

ऐसे किसी विषय पर आधारित इबारती सवाल बनाना भी अच्छा होता है जो बच्चों के लिए मददगार हो और जिसमें कई संक्रियाएँ शामिल हों।

पिकनिक गणित

कुछ बच्चे और शिक्षक पिकनिक पर गए ।

- 30 बच्चे ।
6 शिक्षक ।
वह सभी कितने हैं ?
- 6 व्यक्तियों के लिए एक कार ।
कुल कितनी कारें ?
- एक तरबूज 9 लोगों में बाँटा ।
कुल कितने तरबूज ?
- प्रत्येक के लिए 3 बिस्कुट ।
सभी के लिए कितने बिस्कुट ?
- संतरे के जूस की बोतल 40 कप बनाती है ।
कितने कप रस बचा है ?



- एक पैकेट में 10 पेपर प्लेट्स हैं ।
कितने पैकेट्स लेना है ?
- प्रत्येक पैकेट में 6 पूरियाँ ।
18 पैकेट्स हैं ।
कुल कितनी पूरियाँ हैं ?
- रस्साकसी के लिए 2 टीमों ।
प्रत्येक टीम में कितने ?
- सभी बच्चों को 6 टीमों में बाँटा गया ।
प्रत्येक टीम में कितने ?
- सुबह 8.30 बजे निकल गए ।
शाम 4.30 बजे पहुँचे ।
वे कितने समय से बाहर थे ?



चित्र-34

छह

इबारती सवालों की मौखिक पूछने का तरीका

गणितीय शब्दावली और इबारत वाले सवालों को समझने का अभ्यास करने के लिए रोजाना एक पंक्ति वाले आसान से सवाल पूछना अच्छा होता है।

1. दो ऐसी संख्याएँ बताओ जिनका योग 10 हो।
2. दो पासों का इस्तेमाल कर तुम गुणनफल के रूप में 12 कैसे ला सकते हो?
3. एक ऐसी संख्या सोचो जिसका गुणज 18 हो।
4. 24 का सबसे छोटा दो अंकों वाला गुणनखण्ड क्या होगा?
5. कुछ ऐसी संख्याएँ बताओ जो बिना शेष छोड़े 7 से पूरी तरह विभाजित हो जाती हों।
6. मैं 10 से 20 के बीच की एक विषम संख्या हूँ। मैं 3 का गुणज भी हूँ। बताओ मैं कौन-सी संख्या हूँ?

एक अंक वाली या दो अंक वाली कोई एक संख्या बोर्ड पर लिखें। “तुम इस संख्या के बारे में जो कुछ भी सोचते हो उसे गणितीय शब्दावली का इस्तेमाल करते हुए मुझे बताओ।” बच्चे उन गणितीय शब्दों का इस्तेमाल कर सकते हैं जो उन्होंने सीखे हैं जैसे : सम, विषम, गुणनखण्ड, गुणज, अभाज्य, भाज्य, वर्ग संख्याएँ, वर्ग संख्या से एक कम आदि। उन्हें संख्या के बारे में ज्यादा से ज्यादा तरीकों से बताने के लिए प्रेरित करें।

खेल : बीस सवाल। शिक्षक 1 से 100 के बीच की कोई एक संख्या सोच लें। बच्चे गणितीय शब्दों का इस्तेमाल कर उस संख्या के बारे में बीस सवाल पूछ सकते हैं (जिनका जवाब केवल हाँ या ना में दिया जा सकता हो)। अपने 20 सवालों के जरिए उन्हें उस संख्या को खोजने की कोशिश करना चाहिए।



पद्मप्रिया शिराली

पद्मप्रिया शिराली ऋषिवैली स्कूल, आन्ध्रप्रदेश के कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर में 1983 से काम कर रही हैं। वे गणित, कम्प्यूटर, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण विज्ञान तथा तेलुगु भाषा का अध्यापन करती रही हैं। आजकल वे आउटरीच कार्यक्रम के तहत एससीईआरटी, आन्ध्रप्रदेश के साथ उनके पाठ्यक्रम सुधार तथा प्राथमिक स्तर की गणित पाठ्यपुस्तकों के निर्माण में संलग्न हैं। 1990 के दशक में उन्होंने जाने-माने गणितज्ञ श्री पी.के. श्रीनिवासन के साथ काम किया है। वे ऋषिवैली स्कूल की मल्टीग्रेड लर्निंग प्रोग्राम टीम का हिस्सा भी रही हैं, जिसे 'स्कूल इन ए बाक्स' के नाम से जाना जाता है। उनसे padmapriya.shirali@gmail.com पर सम्पर्क किया जा सकता है। यह अज़ीम प्रेमजी विश्वविद्यालय तथा कम्युनिटी मैथमैटिक्स सेन्टर, ऋषिवैली की संयुक्त पत्रिका Azim Premji University At Right Angles (a resource for school mathematics) Volume 5 ,N0.1 March 2016 में प्रकाशित Teaching Word Problems का अनुवाद है।

अनुवाद : कविता तिवारी **सम्पादन :** राजेश उत्साही